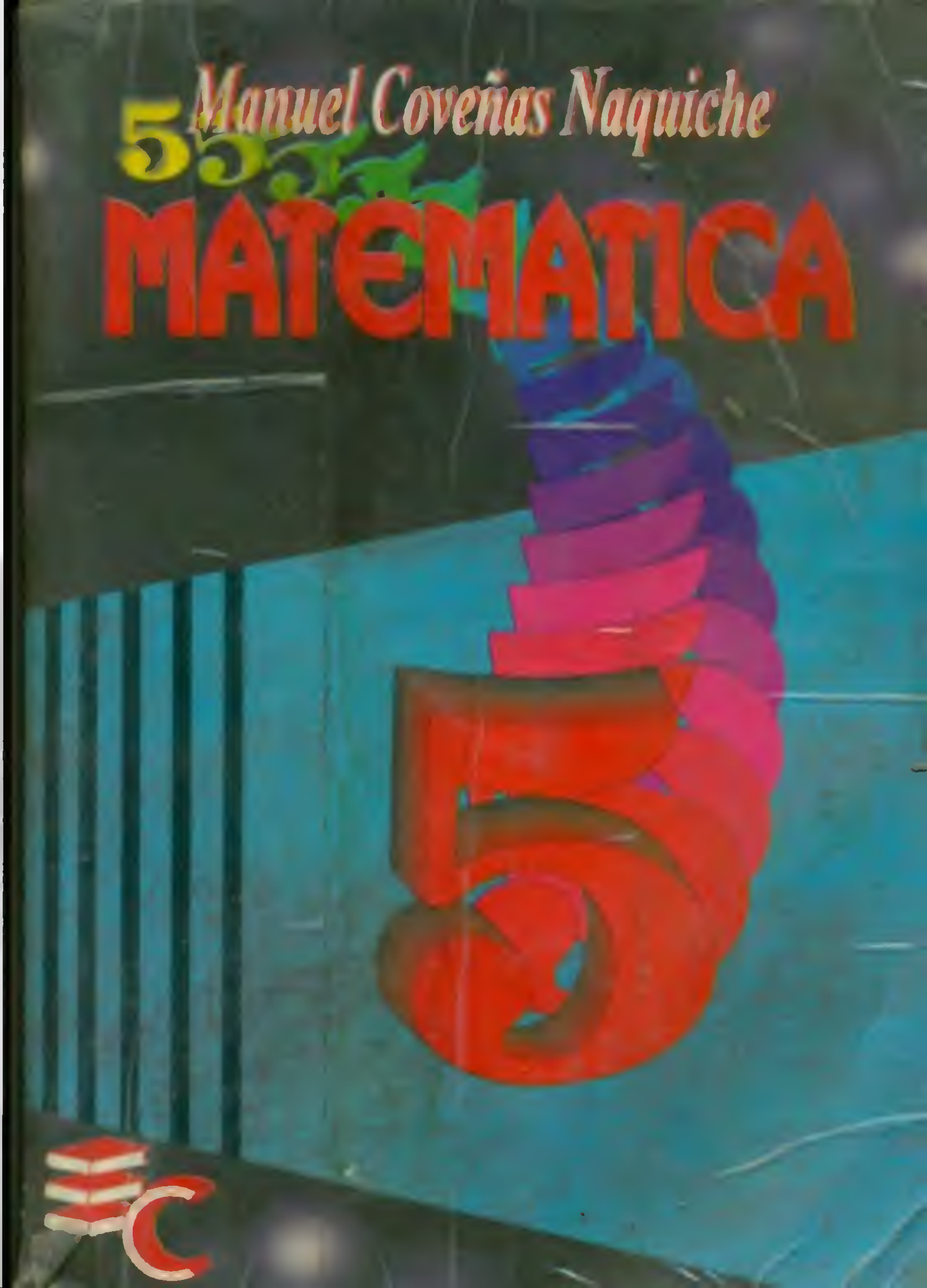


Manuel Coveñas Naquiche
5
MATEMATICA
5

MATEMÁTICA 5

EDICIÓN 1 997

Manuel Coveñas Naquiche

5 MATEMÁTICA

Presentación

"Caminante no hay camino,
se hace camino al andar"

Estas coplas, en las que el vate Antonio Machado expresa poéticamente una gran verdad de la sabiduría popular, cobran plena vigencia en la actividad de profesional de ***Manuel COVEÑAS NAQUICHE****, con justicia* ***"el Isaac Asimov de las matemáticas peruanas"*** *por su prolífica producción bibliográfica -en el área didáctica- en esta no fácil ciencia formal.*

En efecto, Manolo, como le gusta que le digan sus amigos, se abrió camino como un extraordinario docente, por sus virtudes didácticas, ¡innatas en él!, y por su sencillez; ahora, sigue caminando, haciendo camino, en el difícil arte de crear libros... ¡no se duerme en sus laureles!, por eso, sigue mejorando sus textos escolares, gracias a su experiencia pedagógica y a los consejos de uno de los elementos fundamentales del proceso enseñanza-aprendizaje: ***¡EL MAESTRO DE AULA!****, con quien está en permanente contacto.*

Con ocasión de esta segunda edición -ampliada y corregida de sus textos de ***MATEMÁTICAS****, para cada uno de los grados de Educación Secundaria, nos presenta una nueva estructura de los mismos:*

- ☞ ***Una exposición teórica sencilla****, accesible al alumno, de cada uno de los temas tratados, que se ve clarificada con...*
- ☞ ***Ejemplos resueltos*** *en orden de dificultad progresiva y con...*
- ☞ ***Talleres*** *para cada capítulo, a desarrollarse en clase, ¡mejor si es a nivel grupal!, motivando así la participación activa de los educandos.*

No contento con esto, añade:

- ☞ ***Ejercicios de reforzamiento*** *en dos niveles, según el grado de dificultad y,*
- ☞ ***Propuesta de Olimpiadas Matemáticas****, con su respectivo desarrollo, que globalizan los conocimientos impartidos en cada unidad temática.*

Como pueden apreciar amigos/as lectores/as, estos textos se convierten en un material de invalorable valor pedagógico, porque, facilitan el proceso de la enseñanza-aprendizaje de las ***Matemáticas****, saber que permite optimizar la capacidad lógico-deductiva del ser humano.*

Prof. Lucio R. Blanco A.

INDICE

Capítulo 1: TRIGONOMETRÍA

1.1 ÁNGULO TRIGONOMÉTRICO

Cuando nos referimos al ángulo trigonométrico tenemos que recurrir a un efecto comparativo con el ángulo geométrico, para su mejor comprensión del alumno.

I. LA GEOMETRÍA PLANA

Ha definido al ángulo como la abertura determinada por dos rayos a partir de un mismo punto.

Para su mejor ilustración, veamos el gráfico siguiente.

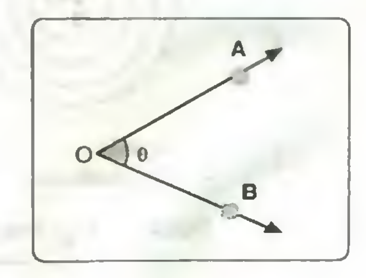
Características:

1. Son estáticos (No tienen movimiento)

2. No tienen sentido de giro por lo tanto no se puede hablar de ángulos negativos, ya que todos son positivos.

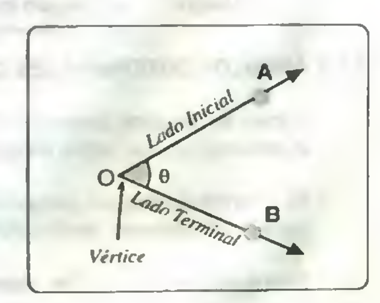
3. Por no tener movimiento, están limitados en su magnitud; o sea.

$$0^{\circ} \leq \text{Ángulo geométrico} \leq 360^{\circ}$$



II. LA TRIGONOMETRÍA PLANA

Ha definido al ángulo como el que se genera por el movimiento de rotación de un rayo al rededor de un extremo, desde una posición inicial hasta una posición final. La amplitud de la rotación es la medida del ángulo trigonométrico. La posición final se llama lado terminal, y el extremo del rayo se llama vértice del ángulo.



Donde:

O	: Vértice	$\overrightarrow{OA}$	: Lado inicial
$\overrightarrow{OB}$	: Lado terminal	θ	: Medida del ángulo trigonométrico

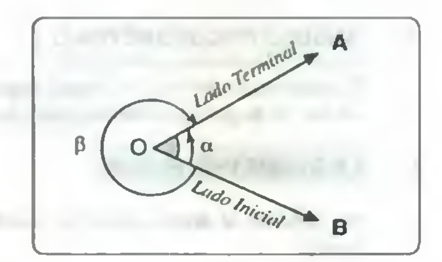
Caracteristicas:

1. Son rotacionales (requieren movimiento para su formación)

2. Su sentido de giro, está definido asi:

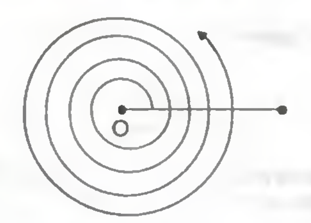
Antihorario: + *Horario* -

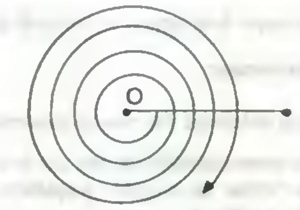
Para su mejor comprensión veamos el siguiente gráfico.



$\alpha°$ Es un ángulo positivo (sentido antihorario)
$\beta°$ Es un ángulo negativo (sentido horario)

3. Su magnitud, no tiene límites.





+ ∞ Vueltas
+ ∞ Revoluciones

Donde: + ∞ : más infinito

- ∞ Vueltas
- ∞ Revoluciones

Donde: - ∞ : menos infinito

Luego: **$-\infty \leq$ ángulo trigonométrico $\leq +\infty$**

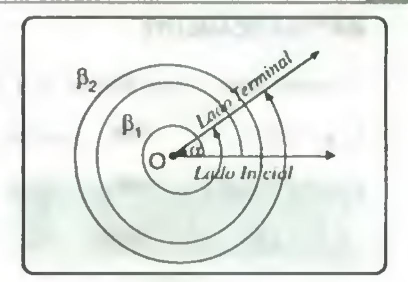
1.1.1 ÁNGULOS COTERMINALES O COFINALES:

Hablar de ángulos coterminales o Cofinales, significa demostrar el porqué los ángulos trigonométricos no tienen limites en su magnitud.

Se denominan ángulos coterminales, aquellos ángulos que tienen el mismo lado inicial y el mismo lado terminal, diferenciándolos solamente el número de vueltas.

Para su mejor comprensión, veamos algunos ángulos coterminales con relación al ángulo "α".

PARA ÁNGULOS POSITIVOS:



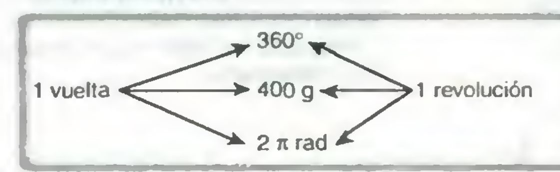
- Ángulos coterminales del ángulo "α"

β_1 = 1 vuelta + α
β_2 = 2 vueltas + α
: :
: :
β_n = n vueltas + α

En general: Coterminales de = "n" vueltas + ▭

Donde:
- n : Número entero positivo (1, 2, 3, 4, ...)
- : ángulo cualquiera menor de una vuelta

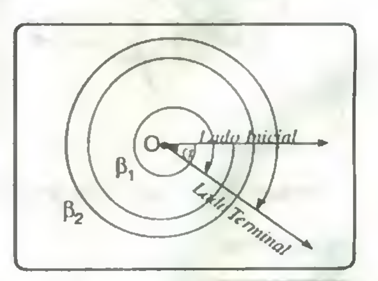
Recordemos que:



(°) : Grado sexagesimal
(g) : Grado centesimal
(rad) : Radianes

PARA ÁNGULOS NEGATIVOS

- Ángulos coterminales del ángulo "α"



β_1 = -1 vuelta - α
β_2 = -2 vueltas - α
: :
: :
β_n = n vueltas - α

En general: Coterminales de = "n" vueltas -

Donde:
- n : Número entero negativo (-1, -2, -3, -4...)
- ▲ : Ángulo cualquiera menor que una vuelta

NOTA: De la definición de ángulos coterminales se deduce que si dos ángulos son coterminales, entonces se diferencian en un número entero de vueltas.

MATEMÁTICAMENTE

Se puede evaluar asi: Siendo "x" y "y" dos ángulos coterminales, se verifica lo siguiente:

$x - y = 2\pi n$ ➡ : donde: "x" e "y" están en radianes

$x - y = n\,(360°)$ ➡ : donde: "x" e "y" están en grados sexagesimales

$x - y = n\,(400\text{ g})$ ➡ : donde: "x" e "y" están en grados centesimales

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

A. Cuando los dos ángulos son positivos:

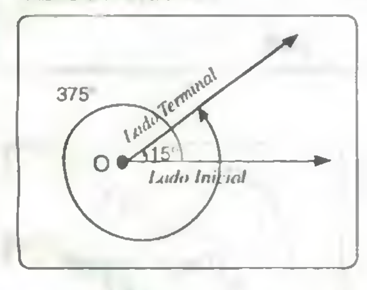
Ejercicio 1. ¿Decir si los ángulos: 15° y 375° son coterminales?

Resolución: Para saber si dos ángulos son coterminales nos basta realizar una simple resta veamos:

$375° - 15° = 360° <> 1\text{ vuelta}$

- Como la diferencia de los ángulos a resultado un número entero de vueltas (1 vuelta), esto nos indica que los ángulos sí son coterminales.

MÉTODO GRÁFICO:



- Como se muestra en la figura los dos ángulos sí son coterminales por tener el mismo lado inicial y el mismo lado terminal.

15° y 375° si son ángulos coterminales.

Ejercicio 2.- ¿Decir si los ángulos 256° y 976° son coterminales?

Resolución:

Aplicando el mismo criterio que el problema anterior obtenemos:

$976° - 256° = 720° = 2\,(360°) <> 2\text{ vueltas}$

Como la diferencia de los dos ángulos a resultado un número entero de vueltas (2 vueltas), esto quiere decir que los dos ángulos sí son coterminales.

NOTA: Recordaremos que: < > es signo de equivalencia

$\therefore$ 34° y 754° si son ángulos coterminales

B. **Cuando los dos ángulos son negativos:**

Ejercicio (3).- ¿Decir si los ángulos: -50° y -410° son coterminales?

Resolución: Para este tipo de problema donde los dos ángulos son negativos se puede resolver de 3 formas, veamos:

PRIMERA FORMA: (-50°) - (-410°) = -50° + 410° = 360° < > 1 vuelta

-30° y -390° si son ángulos coterminales

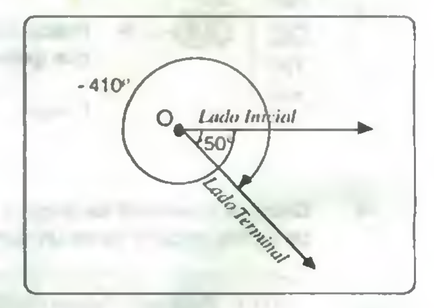
SEGUNDA FORMA: (-410°) - (-50°) = -410° + 50° = -360° < > - 1vuelta

- Como la diferencia a resultado un número entero de vueltas (-1 vuelta), esto quiere decir que los dos ángulos si son coterminales.

> *NOTA: Recordemos que números enteros positivos son: 1, 2, 3, 4, ... y números enteros negativos son: -1, -2, -3, -4, ...*

TERCERA FORMA: *(Método gráfico)*

- Como se muestra en la figura los dos ángulos si son coterminales por tener el mismo lado inicial y el mismo lado terminal.



-50° y -410° sí son ángulos coterminales

C. **Cuando un ángulo es positivo y el otro negativo:**

Ejercicio (4). ¿Decir si los ángulos: 830° y -250° son coterminales.

Resolución: Aplicando el criterio del ejercicio 1 obtenemos:

PRIMERA FORMA: 830° - (-250°) = 830° + 250° = 1 080° = 3 (360°) < > 3 vueltas

- Como la diferencia de dichos ángulos a resultado un número entero de vueltas, esto quiere decir que los ángulos si son coterminales:

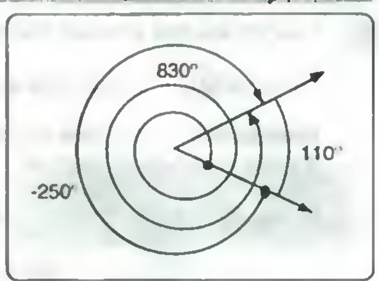
∴ 830° y -250° si son ángulos coterminales

SEGUNDA FORMA: (-250°) - (830°) = -250° - 830° = - 1 080° = -3 (360°) = < > -3 vueltas

- Como la diferencia a resultado un número entero de vueltas (-3 vueltas) esto quiere decir que los ángulos sí son coterminales.

Tercera forma: *(Método gráfico)*

- Como se muestra en la figura los dos ángulos si son coterminales por tener el mismo lado inicial y el mismo lado terminal.



D. Cuando dos ángulos no son coterminales:

Ejercicio ⑤.- ¿Decir si los ángulos: -42° y 750° son coterminales?

Resolución: Aplicando el mismo criterio que los problemas anteriores, obtenemos:

$750° - (-42°) = 750° + 42° = 792° = 2,2\ (360°)$

NOTA: Para saber cuantas vueltas genera 792°, dividimos dicho valor entre 360°, veamos:

$$\begin{array}{r|l} 792° & 360° \\ \hline \underline{720°} & 2,2 \\ 720° & \\ \underline{720°} & \end{array}$$

(2,2) → Indica el número de vueltas que genera el ángulo de 792°.

Luego: 792° = 2,2 (360°)

↑ No es número entero

- Como se observará los ángulos -42° y 750°, no son coterminales, porque la diferencia de dichos ángulos no es un número entero.

NOTA: Para saber cuantas vueltas completas genera un ángulo [ ] se divide dicho ángulo, entre 360°, lo que resulte en el cociente será el número de vueltas que ha generado dicho ángulo [.]

E. Cuando son tres ángulos positivos

Ejercicio ⑥. ¿Decir si los ángulos: 50°, 410° y 770° son coterminales?

Resolución:

En primer lugar. Hallamos la diferencia entre 410° y 50°	En segundo lugar: hallamos la diferencia entre 770° y 50°
410° - 50° = 360° < > 1 vuelta	770° - 50° = 720° = 2 (360°) < > 2 vueltas
∴ Los ángulos de 410° y 50° sí son coterminales	∴ Los ángulos de 770° y 50° sí son coterminales

En tercer lugar: hallamos la diferencia entre 770° y 410°

$$770° - 410° = \underline{360°} <> \underline{1 \text{ vuelta}}$$

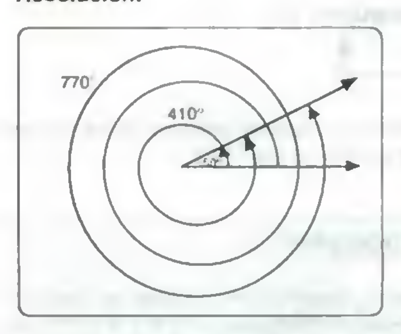
∴ Los ángulos de 770° y 410° si son coterminales

Luego, diremos que los tres ángulos. 50°, 410° y 770° son coterminales por diferenciarse en un número entero de vueltas.

MÉTODO GRÁFICO

¿Decir si los ángulos 50°, 410° y 770° son coterminales?

Resolución:



- Como se observará en la figura, los tres ángulos tienen el mismo lado inicial y el mismo lado terminal, por lo tanto los tres ángulos son coterminales.

MÉTODO PRACTICO:

Este método consiste en dividir los ángulos mayores de 360°, si los residuos son iguales al menor de los ángulos dados (menor de 360°), esto implica que los ángulos si son coterminales.

Ahora apliquemos éste método en el problema anterior, o sea ¿Decir si los ángulos 50°, 410° y 770° son coterminales?

Resolución:

- Como se observará, el menor de los 3 ángulos dados es 50° (menor de 360°)

  Luego, dividimos los ángulos mayores de 360°, entre 360°, veamos.

410°	360°
360°	1
Residuo = 50°	

770°	360°
720°	2
Residuo = 50°	

Los residuos hallados son iguales al ángulo menor o sea 50° entonces diremos que lo tres ángulos si son coterminales.

F. Cuando dos ángulos son positivos y uno es negativo.

Ejercicio 7 ¿Decir si los ángulos de 70°, 430° y -650° son coterminales?

Resolución:

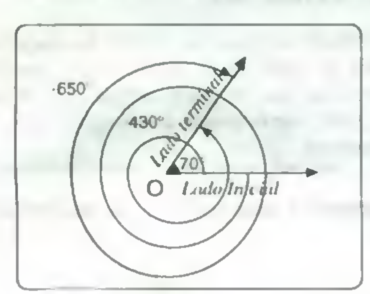
- Como se observará, el ángulo de menor magnitud es: 70° (menor de 360°)

  Ahora, dividimos los ángulos mayores de 360°, entre 360°, veamos.

$$\begin{array}{r|l} 430^\circ & 360^\circ \\ \hline 360^\circ & 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} -650^\circ & 360^\circ \\ \hline 720^\circ & -2 \end{array}$$

Residuo = 70° ***Residuo = 70°***

Luego diremos que los tres ángulos son coterminales, porque los residuos de los ángulos de mayor amplitud son iguales al ángulo de menor amplitud o sea (70°)



MÉTODO GRÁFICO:

Como se observará en la figura, los tres ángulos tienen el mismo lado inicial y el mismo lado terminal por lo tanto los tres ángulos son coterminales.

TALLER DE EJERCICIOS Nº 1

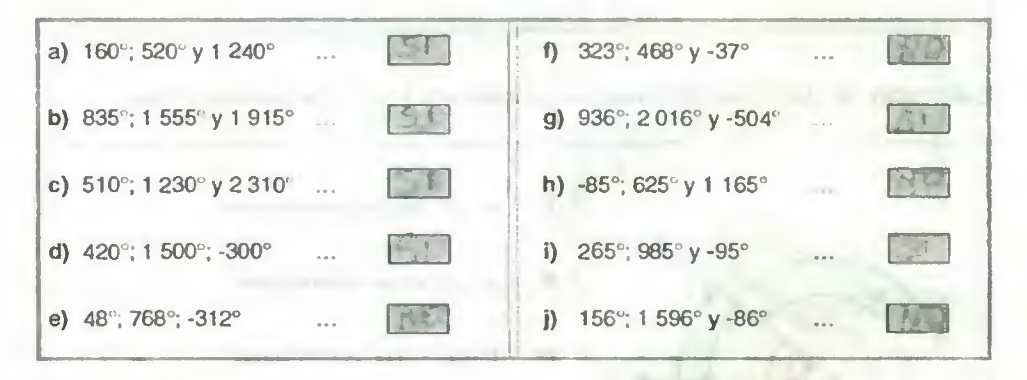
EJERCICIO 1 : ¿Decir si los ángulos que se dan a continuación son coterminales?

a) 70° y 430° ... Sí	e) 380° y 1 060° ... No	i) 570° y 1 510° ... [illegible]
b) 210° y 930° ... SI	f) 490° y 1 210° ... SI	j) 323° y 468° ... NO
c) 750° y 2 550° ... SI	g) 825° y 1 905° ... SI	k) 1 680° y 672° ... [illegible]
d) 520° y 1 600° ... [illegible]	h) 1 230° y 510° ... SI	l) 1 500° y 420° ... [illegible]

EJERCICIO 2 : ¿Decir si los ángulos que se dan a continuación son coterminales?

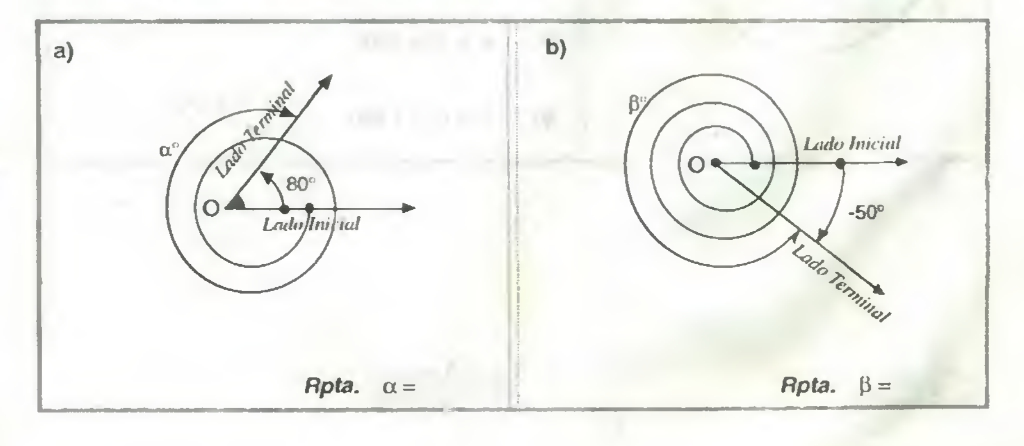
a) -50° y -410° ...	e) -240° y -960° ...	i) 268° y -1 172° ...
b) -150° y -870° ...	f) -660° y -1 860° ...	j) -75° y 645° ...
c) -420° y -1 500° ...	g) 80° y -640° ...	k) -236° y 1 444° ...
d) -350° y -2 120° ...	h) 135° y -945° ...	l) -95° y 625° ...

EJERCICIO 3 : ¿Decir si los ángulos que se dan a continuación son coterminales?



a) 160°; 520° y 1 240° ...	f) 323°; 468° y -37° ...
b) 835°; 1 555° y 1 915° ...	g) 936°; 2 016° y -504° ...
c) 510°; 1 230° y 2 310° ...	h) -85°; 625° y 1 165° ...
d) 420°; 1 500°; -300° ...	i) 265°; 985° y -95° ...
e) 48°; 768°; -312° ...	j) 156°; 1 596° y -86° ...

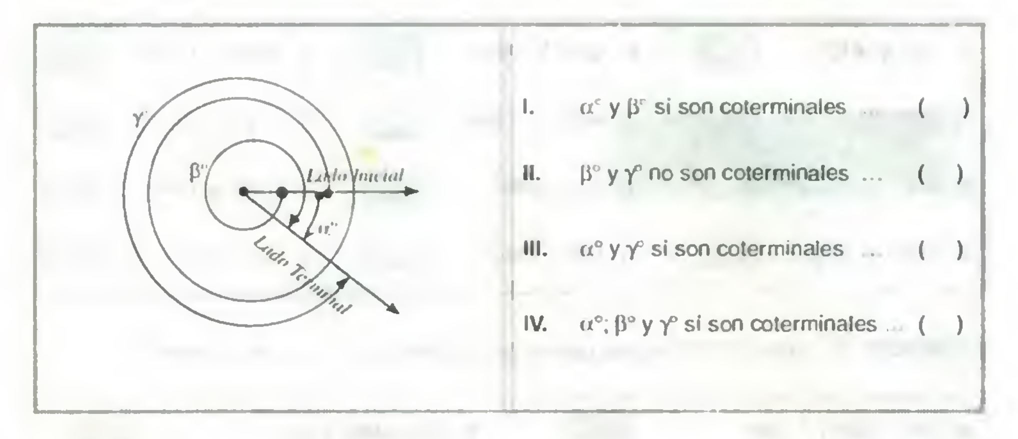
EJERCICIO 4 : ¿Decir qué valor debe tomar "α" para que sea coterminal con el ángulo de 80°, y que valor debe tomar "β" para que sea coterminal con -50°?



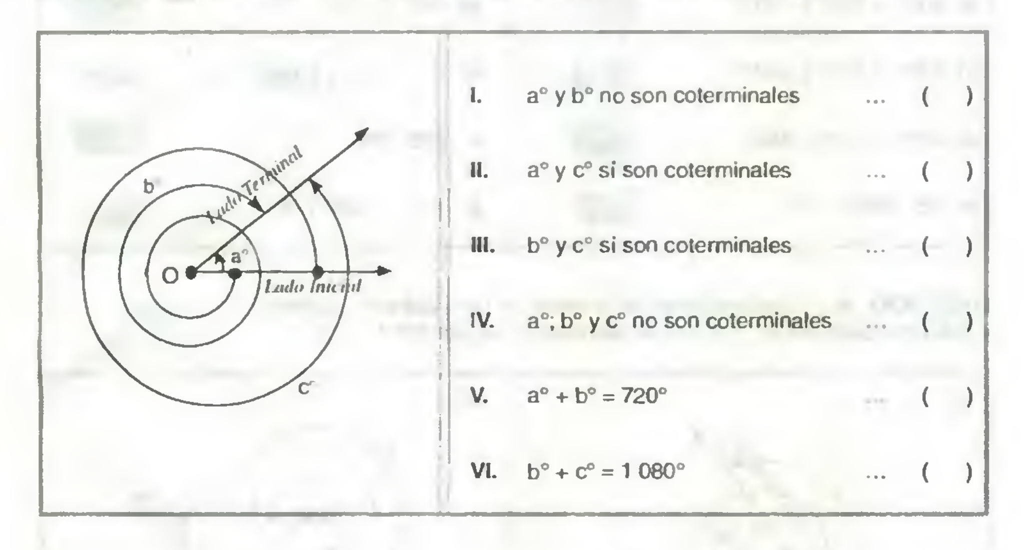
Rpta. α =

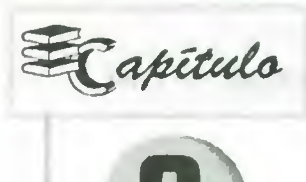
Rpta. β =

EJERCICIO 5 : Marca con (V) la proposicion Verdadera y con (F) la proposición Falsa:



EJERCICIO 6 : Marca con (V) la proposición Verdadera y con (F) la proposición Falsa:





Sistemas de Medidas Angulares

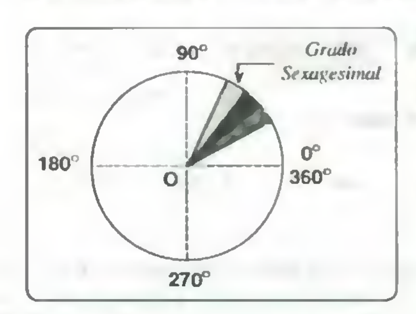
2.1 SISTEMAS DE MEDIDAS ANGULARES

En este campo de la trigonometría para expresar la medida de los ángulos se emplean los siguientes sistemas:

1. El sistema sexagesimal o sistema inglés
2. El sistema centesimal o sistema francés
3. El sistema radial o sistema circular

2.1.1 SISTEMA SEXAGESIMAL (S)

Llamado también sistema inglés, es aquel sistema cuya unidad de medida angular es el "grado sexagesimal" (°) que es igual a la 360 ava parte de 1 vuelta (una circunferencia).



NOTA: En este sistema la circunferencia se divide en 360 partes iguales.

GRADO SEXAGESIMAL

Notación:

Grado sexagesimal	...1°
Minuto sexagesimal	...1'
Segundo sexagesimal	...1"

Equivalencias:

1 circunferencia 360°	< >	1 vuelta
1 circunferencia	< >	4 cuadrantes
1 cuadrante	< >	90°
1°	< >	60'
1'	< >	60"
1°	< >	3600"

Ejercicio (1). Convertir: 45°25'30" a grados sexagesimales

Resolución: En primer lugar pasamos los 30" a grados, veamos:

$$30'' <> 30''\times\frac{1^\circ}{3\ 600''} = 0{,}008\ 3^\circ \Rightarrow \therefore\ 30'' <> 0{,}008\ 3^\circ \quad ...(I)$$

En segundo lugar los 25' los pasamos a grados, veamos:

$$25' <> 25' \times \frac{1^\circ}{60'} = 0.4167 \Rightarrow \therefore \quad 25' <> 0,4167 \quad \ldots (II)$$

Luego, la expresión: 45°25'30", se puede escribir así:

$$45^\circ\, 25'\, 30'' <> 45^\circ + 25' + 30'' \quad \ldots (III)$$

Reemplazamos (I) y (II) en (III):

$$45^\circ\, 25'\, 30'' <> 45^\circ + 0,4167 + 0,0083^\circ$$

$$45^\circ\, 25'\, 30'' <> 45^\circ + 0,425 \Rightarrow \therefore \quad 45^\circ\, 25'\, 30'' <> 45,425$$

Ejercicio **2**. Convertir: 16,205 6° a grados, minutos y segundos sexagesimal.

Resolución:

- La expresión: 16,205 6° se puede escribir así: $\Rightarrow$ $16,205\,6^\circ <> 16^\circ + \underbrace{0,205\,6^\circ}_{\text{Fracción de Grados}}$

- Pasamos la fracción de grados a minutos, veamos:

$$0,205\,6^\circ <> 0,205\,6^\circ \times \frac{60'}{1^\circ} = 12,336'$$

$$0,205\,6^\circ <> 12,336' <> 12' + 0,336' \Rightarrow 0,205\,6^\circ <> 12' + \underbrace{0,336'}_{\text{Fracción de minutos}}$$

- Pasamos la fracción de minutos a segundos, veamos:

$$0,336' <> 0,336' \times \frac{60''}{1'} = 20,16'' \Rightarrow \therefore \quad 0,336' <> 20''$$

NOTA: *En el resultado 20,16", si la cifra siguiente a la "Coma decimal" fuese mayor o igual a 5 se aproxima la parte entera a la unidad inmediata superior. En este caso 20,16" quedaría como 20" ya que la cifra siguiente a la coma decimal es menor que 5, en caso que el resultado hubiera sido 20,53" se aproximará a 21" por ser la cifra que le sigue a la coma decimal la cifra 5, para su mejor comprensión veamos otros ejemplos:*

40,6" $\Rightarrow$ 41" 30,2" $\Rightarrow$ 30" 26,9" $\Rightarrow$ 27"

Para nuestro ejercicio: 16,205 6° es equivalente a: $16,205\,6^\circ <> 16^\circ + \underbrace{0,205\,6^\circ}_{12' + \underbrace{0,336'}_{20''}}$

$$\therefore \quad 16,205\,6^\circ <> 16^\circ\, 12'\, 20''$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 2

EJERCICIO 1: Convertir a grados sexagesimales:

a) 60° 30'45"

Resolución:

$$60°\ 30'\ 45" = 60° + 30' + 45"$$

$$= 60° + 0{,}5° + 0{,}0125°$$

$$= 60{,}5125°$$

$\therefore$ $60°\ 30'\ 45" = 60{,}5125°$ ***Rpta.***

Convertimos: 45" a grados sexagesimales

$$45" = 45" \times \frac{1°}{3\ 600"} = 0{,}0125°$$

$$\therefore\ 45" = 0{,}0125°$$

Convertimos: 30' a grados sexagesimales

$$30' = 30' \times \frac{1°}{60'} = 0{,}5°$$

$$\therefore\ 30' = 0{,}5°$$

b) 150° 45' 30"

Resolución:

Rpta. 150°,758 3°

c) 215° 24' 36"

Resolución:

Rpta. 215,41°

EJERCICIO 2 : Convertir a grados, minutos y segundos sexagesimales.

a) 30,153°

Resolución:

$30{,}153° = 30° + 0{,}153°$

$= 30° + 9{,}18'$

$= 30° + 9' + 0{,}18'$

$= 30° + 9' + 10{,}8''$

$\therefore$ $30{,}153° = 30°\,9'\,11''$ ***Rpta.***

Convertimos: 0,153° a minutos sexagesimales.

$$0{,}153° = 0{,}153° \times \frac{60'}{1°} = 9{,}18'$$

$$\therefore \quad 0{,}153° = 9{,}18'$$

Convertimos: 0,18' a segundos sexagesimales.

$$0{,}18' = 0{,}18' \times \frac{60''}{1'} = 10{,}8''$$

$$\therefore \quad 0{,}18' = 10{,}8''$$

b) 56,48°

Resolución:

Rpta. 56° 28' 48"

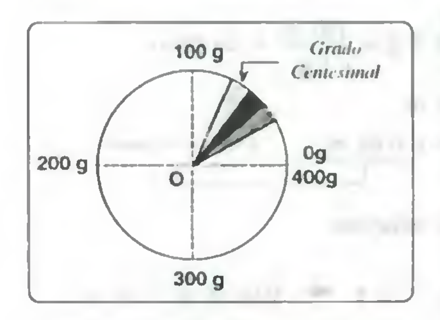
c) 129,26°

Resolución:

Rpta. 129° 15' 36"

2.1.2 SISTEMA CENTESIMAL (C).

Llamado también sistema francés, es aquel sistema que tiene como unidad de medida angular el grado centesimal (g), que es igual a la 400 ava parte del ángulo de una vuelta.



NOTA: En este sistema la circunferencia se divide en 400 partes iguales.

GRADO CENTESIMAL

Notación:

Grado centesimal	... 1g ó 1^g
Minuto centesimal	... 1m ó 1^m
Segundo centesimal	... 1s ó 1^s

Equivalencias:

1 circunferencia 400 g	< >	1 vuelta
1 circunferencia	< >	4 cuadrantes
1 cuadrante	< >	100 g
1 g	< >	100 min
1 min	< >	100 seg
1 g	< >	10 000 seg

Ejercicio 1. Convertir: 50 g 25 min 45 s a grados centesimales, veamos:

$$45\ s < > 45\ s \times \frac{1\ g}{10\ 000\ s} = 0{,}004\ 5\ g \quad \therefore \quad 45\ s < > 0{,}004\ 5\ g \qquad \text{... (I)}$$

En segundo lugar pasamos los 25 min. a grados centesimales, veamos:

$$25\ min < > 25\ min \times \frac{1\ g}{100\ min} = 0{,}25\ g \quad \therefore \quad 25\ min < > 0{,}25\ g \qquad \text{... (II)}$$

Luego, la expresión: 50 g 25 min 45 s, se puede escribir así:

$$50\ g\ 25\ min\ 45\ s < > 50\ g + 25\ min + 45\ s \qquad \text{...(III)}$$

Reemplazamos (I), (II) en (III):

$$50\ g\ 25\ min\ 45\ s < > 50\ g + 0{,}25\ g + 0{,}0045\ g$$

$$< > 50\ g + 0{,}254\ 5\ g$$

$$\therefore \quad 50\ g\ 25\ min\ 45\ s < > 50{,}254\ 5\ g$$

Ejercicio 2. Convertir: 20,346 5 g. a grados, minutos y segundos centesimales

Resolución:

La expresión: 20,346 5 g. se puede escribir así:

$$20{,}346\,5\ g <> 20\ g + \underbrace{0{,}346\,5\ g}_{}$$ *Fracción de Grados*

- Pasamos la fracción de grados (0,3465 g) a minutos

$$0{,}346\,5\ g <> 0{,}346\,5\ \not{g} \times \frac{100\ m}{1\ \not{g}} = 34{,}65\ m$$

$$0{,}346\,5\ g <> 34{,}65\ m$$

$$0{,}346\,5\ g <> 34\ m + \underbrace{0{,}65\ m}_{}$$ *Fracción de minuto*

- Pasamos la fracción de minutos (0,65 m) a segundos.

$$0{,}65\ m <> 0{,}65\ \not{m} \times \frac{100\ s}{1\ \not{m}} = 65\ s \Rightarrow 0{,}65\ m <> 65\ s$$

Luego: $20{,}346\,5\ g <> 20\ g\ 34\ m\ 65\ s$

REGLA PRÁCTICA:

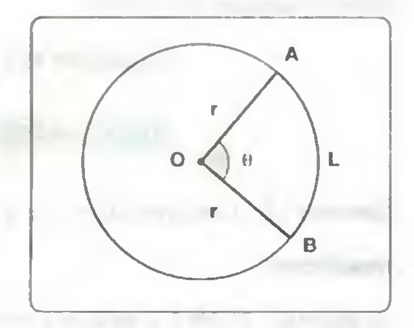
En el sistema centesimal, para hallar los minutos y los segundos, a partir de la coma decimal hacia la derecha se separan en grupo de 2, siendo el primer grupo de 2, los minutos y el segundo grupo de 2, los segundos, veamos:

$$20{,}346\,5\ g <> 20\ g\ \underbrace{34}_{\text{Primer Grupo}}\ m\ \underbrace{65}_{\text{Segundo Grupo}}\ s$$

NOTA: *Esta regla solo se cumple para el sistema centesimal.*

2.1.3 SISTEMA RADIAL (R)

Llamado también sistema circular, es aquel sistema que tiene por unidad de medida el (Radian), que es el ángulo en el centro de una circunferencia cuya longitud de arco es igual a la longitud del radio de la circunferencia.



Si: $L = r \Rightarrow \theta = 1\ rad$

Luego: 1 vuelta $<>$ 2π rad

Nota:

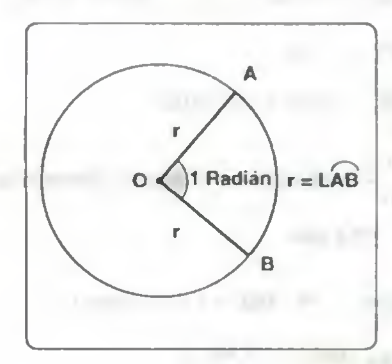
I) Para los cálculos se pueden considerar los valores de π como:

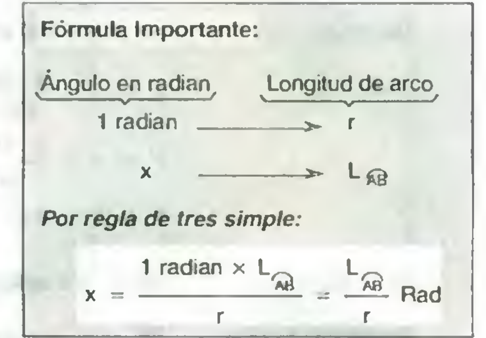
$$\pi = 3{,}141\ 592\ 654 \approx 3{,}141\ 6$$

$$\pi \approx \frac{22}{7} \quad ; \quad \pi \approx \frac{355}{113} \quad ; \quad \pi \approx \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

Estos valores sólo se utilizan cuando el ejercicio (problema) lo da como dato.

II) Definida la unidad Radian se puede calcular la longitud de un arco de circunferencia de la siguiente manera:





Fórmula Importante:

Ángulo en radian	Longitud de arco
1 radian ⟶	r
x ⟶	$L_{\overset{\frown}{AB}}$

Por regla de tres simple:

$$x = \frac{1\ \text{radian} \times L_{\overset{\frown}{AB}}}{r} = \frac{L_{\overset{\frown}{AB}}}{r}\ \text{Rad}$$

Generalizado:

$$\text{Angulo en Radianes} = \frac{\text{Longitud de Arco}}{\text{Longitud de radio}}$$

Así por ejemplo:

$$\underset{\text{(en radianes)}}{\text{Ángulo de 1 vuelta}} = \frac{\text{Longitud de la circunferencia}}{\text{Longitud de radio}} \Rightarrow \underset{\text{(en radianes)}}{\text{Ángulo de 1 vuelta}} = \frac{2\pi \not{r}}{\not{r}}$$

Ángulo de 1 vuelta = 2 π radianes = 2 π rad.

- Para este sistema, emplearemos las siguientes equivalencias:

EQUIVALENCIAS

1 circunferencia <> 2 π rad. 1 circunferencia <> 4 cuadrantes	2 cuadrantes <> $\frac{2\pi}{2}$ rad. <> π rad.
1 cuadrante <> $\frac{2\pi}{4}$ rad. <> $\frac{\pi}{2}$ rad.	3 cuadrantes <> $\frac{3\pi}{2}$ rad.

2.1.4 RELACIÓN ENTRE EL RADIÁN Y EL GRADO SEXAGESIMAL

Para establecer dicha relación se debe recordar lo siguiente:

a) Longitud de la circunferencia ➡ $Lc = 2\pi r$

b) Longitud de la circunferencia expresada en radianes ➡ $Lc = 2\pi$ rad.

c) Longitud de la circunferencia en el sistema sexagesimal ➡ $Lc = 360°$

Por consiguiente de (c) y (b), obtenemos:

$360° <> 2\pi$ rad. (sacamos mitad a cada miembro) $\therefore$ $180° <> \pi$ rad.

De donde: $180° = 180 \times 1° <>$ rad

$$1° <> = \frac{\pi \text{ rad}}{180} \text{ ; (pero: } \pi = 3{,}1416)$$

$$1° <> = \frac{3{,}141\,6}{180} \text{ ; (efectuando la división obtenemos)}$$

$$\therefore \; 1° <> = 0{,}017\;453 \text{ rad.}$$

De la expresión: $180° <> \pi$ radianes ➡ $180° <> \pi$ (1 radian)

De donde: 1 radián: $\frac{180°}{\pi} <> 1$ radián ; pero $\pi = 3{,}141\,6$

$$\frac{180°}{3{,}141\,6} <> 1 \text{ radián ; efectuando la división obtenemos}$$

$57{,}295\,7° <> 1$ radián ➡ $57°17'45" <> 1$ radián

$57{,}295\,7° <> 57°17'45"$ aproximadamente $<> 1$ radián.

Ejercicio 1. Convertir: 144° a radianes

Resolución:

$144° <> 144 \times 1°$ ➡ Pero : $1° <> \frac{\pi}{180°}$ rad

$$144° <> 144 \times \frac{\pi}{180°} \text{ rad}$$

$$\therefore \; 144° <> \frac{4\pi}{5} \text{ rad.}$$ (Se lee: 144° es igual a 4 pi sobre 5 radianes)

> ***NOTA:*** *Para convertir los grados sexagesimales a radianes nos basta multiplicar el número de grados por $\pi/180°$ rad. veamos otros ejemplos:*

Ejercicio ②. Convertir 150° a radianes

Resolución:

$$150° <> 150° \times \frac{\pi}{180°} \text{ rad.} \Rightarrow \therefore \quad 150° <> \frac{5}{6}\pi \text{ rad.}$$

Ejercicio ③. Convertir 42° 36' a radianes

Resolución:

I) Pasamos los 36' a grados sexagesimales

$$36' <> 36' \times 1 \Rightarrow \text{Pero : } 1 <> \frac{1°}{60'}$$

$$36' <> 36' \times \frac{1°}{60'} = \frac{6°}{10} = 0.6° \Rightarrow 36' <> 0{,}6°$$

Luego: $42° \, 36' <> 42{,}6°$ ➡ El número de grados que hemos hallado lo pasamos a radianes

Esta última expresión se puede escribir así:

$42° \, 36' <> (42{,}6) \times 1°$ ➡ pero $1° <> 0{,}017\,453$ rad.

$42° \, 36' <> (42{,}6) \times 0{,}017\,453 \text{ rad.} = 0{,}743\,497\,8$ rad.

$$\therefore \quad 42° \, 36' <> 0{,}743\,497\,8 \text{ rad}$$

Ejercicio ④. Convertir: 38° 19'15" a radianes.

Resolución:

I) Pasamos los 15" a grados sexagesimales

$$15'' <> 15'' \frac{1°}{3\,600''} = 0{,}004\,16° \quad \therefore \quad 15'' <> 0{,}004\,16° \quad \text{...(I)}$$

II) Pasamos los 19' a grados sexagesimales

$$19' <> 19' \times \frac{1°}{60'} = 0{,}316\,66° \quad \therefore \quad 19' <> 0{,}316\,66° \quad \text{...(II)}$$

La expresión 38° 19' 15", se puede escribir así: $38° \, 19' \, 15'' <> 38° + 19' + 15''$ ...(III)

Reemplazamos (I) y (II) en (III):

$38° 19' 15" <> 38° + 0,316\,66° + 0,004\,16°$

$\therefore$ $38° 19' 15" <> 38.32082°$ El número de grados hallados los pasamos a radianes

$38° 19'15" <> 38,320\,82 \times 1°$ ➡ pero $1° <> 0,017\,453$ rad.

$38°19'15" <> 38,320\,82 \times 0,017\,453$ rad.

$\therefore$ $38° 19'15" <> 0,668\,813\,2$ rad.

2.1.5 CONVERSIÓN DE RADIANES A GRADOS SEXAGESIMALES

Ejercicio ⟨1⟩. Convertir: $\frac{2\pi}{3}$ radianes a grados sexagesimales.

Resolución:

$\frac{2\pi}{3}$ rad. $<>$ $\frac{2\pi}{3} \times 1$ rad. ➡ Pero : 1 rad $<>$ $\frac{180°}{\pi}$

$\frac{2\pi}{3}$ rad. $<>$ $\frac{2\pi}{3} \times \frac{180°}{\pi}$ ➡ $\therefore$ $\frac{2\pi}{3}$ rad. $<>$ $120°$

> ***NOTA:*** *Para convertir radianes a grados sexagesimales, basta multiplicar el número de radianes por* $\frac{180°}{\pi}$.

Ejercicio ⟨2⟩. Convertir: $\frac{5\pi}{6}$ radianes a grados sexagesimales

Resolución:

$\frac{5\pi}{6}$ rad. $<>$ $\frac{5\pi}{6} \times \frac{180°}{\pi}$ ➡ $\therefore$ $\frac{5\pi}{6}$ rad. $<>$ $150°$

Ejercicio ⟨3⟩. Expresar: 8,36 radianes en unidades del sistema sexagesimal

Resolución:

La expresión 8,36 rad. se puede escribir así:

8,36 rad. $<>$ $8,36 \times 1$ rad. ➡ pero: 1 rad. $<>$ $57,295\,7°$

8,36 rad. $<>$ $8,36 \times 57,295\,7° = 478,992\,05°$

8,36 rad. $<>$ $478° + \underbrace{0,992\,05°}$

Convertimos a minutos

$8{,}36 \text{ rad.} <> 478° + 0.992\,05° \times \frac{60'}{1°}$

$8{,}36 \text{ rad.} <> 478° + 59{,}523'$

$8{,}36 \text{ rad.} <> 478° + 59' + \underbrace{0{,}523'}$ *Convertimos a segundos*

$8{,}36 \text{ rad.} <> 478° + 59' + 0{,}523' \times \frac{60''}{1'}$

$8{,}36 \text{ rad.} <> 478° + 59' + 31{,}38''$

$8{,}36 \text{ rad.} <> 478° + 59' + 31'' = 478°\,59'\,31''$

NOTA: Para expresar un número no entero de radianes, basta multiplicar el número de radianes por 57,295 7° y luego reducir la parte decimal a minutos y segundos, veamos otro ejercicio.

Ejercicio (4). Expresar: 10,25 radianes en unidades del sistema sexagesimal

Resolución:

$10{,}25 \text{ rad.} <> 10{,}25 \times 1 \text{ rad}$ ➡ Pero: $1 \text{ rad} <> 57{,}295\,7°$

$10{,}25 \text{ rad.} <> 10{,}25 \times 57{,}295\,7° = 587{,}280\,93°$

$10{,}25 \text{ rad.} <> 587° + \underbrace{0{,}280\,93°}$ *Convertimos a minutos*

$10{,}25 \text{ rad.} <> 587° + 0{,}280\,93° \times \frac{60'}{1°}$

$10{,}25 \text{ rad.} <> 587° + 16{,}855\,8'$

$10{,}25 \text{ rad.} <> 587° + 16' + \underbrace{0{,}855\,8'}$ *Convertimos a segundos*

$10{,}25 \text{ rad.} <> 587° + 16' + 0{,}855\,8' \times \frac{60''}{1'}$

$10{,}25 \text{ rad.} <> 587° + 16' + 51{,}348''$

$10{,}25 \text{ rad.} <> 587° + 16' + 51'' = 587°\,16'\,51''$

2.1.6 RELACIÓN ENTRE LOS TRES SISTEMAS DE MEDIDAS ANGULARES

Sean "S", "C" y "R" las medidas de un ángulo en grados sexagesimales, centesimales y radianes, respectivamente. Estos tres números serán diferentes entre si; pero lo que si permanece constante es la relación que nos indica que parte es dicho ángulo, del ángulo de una vuelta.

Siendo: ➡ $\frac{S}{360}$; $\frac{C}{400}$; $\frac{R}{2\pi}$ Estas relaciones deben ser iguales:

Luego: $\dfrac{S}{360} = \dfrac{C}{400} = \dfrac{R}{2\pi}$ Sacamos mitad a cada término de los denominadores

$\therefore \quad \dfrac{S}{180} = \dfrac{C}{200} = \dfrac{R}{\pi}$ ***(Fórmula simplificada)***

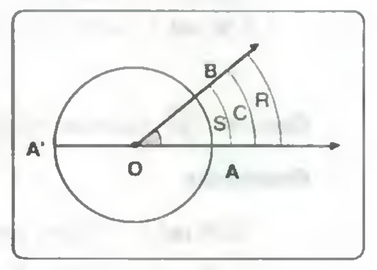
> ***NOTA:*** *Si queremos saber porque se ha obtenido esta fórmula simplificada tomemos de toda una circunferencia la mitad de ella, veamos:*

- Consideremos el arco $\overset{\frown}{AB}$, cuya medida en cada uno de los sistemas es el siguiente:

  $\overset{\frown}{AB}$ = S (Grados Sexagesimales)

  $\overset{\frown}{AB}$ = C (Grados Centesimales)

  $\overset{\frown}{AB}$ = R (Radianes)



- Consideremos también el arco ABA' cuya medida en cada uno de los sistemas es la siguiente

  $\overset{\frown}{ABA'}$ = 180°, en el sistema sexagesimal (S)

  $\overset{\frown}{ABA'}$ = 200 g, en el sistema centesimal (C)

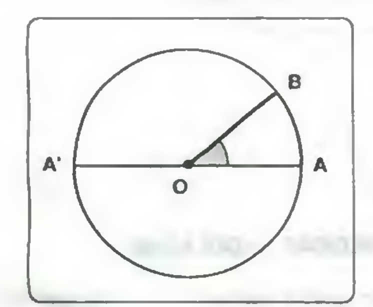
  $\overset{\frown}{ABA'}$ = π rad., en el sistema radial (R)

POR PROPIEDAD EN GEOMETRÍA PLANA, SE SABE QUE:

Los ángulos en el centro de una circunferencia son proporcionales a los arcos intersectados por sus lados. Así por ejemplo:

(Propiedad)

$$\frac{\angle AOB}{\angle AOA'} = \frac{AB}{ABA'}$$



- Aplicamos esta propiedad en las relaciones (I) y (II):

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$$

$$\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi} \qquad\qquad \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$$

Donde: S = Número de grados sexagesimales.
C = Número de grados centesimales.
R = Número de radianes

2.1.7 RELACIÓN ENTRE LOS SISTEMAS SEXAGESIMAL Y CENTESIMAL

De la fórmula: $\dfrac{S}{180} = \dfrac{C}{200} = \dfrac{R}{\pi}$

Obtenemos: $\frac{S}{\cancel{180}} = \frac{C}{\cancel{200}}$; Sacamos 20 ava a cada término de los denominadores.

$\therefore \frac{S}{9} = \frac{C}{10}$; (Donde: 9° < > 10 g)

CONVERSIÓN DE GRADOS CENTESIMALES A SEXAGESIMALES

Ejercicio 1. Convertir: 160 g a grados sexagesimales

Resolución:

En la fórmula: $\frac{S}{9} = \frac{C}{10}$ ➡ Reemplazamos: C = 160 g

Luego: $\frac{S}{9} = \frac{16\cancel{0}}{1\cancel{0}}$ ➡ $\therefore$ S = 144°

Ejercicio 2. Convertir: 28 g 32 min al sistema sexagesimal

Resolución: La expresión: 28 g 32 min se puede escribir así:

28 g 32 min < > 28 g + 32 min — *Convertimos a grados*

28 g 32 min < > 28 g + 32 $\cancel{\text{min}} \times \frac{1\text{ g}}{100\ \cancel{\text{min}}}$

28 g 32 min < > 28 g + 0,32 g = 28,32 g

28 g 32 min < > 28,32 g ➡ $\therefore$ C = 28,32 g

Ahora, convertimos los 28,32 g (Grados Centesimales), al sistema sexagesimal.

Por fórmula:

$\frac{S}{9} = \frac{C}{10}$ ➡ Reemplazamos: C = 28,32 g

$\frac{S}{9} = \frac{28,32}{10}$ ➡ $S = \frac{28,32}{10} \times 9$

S = 25,488° < > 25° + 0,488° — *Convertimos a minutos*

$S = 25° + 0,488° \times \frac{60'}{1°} = 25° + 29,28'$

S = 25° + 29' + 0,28 — *Convertimos a segundos*

$$S = 25° + 29' + 0{,}28' \times \frac{60"}{1'} = 25° + 29' + 16{,}8" \quad \therefore \quad S = 25°29'17"$$

A. CONVERSIÓN DE GRADOS SEXAGESIMALES A CENTESIMALES

***Ejercicio* 1.** Convertir: 135° al sistema centesimal

Resolución:

En la fórmula: $\frac{S}{9} = \frac{C}{10}$ ➡ Reemplazamos: S = 135°

Luego: $\frac{135°}{9} = \frac{C}{10}$ ➡ $\frac{135}{9} \times 10 = C$ ➡ $\therefore$ $150\ g = C$

***Ejercicio* 2.** Convertir 36° 25' al sistema centesimal

Resolución: La expresión se puede escribir así:

$36°25' <> 36° + \underbrace{25'}$ *Convertimos a grados*

$$36°25' <> 36° + 25' \times \frac{1°}{60'} = 36° + 0{,}416\ 7°$$

$36°25' <> 36{,}416\ 7°$ ➡ $S = 36{,}416\ 7°$

Ahora convertimos las 36,416 7° al sistema centesimal.

Por fórmula: $\frac{S}{9} = \frac{C}{10}$ ➡ Reemplazamos: S = 36,416 6°

Luego: $\frac{36{,}416\ 7°}{9} = \frac{C}{10}$ $\quad \frac{36{,}416\ 7°}{9} \times 10 = C$ $\quad \therefore$ $40{,}4630\ g = C$

NOTA: *Para hallar el número de minutos y segundos centesimales a partir de la coma decimal, hacia la derecha se separan en grupos de 2, siendo el primer grupo para los minutos y el segundo grupo para los segundos, veamos como se separan los grupos:*

C = 40,4630 g

Primer Grupo (# de minuto) — 46

Segundo Grupo (# de segundos) — 30

Luego: C = 40 g 46 min 30 seg

TALLER DE EJERCICIOS Nº 3

EJERCICIO 1 : Convertir a grados centesimales:

a) 30 g 30 min 40 s

Resolución:

30 g 30 min 40 s = 30 g + 30 min + 40 s

= 30 g + 0,3 g + 0,004 g

= 30,304 g

∴ 30 g 30 min 40 s = 30,304 g ***Rpta.***

Convertimos: 40 s a grados centesimales.

$$40\ s = 40\ s \times \frac{1\ g}{10\ 000\ s} = 0{,}004\ g$$

∴ 40 s = 0,004 g

Convertimos: 30 min a grados centesimales.

$$30\ min = 30\ min \times \frac{1\ g}{100\ min} = 0{,}3\ g$$

∴ 30 min = 0,3 g

b) 59 g 50 min 56 s

Resolución:

Rpta. 59,505 6 g

c) 82 y 49 min 60 s

Resolución:

Rpta. 82,496 g

EJERCICIO 2 : Convertir a grados, minutos y segundos centesimales:

a) 46,258 3 g

Resolución:

46,258 3 g = 46 g + 0,2583 g

= 46 g + 25,83 min

= 46 g + 25 min + 0,83 min

= 46 g + 25 min + 83 s

∴ 46,258 3 g = 46 g 25 min 83 s ***Rpta.***

Convertimos: 0,258 3 g a minutos centesimales.

$$0{,}2583\ \text{g} = 0{,}2583\ \cancel{\text{g}} \times \frac{100\ \text{min}}{1\ \cancel{\text{g}}} = 25{,}83\ \text{min}$$

$$\therefore\ 0{,}2583\ \text{g} = 25{,}83\ \text{min}$$

Convertimos: 0,83 min a segundos centesimales

$$0{,}83\ \text{min} = 0{,}83\ \cancel{\text{min}} \times \frac{100\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{min}}} = 83\ \text{s}$$

$$\therefore\ 0{,}83\ \text{min} = 83\ \text{s}$$

b) 47,3942 g

Resolución:

Rpta. 47 y 39 min 42 s

c) 103,453 7 g

Resolución:

Rpta. 103 g 45 min 37 s

B. CONVERSIÓN DE RADIANES A GRADOS SEXAGESIMALES

Ejercicio 1. Convertir: $\frac{3\pi}{5}$ rad a grados sexagesimales

Resolución:

Reemplazamos el valor de: $R = \frac{3\pi}{5}$ rad en la fórmula: $\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi}$

Luego: $\frac{S}{180} = \frac{\frac{3\pi}{5}}{\pi} \Rightarrow S = \frac{3}{5} \times 180 \Rightarrow \therefore S = 108°$

MÉTODO PRÁCTICO:

Sabemos que: 180° < > 200 g < > π rad.

Luego, convertimos los π rad. a grados sexagesimales

$$\frac{3\pi}{5} \text{ rad.} = \frac{3}{5}(180°) = 3\,(36°) \Rightarrow \therefore \frac{3\pi}{5} \text{ rad} = 108°$$

C. CONVERSIÓN DE RADIANES A GRADOS CENTESIMALES.

Ejercicio 1. Convertir: $\frac{2\pi}{5}$ rad. a grados centesimales

Resolución:

Reemplazamos el valor de $R = \frac{2\pi}{5}$ rad. en la fórmula: $\frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$

Luego: $\frac{C}{200} = \frac{\frac{2\pi}{5}}{\pi} \Rightarrow C = \frac{2}{5} \times 200 \Rightarrow \therefore C = 80\ g$

MÉTODO PRÁCTICO:

Sabemos que: 180° < > 200 g < > π rad.

Luego, convertimos los $\frac{2\pi}{5}$ rad. a grados centesimales.

$$\frac{2\pi}{5} \text{ rad.} = \frac{2}{5}(200\ g) = 2\,(40\ g) \Rightarrow \therefore \frac{2\pi}{5} \text{ rad} = 80\ g$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 4

EJERCICIO 1 : Convertir a radianes:

a) 480°

Resolución:

$$480° = 480° \times 1$$

$$480° = \cancel{480°} \times \frac{\pi \text{ rad}}{\cancel{180°}}$$

$$\therefore \quad 480° = \frac{8}{3}\pi \text{ rad}$$

Rpta.

Recuerda Que:

$$\frac{S}{180°} = \frac{R}{\pi \text{ rad.}}$$

Donde: 180° < > π rad.

Luego:

$$1 <> \frac{\pi \text{ rad.}}{180°}$$ **(Factor de Conversión)**

b) 160°

Resolución:

Rpta. 8/9 π rad.

c) 45°

Resolución:

Rpta. π/4 rad.

d) 30°

Resolución:

Rpta. π/6 rad.

e) 640°

Resolución:

Rpta. 32/9 π rad.

EJERCICIO 2 : Convertir a radianes.

a) 38°42'

Resolución:

$38°42' = 38° + 42'$

$= 38° + 0,7°$

Luego: $38°42' = \underline{38,7°}$

$38°42' = 0,6754311$ rad.

$38°42' = 0,6754311$ rad. ***Rpta.***

Convertimos: 42' a grados sexagesimales

$$42' = 42' \times \frac{1°}{60'} = 0,7°$$

$$\therefore \quad 42' = 0,7°$$

Convertimos: 38,7° a radianes

$$38,7° = 38,7° \times \frac{\pi rad}{180°} \rightarrow \text{Factor de conversión}$$

$$38,7° = 38,7° \times 0,017\ 453 \text{ rad.}$$

$$\therefore \quad 38,7° = 0,675\ 431\ 1 \text{ rad.}$$

b) 72°28'

Resolución:

Rpta. 1,264 760 rad.

c) 26°20'

Resolución:

Rpta. 0,459 595 rad.

EJERCICIO 3 : Convertir a radianes:

a) 16°20'45"

Resolución:

$16°20'45" = 16° + 20' + 45"$

$= 16° + 0{,}3333° + 0{,}0125°$

$16°20'45" = 16{,}3458°$

$= 16{,}3458° \times \frac{\pi \text{ rad}}{180°}$

$= 16{,}3458 \times 0{,}017453 \text{ rad}.$

$\therefore \quad 16°20'45" = 0{,}285\,283 \text{ rad}.$ *Rpta.*

Convertimos: 45" a grados sexagesimales.

$45" = 45" \times \frac{1°}{3600"} = 0{,}0125°$

$\therefore \quad 45" = 0{,}0125°$

Convertimos: 20' a grados sexagesimales

$20' = 20' \times \frac{1°}{60'} = 0{,}33$

$\therefore \quad 20' = 0{,}3333°$

b) 27°40'36"

Resolución:

Rpta. 0,4830408 rad.

c) 32°72'1080"

Resolución:

Rpta. 0,584 675 5 rad.

EJERCICIO 4 : Convertir a grados sexagesimales

a) $\frac{3\pi}{5}$ rad.

Resolución:

$$\frac{3}{5}\pi \text{ rad} = \frac{3}{5} \times 180° = 108°$$

$$\therefore \quad \frac{3}{5}\pi \text{ rad} = 108° \qquad \textit{Rpta.}$$

b) $\frac{2\pi}{9}$ rad.

Resolución:

c) $\frac{7\pi}{6}$ rad.

Resolución:

d) $\frac{4\pi}{15}$ rad.

Resolución:

EJERCICIO 5 : Convertir a grados sexagesimales.

a) 6,45 rad.

Resolución:

$$6{,}45 \text{ rad.} = 6{,}45 \text{ rad} \times \boxed{\frac{180°}{\pi \text{ rad}}}$$

Factor de Conversión

$$= 6{,}45 \times 57{,}2957°$$

$$= 369{,}557265°$$

$$= 369° + 0{,}557265°$$

$$= 369° + \boxed{33{,}4359'}$$

$$= 369° + 33' + 0{,}4359'$$

$$= 369° + 33' + \boxed{26{,}154''}$$

$$6{,}45 \text{ rad.} = 369°33'26'' \qquad \textit{Rpta.}$$

Convertimos: 0,557 265° a minutos sexag.

$$0{,}557\ 265° = 0{,}557\ 26° \times \frac{60'}{1°}$$

$$\therefore \quad 0{,}557\ 265° = 33{,}4359'$$

Convertimos: 0,4359' a segundos sexag.

$$0{,}4359' = 0{,}4359' \times \frac{60''}{1'}$$

$$\therefore \quad 0{,}4359' = 26{,}154''$$

a) 13,12 rad.

Resolución:

Rpta. 751°43'14"

c) 32,06 rad.

Resolución:

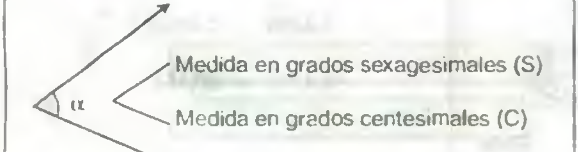
Rpta. 1 836°54'9"

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE LOS SISTEMAS DE MEDIDAS ANGULARES TIPO I.B.M.

Ejercicio 1: Si: "S" y "C" son las medidas de un mismo ángulo en grados sexagesimales y centesimales respectivamente. Hallar la medida en radianes; Si: 3 C - 2 S = 1

A) $\pi/60$ **B)** $\pi/108$ **C)** $\pi/120$ **D)** $\pi/216$ **E)** $\pi/240$

Resolución:



Por dato:

$3C - 2S = 1$ 1

De la fórmula: $\dfrac{S}{180}=\dfrac{C}{200}=\dfrac{R}{\pi}$ → $S=\dfrac{180\ R}{\pi}$; $C=\dfrac{200\ R}{\pi}$ ... 2

Reemplazamos (2) en (1): $3\left(\dfrac{200\ R}{\pi}\right)-2\left(\dfrac{180\ R}{\pi}\right)=1$

$$\frac{600\ R}{\pi}-\frac{360\ R}{\pi}=1 \Rightarrow \frac{600\ R-360\ R}{\pi}=1$$

despejando "R"; obtenemos: $\therefore\quad R=\dfrac{\pi}{240}\ \text{rad.}$ ***Rpta. E***

Ejercicio 2: Determine la medida de un ángulo, tal que se verifique la relación:

$$\frac{SC}{C^2+S^2}=\frac{9}{181}(C-S)$$

A) $\pi/3$ rad. **B)** $\pi/4$ rad. **C)** $\pi/2$ rad. **D)** $\pi/5$ rad. **E)** $\pi/6$ rad.

Resolución:

• **De la fórmula:** $\dfrac{S}{180}=\dfrac{C}{200}=\dfrac{R}{\pi}$ → $S=\dfrac{180\ R}{\pi}$; $C=\dfrac{200\ R}{\pi}$ ... 1

Reemplazamos los valores de la expresión (1), en la expresión (condición); obteniendo:

$$\frac{\left(\dfrac{180\ R}{\pi}\right)\cdot\left(\dfrac{200\ R}{\pi}\right)}{\left(\dfrac{200\ R}{\pi}\right)^2+\left(\dfrac{180\ R}{\pi}\right)^2}=\frac{9}{181}\left(\frac{200\ R}{\pi}-\frac{180\ R}{\pi}\right)$$

$$\frac{180\times 200\left(\dfrac{R}{\pi}\right)\left(\dfrac{R}{\pi}\right)}{\left(\dfrac{40\ 000\ R^2}{\pi^2}+\dfrac{32\ 400\ R^2}{\pi^2}\right)}=\frac{9}{181}\left(\frac{20\ R}{\pi}\right)$$

$$\frac{36\,000\,\frac{R^2}{\pi^2}}{72\,400\,\frac{R^2}{\pi^2}} = \frac{9}{181}\left(\frac{20\,R}{\pi}\right);\ \text{Simplificando}$$

En el primer miembro; obtenemos: $\frac{360}{724} = \frac{180}{181}\left(\frac{R}{\pi}\right)$; despejamos "R"

$$R = \frac{360}{724}\cdot\frac{181\,\pi}{180} \Rightarrow \therefore\ R = \frac{\pi}{2}\ \text{rad.}$$ **Rpta. C**

Ejercicio 3: Al convertir: $\frac{16x}{9}\pi$ radianes al sistema sexagesimal, se obtuvo 640°. Hallar el valor de: x^x

A) 2 B) 9 C) 40 D) 16 E) 4

Resolución:

Del enunciado; obtenemos que: $\frac{16x}{9}\ \pi\ \text{rad} = 640°$; pero : π rad. < > 180°

$\frac{16x}{9}\ (180°) = 640°$; despejamos "x"

$$x = \frac{640°\cdot 9}{16\cdot 180°} = \frac{40}{20} = 2 \Rightarrow \therefore\ x = 2$$

Luego: $x^x = 2^2 = 4 \Rightarrow \therefore\ x^x = 4$ **Rpta. E**

Ejercicio 4: Hallar el ángulo en radianes que satisface: $1 + \frac{S}{3} + \frac{C}{2} = \frac{160\,R}{\pi} + R$

Donde: S, C y R representan el número de grados sexagesimales, centesimales y radianes respectivamente.

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 2 E) 1

Resolución:

Sabemos que: $\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$ — $S = \frac{180\,R}{\pi}$; $C = \frac{200\,R}{\pi}$

Los valores hallados los reemplazamos en la expresión:

$$1+\frac{S}{3}+\frac{C}{2}=\frac{160\ R}{\pi}+R \Rightarrow 1+\frac{\frac{180\ R}{\pi}}{3}+\frac{\frac{200\ R}{\pi}}{2}=\frac{160\ R}{\pi}+R$$

$$1+\frac{60\ R}{\pi}+\frac{100\ R}{\pi}=\frac{160\ R}{\pi}+R \Rightarrow 1+\frac{160\ R}{\pi}=\frac{160\ R}{\pi}+R \quad \therefore \quad \boxed{R=1}$$ ***Rpta. E***

Ejercicio 5: Se ha medido un ángulo en los sistemas conocidos, en grados y radianes, resultando: $S = 2R + x$, y $C = 3R + x$. Hallar "x"

A) 4R **B)** 5R **C)** 6R **D)** 7R **E)** 8R

Resolución:

Hacemos que: $S = 2R + x$ ... 1 $C = 3R + x$ ... 2

Sabemos por fórmula: $\frac{S}{9}=\frac{C}{10}$ ... 3

Reemplazamos (1) y (2) en (3):

$$\frac{2\ R+x}{9}=\frac{3\ R+x}{10}$$

$$10\ (2\ R+x)=(3\ R+x)$$

$$20\ R+10x=27\ R+9x$$

$$\therefore \quad \boxed{x=7\ R}$$ ***Rpta. D***

Ejercicio 6: Se mide un ángulo en los sistemas conocidos, en grados y radianes (S, C y R). Hallar "m", si:

$m\ (C + S) = n\ (C - S)$ ... 1 y $m + n = 760$ ... 2

A) 2 (200 - π) **B)** 2 (200 + π) **C)** 38 **D)** 200 + π **E)** 200 π

Resolución:

De la expresión (1): $m\ (C + S) = n\ (C - S)$ obtenemos: $\frac{m}{n}=\frac{C-S}{C+S}$ ... 3

Por fórmula: $\frac{S}{180}=\frac{C}{200}=\frac{R}{\pi}$ → $S=\frac{180\ R}{\pi}$; $C=\frac{200\ R}{\pi}$ ... 4

Los valores de (4), los reemplazamos en (3):

$$\frac{m}{n} = \frac{\frac{200\ R}{\pi} - \frac{180\ R}{\pi}}{\frac{180\ R}{\pi} + \frac{200\ R}{\pi}} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{\frac{20\ R}{\pi}}{\frac{380\ R}{\pi}}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{19} \Rightarrow n = 19\ m \quad ...\ 5$$

Reemplazamos (5) en (2):

$$m + n = 760$$

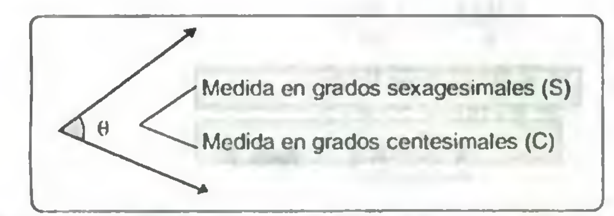
$$m + 19m = 760 \Rightarrow 20m = 760$$

$$m = \frac{760}{20} \Rightarrow \boxed{m = 38}$$ ***Rpta. C***

Ejercicio 7: Se mide un ángulo en grados sexagesimales y centesimales, los números hallados sumados resulta 180. Hallar el ángulo en radianes

A) $\frac{14\pi}{19}$ B) $\frac{12\ \pi}{19}$ C) $\frac{11\ \pi}{19}$ D) $\frac{10\ \pi}{19}$ E) $\frac{9\ \pi}{19}$

Resolución:



Por dato:

$$S + C = 180 \quad ...\ 1$$

De la fórmula: $\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$

$$S = \frac{180\ R}{\pi}$$

$$C = \frac{200\ R}{\pi} \quad ...\ 2$$

Reemplazamos en (2) en (1):

$$\frac{180\ R}{\pi} + \frac{200\ R}{\pi} = 180$$

$$\frac{380\ R}{\pi} = 180$$

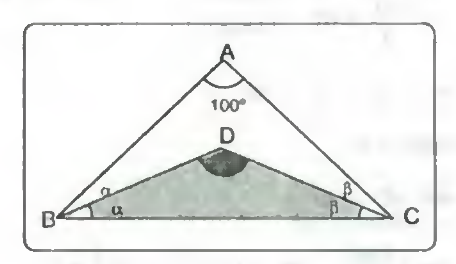
$$\therefore \quad \boxed{R = \frac{180\ \pi}{380} = \frac{9\ \pi}{19}}$$ ***Rpta. E***

Ejercicio 8: Si: $\overline{BD}$ y $\overline{CD}$ son bisectrices, hallar D en radianes.

A) $\frac{14\pi}{17}$ B) $\frac{3}{5}\pi$ C) $\frac{5\pi}{9}$

D) $\frac{2}{3}\pi$ E) $\frac{7\pi}{9}$

Resolución:



- En el Δ ABC:

Σ 3 ángulo internos = 180° ... (Propiedad)

$$2\alpha+2\beta+100° = 180°$$
$$2\alpha+2\beta = 80°$$
$$2(\alpha+\beta) = 80°$$

$$\alpha+\beta = \frac{80°}{2} = 40° \Rightarrow \therefore \ \alpha+\beta = 40° \quad ...1$$

- En el Δ BDC: Σ 3 ángulos internos = 180° ...(Propiedad)

$$\alpha+\hat{D}+\beta = 180° \Rightarrow \hat{D}+(\alpha+\beta) = 180° \quad ...2$$

Reemplazamos (1) en (2): $\hat{D}+40° = 180°$

$\hat{D} = 140°$ (Convertimos los grados a radianes)

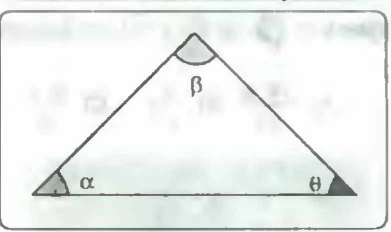
$$\hat{D} = 140° \times \frac{\pi \text{ rad}}{180°} \Rightarrow \hat{D} = \frac{7}{9}\pi \text{ rad.}$$ ***Rpta. E***

Ejercicio 9: En un triángulo sus ángulos están en progresión artimética de razón 20°. Hallar la diferencia del mayor y menor en radianes.

A) $\frac{2\pi}{9}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{9}$ D) $\frac{5\pi}{18}$ E) $\frac{\pi}{4}$

Resolución:

- Como los tres ángulos del triángulo, están en progresión aritmética de razón 20° estos estarán representados de la siguiente manera:



Primer angulo : α (ángulo menor)

Segundo ángulo : $\beta = \alpha + 20°$

Tercer angulo : $\theta = \alpha + 40°$ (ángulo mayor)

Por propiedad : $\alpha + \beta + \theta = 180°$

Luego: $\alpha + (\alpha + 20°) + (\alpha + 40°) = 180°$

$$3\alpha + 60° = 180° \Rightarrow 3\alpha = 180° - 60°$$

$$3\alpha = 120° \Rightarrow \alpha = \frac{120°}{3} = 40° \quad \begin{cases}\text{ángulo}\\ \text{menor}\end{cases}$$

Ahora, calculamos el valor del ángulo mayor: $\alpha + 40° = 40° + 40° = 80°$

$\therefore$ Ángulo mayor = 80°

Incógnita. Ángulo mayor - Ángulo menor = 80° - 40° = 40°

- Convertimos los 40° a radianes, veamos: $40° = 40° \times \frac{\pi\,\text{rad.}}{180°}$ ➡ $40° = \frac{2}{9}\pi$ rad. ***Rpta. a***

Ejercicio 10: Se ha medido un ángulo en grados S; grados C y en radianes (Resulta R). Hallar lo que mide dicho ángulo en radianes Sí: $2S - C = 2R^2$.

A) π **B)** 80 **C)** $\frac{180}{\pi}$ **D)** $\frac{80}{\pi}$ **E)** $\frac{8}{\pi}$

Resolución:

Por fórmula: $\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$ → $S = \frac{180\,R}{\pi}$; $C = \frac{200\,R}{\pi}$

Los valores hallados, los reemplazamos en la expresión.

$$2S - C = 2R^2 \Rightarrow 2\left(\frac{180\,R}{\pi}\right) - \left(\frac{200\,R}{\pi}\right) = 2R^2$$

$$\frac{160\,R}{\pi} = 2R^2 \Rightarrow \frac{80}{\pi} = R \quad \therefore \quad R = \frac{80}{\pi}\text{rad.}$$ ***Rpta. D***

Ejercicio 11: Sabiendo que: $\pi/11$ rad. equivale a $A^{g}B'C''$. Calcular "C - A - B"

A) 6 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 14

Resolución:

Por condición: $\frac{\pi \text{ rad}}{11} <> A°B'C"$ Pero : π rad $<>$ 180°

$\frac{180°}{11} <> A°B'C"$ ... 1

Efectuamos la división: ➡

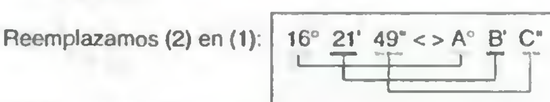
```
180° |_11__
11     16°
-70°
 66°
   4° = 4 x 1° = 4 x 60' = 240'
```

```
240' |_11__
22     21'
-20'
 11'
   9' = 9 x 1' = 9 x 60" = 540"
```

```
540" |_11__
44     49"
100"
 99"
   1"
```

Luego: $\frac{180°}{11} = 16°21'49"$ ... 2

Reemplazamos (2) en (1):



Donde: A = 16

B = 21

C = 49

$\therefore$ $C - A - B = 12$ ***Rpta. D***

Ejercicio 12: Calcular un ángulo en radianes, siendo S y C los números de grados además:

$$(C+S)^2-(C-S)^2 = \frac{C+S}{C-S}+21$$

A) $\frac{\pi}{10}$ B) $\frac{\pi}{15}$ C) $\frac{\pi}{20}$ D) $\frac{\pi}{30}$ E) $\frac{\pi}{60}$

Resolución:

Desarrollamos cada binomio al cuadrado, obteniendo:

$$(C+S)^2-(C-S)^2 = \frac{C+S}{C-S}+21$$

$$\left(C^2+2CS+S^2\right)-\left(C^2-2CS+S^2\right) = \frac{C+S}{C-S}+21$$

$$\cancel{C^2}+2CS+\cancel{S^2}-\cancel{C^2}+2CS-\cancel{S^2} = \frac{C+S}{C-S}+21$$

$$4CS = \frac{C+S}{C-S}+21 \quad \ldots 1$$

Por fórmula: $\dfrac{S}{180} = \dfrac{C}{200} = \dfrac{R}{\pi}$ → $S = \dfrac{180\,R}{\pi}$; $C = \dfrac{200\,R}{\pi}$

Los valores hallados, los reemplazamos en (1):

$$4\left(\frac{200\,R}{\pi}\right)\cdot\left(\frac{180\,R}{\pi}\right) = \frac{\left(\frac{200\,R}{\pi}+\frac{180\,R}{\pi}\right)}{\left(\frac{200\,R}{\pi}-\frac{180\,R}{\pi}\right)}+21$$

$$\frac{4\times200\times180\,R^2}{\pi^2} = \frac{\left(\frac{380\,R}{\pi}\right)}{\left(\frac{20\,R}{\pi}\right)}+21 \Rightarrow \frac{4\times200\times180\,R^2}{\pi^2} = 19+21$$

$$\frac{4\times200\times180\,R^2}{\pi^2} = 40 \Rightarrow \frac{3\,600\,R^2}{\pi^2} = 1$$

Luego: $R^2 = \dfrac{\pi^2}{3\,600}$; extraemos raíz cuadrada a ambos miembros:

$$\sqrt{R^2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{3\,600}} \Rightarrow \therefore\ R = \frac{\pi}{60}\text{rad.}$$

Rpta. E

Ejemplo 13: Si se cumple que: $S = 36\left(x-\dfrac{1}{\pi}\right)$ y $C = 10\left(x+\dfrac{1}{\pi}\right)$

Donde S y C representan el número de grados sexagesimales y centesimales de un ángulo respectivamente. Halle el equivalente en radianes

A) $\dfrac{3}{15}$ B) $\dfrac{2}{15}$ C) $\dfrac{24}{15}$ D) $\dfrac{1}{13}$ E) N.A.

Resolución:

Hacemos que: $S = 36\left(x-\dfrac{1}{\pi}\right)$ ... I $C = 10\left(x+\dfrac{1}{\pi}\right)$ ... II

Por fórmula: $\dfrac{S}{9} = \dfrac{C}{10}$ ... III

Reemplazamos (I) y (II) en (III):

$$\frac{36\left(x-\frac{1}{\pi}\right)}{9}=\frac{10\left(x+\frac{1}{\pi}\right)}{10} \Rightarrow 4\left(x-\frac{1}{\pi}\right)=\left(x+\frac{1}{\pi}\right)$$

$$4x-\frac{4}{\pi}=x+\frac{1}{\pi} \Rightarrow 4x-x=\frac{1}{\pi}+\frac{4}{\pi} \Rightarrow 3x=\frac{5}{\pi} \quad \therefore \quad x=\frac{5}{3\pi} \quad \ldots \text{IV}$$

Reemplazamos (IV) en (I): $S=36\left(\frac{5}{3\pi}-\frac{1}{\pi}\right)=36\left(\frac{5-3}{3\pi}\right) \quad \therefore \quad S=\left(\frac{24°}{\pi}\right)$

Convertimos el número de grados sexagesimales a radianes.

Por fórmula: $\boxed{\frac{S}{180}=\frac{C}{200}=\frac{R}{\pi}}$ Donde: $\frac{S}{180}=\frac{R}{\pi} \Rightarrow R=\frac{S\pi}{180} \quad \ldots \text{V}$

Reemplazamos el valor de "S", en esta última expresión:

$$R=\frac{\left(\frac{24}{\pi}\right)\times\pi}{180}=\frac{2}{15} \Rightarrow \quad \therefore \quad \boxed{R=\frac{2}{15}\text{ rad.}}$$

Rpta. B

Ejercicio 14: Calcular, "n" Si: $\underbrace{C+S+C+S+C+S+\ldots\ldots+C+S}_{\text{"2n" sumandos}}=3\,800\,\frac{R}{\pi}$

A) 1 B) 10 C) 30 D) 40 E) 50

Resolución:

Como en el primer número de la expresión hay "2n" sumandos, esto quiere decir que hay mitad de término para cada sistema, o sea:

$$\underbrace{C+C+C+\ldots\ldots+C}_{\text{"n" sumandos}}+\underbrace{S+S+S+\ldots\ldots+S}_{\text{"n" sumandos}}=3\,800\,\frac{R}{\pi}$$

$$Cn+Sn=3\,800\,\frac{R}{\pi}$$

$$n(C+S)=3\,800\,\frac{R}{\pi} \quad \ldots \text{I}$$

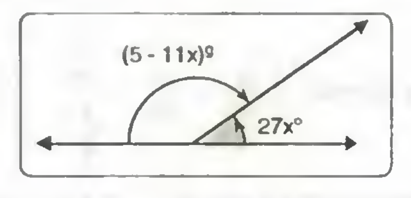
De la fórmula: $\dfrac{S}{180} = \dfrac{C}{200} = \dfrac{R}{\pi}$ → $S = \dfrac{180\ R}{\pi}$; $C = \dfrac{200\ R}{\pi}$

Los valores, hallados los reemplazamos en I :

$$n\left(\frac{200\ R}{\pi} + \frac{180\ R}{\pi}\right) = 3\ 800\ \frac{R}{\pi} \Rightarrow n\left(\frac{380\ R}{\pi}\right) = \frac{3\ 800\ R}{\pi}$$

$$n = \frac{3\ 800}{380} \Rightarrow \therefore\ n = 10$$ ***Rpta. B***

Ejercicio ***:*** De la figura mostrada, calcular "x".

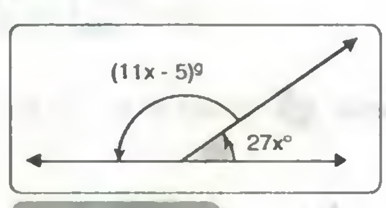


A) 2 B) 3
C) 4 D) 5
E) 6

Resolución:

- Como se podrá observar el ángulo $(5 - 11x)^g$; gira en sentido horario si le cambiamos de sentido el ángulo sería: $(11x - 5)^g$ (Sentido Antihorario).

- De la figura:



$$(11x - 5)^g + 27x^\circ = 180^\circ$$

convertimos al Sistema Sexagesimal

$$(11x - 5)^g \times 1 + 27x^\circ = 180^\circ$$

$$(11x - 5)^g \times \frac{9^\circ}{10^g} + 27x^\circ = 180^\circ$$

$$99x^\circ - 45^\circ + 270x^\circ = 1\ 800^\circ$$

$$369x^\circ = 1\ 845^\circ$$

$$\therefore\ x = 5$$ ***Rpta. D***

Recordemos que:

$9^\circ <> 10^g$

donde: $1 <> \dfrac{9^\circ}{10^g}$

Ejercicio 16 ***:*** Hallar la medida en el sistema internacional si se sabe que se cumple:

$$S = x^2 + 11 \quad y \quad C = 9x - 5$$

A) $\dfrac{\pi}{6}$ rad. B) $\dfrac{\pi}{5}$ rad. C) $\dfrac{-\pi}{6}$ rad. D) $\dfrac{2\pi}{3}$ rad. E) $\dfrac{2\pi}{5}$ rad.

Resolución:

Sabemos que: $\frac{S}{C} = \frac{9}{10}$; Reemplazando valores en esta expresión; obtenemos:

$$\frac{x^2+11}{9x-5} = \frac{9}{10} \Rightarrow 10(x^2+11) = 9(9x-5)$$

$$10x^2+110 = 81x-45$$

$$10x^2-81x+155 = 0$$

Factorizamos por el Método del Aspa:

$$\begin{matrix} 10x & & -31 \\ x & & -5 \end{matrix}$$

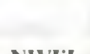
donde: $(10x-31)(x-5)=0$;   **i)** $10x-31=0$;   **ii)** $x-5=0$

igualamos cada factor a cero. $\therefore\ x=\frac{31}{10}$ $\therefore\ x=5$

• Tomamos el valor de $x=5$; en la expresión $S=x^2+11$; obteniendo: $S=5^2+11 \Rightarrow S=36^\circ$;

Ahora, convertimos los 36° a radianes **(Sistema Internacional)**; Veamos:

(Fórmula) $\frac{S}{180^\circ} = \frac{R}{\pi\ rad.} \Rightarrow \frac{36^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi\ rad.} \quad \therefore\ R=\frac{\pi}{5}rad$ ***Rpta. B***



EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE LOS SISTEMAS DE MEDIDAS ANGULARES

NIVEL I

Ejercicio 1: Se ha medido un ángulo en grados S; grados C; y radianes R. Calcular dicho ángulo en radianes; Si: $\frac{S}{9} = \frac{C}{10} = 8$

A) $\frac{2\pi}{3}$ **B)** $\frac{\pi}{2}$ **C)** $\frac{\pi}{4}$ **D)** $\frac{2\pi}{5}$ **E)** $\frac{\pi}{6}$

Ejercicio 2: Simplificar:

$$M = \frac{180\ (C+S)\ (C-S)}{19\ SC}$$

A) 1 **B)** 1,5 **C)** 2 **D)** 2,5 **E)** 3

Ejercicio 3: Si:

S = # de grados sexag. de un ángulo
C = # de grados centes. de un mismo ángulo

Además: $\frac{200}{S} + \frac{180}{C} = 1$; Calcular el valor de S.

A) 360° **B)** 362° **C)** 180° **D)** 182° **E)** 92°

Ejercicio 4: Siendo S y C las medidas de un ángulo en grados sexag. y centes. respectivamente. Hallar dicho ángulo en radianes Si:

$$\frac{1}{S}+\frac{1}{C}=\frac{19}{18}$$

A) $0{,}05\,\pi$ B) $0{,}04\,\pi$ C) $0{,}03\,\pi$
D) $0{,}02\,\pi$ E) $0{,}01\,\pi$

Ejercicio 6: Calcular el valor de:

$$Q=\frac{40^g+\dfrac{\pi}{3}\text{ rad.}}{6^\circ+\dfrac{\pi}{10}\text{ rad.}}$$

A) 1 B) 2
C) 3 D) 4
E) 5

Ejercicio 7: Un ángulo mide $(x - 1)^\circ$ pero en grados centesimales $(x + 1)$. Hallar el valor de "x".

A) 17 B) 19 C) 21 D) 23 E) 25

Ejercicio 7: Reducir la expresión:

$$P=\frac{(C+S)^2+(C-S)^2}{(C+S)^2-(C-S)^2}$$

A) 10/9 B) 100/81 C) 181/180
D) 90/181 E) 181/19

Ejercicio 8: Halle el ángulo en radianes tal que cumpla las relaciones:

$$S = 2n + 2 \quad y \quad C = 3n - 4$$

A) $\pi/7$ B) $\pi/4$ C) $\pi/5$ D) $\pi/3$ E) $\pi/10$

Clave de Respuestas

1. D	2. C	3. B	4. E
5. D	6. B	7. C	8. E

NIVEL II

Ejercicio 1: Hallar: "α"; si:

$$4\alpha = 250^g - \frac{11}{10}\pi \text{ rad.}$$

A) 6°30' B) 6°45' C) 6°50' D) 6°25' E) 6°05'

Ejercicio 2: Hallar "α" en radianes; si:

$$\alpha = (10^\circ + 9^g)\,(1\,800)$$

A) $177\,\pi$ B) $178\,\pi$ C) $179\,\pi$ D) $180\,\pi$ E) $181\,\pi$

Ejercicio 3: Determine la medida circular del ángulo que cumple:

$$S = 2x^x \quad y \quad C = x^x + 11$$

A) $\frac{\pi}{6}$ rad. B) $\frac{\pi}{18}$ rad. C) $\frac{\pi}{15}$ rad.
D) $\frac{\pi}{10}$ rad. E) $\frac{\pi}{5}$ rad.

Ejercicio 4: Calcular un ángulo en radianes.

Si: $6S + 5C = 1\,040$

A) $\pi/4$ B) $\pi/5$ C) $\pi/3$ D) $\pi/2$ E) π

Ejercicio 5: Los ángulos de un triángulo son: $15x^\circ$; $10x^g$ y $\frac{\pi x}{30}$ rad. Determine según esto el valor de "x".

A) 4 B) 2 C) 3 D) 6 E) 5

Ejercicio 6: Reducir la expresión:

$$P=\frac{\dfrac{\pi\ S}{3}+40\ R}{\dfrac{\pi\ C}{10}+30\ R}$$

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Ejercicio 7: Calcular el valor de:

$$M=\frac{1^m}{1'}+\frac{1^g}{1^\circ}$$

A) 1,24 B) 1,34 C) 1,44 D) 2,24 E) 2,34

Ejercicio : Calcular el valor de:

$$Q = \left[\left(\frac{C+S}{38}\right)+\left(\frac{C-S}{2}\right)\right] : \frac{R}{\pi}$$

A) 10 **B)** 15 **C)** 18 **D)** 20 **E)** 25

Ejercicio : Hallar el valor de:

$$N = \sqrt{\frac{C+S}{C-S}+6} + \sqrt[3]{\frac{C+S}{C-S}+8}$$

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 8 **E)** 9

Ejercicio : Señale el menor ángulo que satisface a:

$A + B = 70°$; $B + C = 60^g$; $A + C = \pi/5$ rad.

A) 26° **B)** 10° **C)** $\frac{\pi}{10}$ rad.

D) $\frac{\pi}{16}$ rad. **E)** 2°

Ejercicio : Halle el ángulo en radianes tal que cumpla con:

$$\frac{C+S}{C-S} = \frac{2\pi+3R}{2\pi-3R}$$

A) $\frac{2\pi}{3}$ rad. **B)** $\frac{3}{2}$ πrad. **C)** $\frac{2}{5}$ πrad.

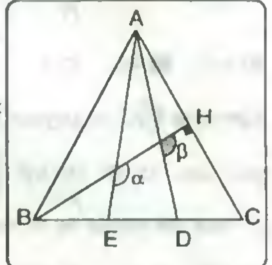
D) $\frac{5}{3}$ πrad. **E)** $\frac{3}{5}$ πrad.

Ejercicio : La figura es un triángulo equilátero, AD y AE dividen al vértice "A" en tres ángulos iguales. Hallar: $(\alpha + \beta)$ en radianes.

A) $\frac{7}{6}\pi$ **B)** $\frac{5}{4}\pi$

C) $\frac{4}{3}\pi$ **D)** $\frac{11}{8}\pi$

E) $\frac{17}{12}\pi$



Clave de Respuestas

1. B	2. E	3. D	4. D
5. D	6. D	7. C	8. D
9. D	10. B	11. E	12. C

NIVEL III

Ejercicio : Convertir: 36°36'36" a unidades del sistema centesimal.

A) $40^g67^m78^s$ **B)** $40^g78^m67^s$
C) $40^g78^m67^s$ **D)** $40^g68^m76^s$
E) $40^g76^m67^s$

Ejercicio : Convertir: $8\,000^m + 800^s$ a unidades del sistema sexagesimal.

A) 72°04'19" **B)** 72°02'19"
C) 72°42'04" **D)** 72°04'42"
E) 72°02'42"

Ejercicio : Siendo "S" y "C" lo convencional. Calcular el ángulo en radianes si:

$$\sqrt{\frac{2S-C}{10}} = 2$$

A) $\frac{\pi}{2}$ rad. **B)** $\frac{\pi}{3}$ rad. **C)** $\frac{\pi}{4}$ rad.

D) $\frac{\pi}{6}$ rad. **E)** $\frac{\pi}{5}$ rad.

Ejercicio : Siendo "S" y "C" los números de grados sexagesimales y centesimales de un mismo ángulo. Calcular:

$$Q = \frac{S^2 + C^2 + S \cdot C}{S \cdot C} - \frac{1}{90}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Ejercicio 5: Siendo "S"; "C" y "R" las medidas de un ángulo en los sistemas sexagesimal; centesimal y radial. Hallar un ángulo en radianes si cumple con: $\frac{2\pi}{R} + \frac{180}{S} = \frac{C+200}{C}$

A) $\pi/2$ B) 4π C) π D) 8π E) 2π

Ejercicio 6: Los ángulos internos de un triángulo son: $(15K)°$; $(40K)^g$; $\left(\frac{K\pi}{20}\right)$rad. Calcular el valor del menor de dichos ángulos.

A) 48° B) 45° C) 36° D) 53° E) 28°

Ejercicio 7: Determine la medida circular de un ángulo, si se cumple que:

$$\pi\left(\frac{C+S}{C-S}\right) = 16\frac{R^2}{\pi} - 17\pi$$

A) $\pm\frac{2}{3}\pi$ rad. B) $\pm\frac{2}{5}\pi$ rad. C) $\pm\frac{3}{4}\pi$ rad.
D) $\pm\frac{3}{2}\pi$ rad. E) $\pm\frac{3}{8}\pi$ rad.

Ejercicio 8: Calcular el valor de:

$$R = \frac{1^g}{4^m} + \frac{1°}{3'} + \frac{54'}{25^m}$$

A) 45 B) 47 C) 49 D) 53 E) 58

Ejercicio 9: "K" es el número de grados sexagesimales que contiene el ángulo 1,35 π rad. "M" es el número de grados centesimales que contiene el ángulo 1,45 π rad. Calcular: (M - K).

A) 45 B) 47 C) 49 D) 52 E) 56

Ejercicio 10: El número de grados sexagesimales (S) y el número de grados centesimales (C) que contiene un ángulo satisfacen la siguiente igualdad.

$C = S + 2\sqrt{S}$; Calcular el valor del ángulo en radianes.

A) $\frac{3}{2}$ πrad. B) $\frac{9}{4}$ πrad. C) $\frac{7}{4}$ πrad.
D) $\frac{9}{5}$ πrad. E) $\frac{8}{3}$ πrad.

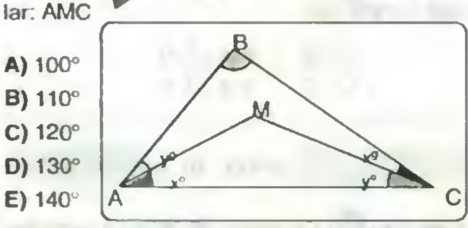
Ejercicio 11: Si: $A_n = \frac{\pi}{n}$ rad.; $B_n = (n^n)°$ y $C_n = (10\,n)^g$. ¿Cuál o cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

I. $A_3 > B_3 + C_3$ II. $A_4 + B_2 > C_5$
III. $A_8 - 3B_1 = C_3$

A) I y II B) II y III C) I y III
D) Los tres E) Ninguno

Ejercicio 12: Del gráfico: $\hat{ABC} = 85°$; Calcular: $\hat{AMC}$

A) 100°
B) 110°
C) 120°
D) 130°
E) 140°



Ejercicio 13: Un ángulo "α" es medido por tres alumnos, obteniendo los siguientes resultados:

- El primer alumno obtuvo $(S)°$
- El segundo alumno obtuvo $(A)'$
- El tercer alumno obtuvo $(B)^m$

Calcular el valor de: $M = \frac{2}{3}\left(\frac{S^2}{A \cdot B}\right)$

A) 10^{-2} B) 10^{-4} C) 10^{-3} D) 10^{-6} E) 10^{-5}

Ejercicio : El número de grados sexagesimales (S) y el número de grados centesimales (C) que contiene un mismo ángulo se expresan de la siguiente forma:

$S = 6x^2 + 3 \wedge C = 30x + 20$; indicar el ángulo en radianes.

A) $\frac{17}{10}\pi rad.$ B) $\frac{19}{20}\pi rad.$ C) $\frac{17}{20}\pi rad.$

D) $\frac{27}{40}\pi rad.$ E) $\frac{\pi}{10}$ rad.

Ejercicio : Determine la medida circular de un ángulo si se tiene que el cuadrado de la diferencia de los números de grados sexagesimales y centesimales de dicho ángulo, es a la suma de dichos números como 5 es a 19.

A) $\frac{\pi}{6}$ rad. B) $\frac{\pi}{5}$ rad. C) $\frac{\pi}{3}$ rad.

D) $\frac{\pi}{4}$ rad. E) $\frac{\pi}{2}$ rad.

Ejercicio : En la expresión:

$$5S\sqrt{S} - 3\sqrt[4]{S^3} = 296$$

Sabiendo que "S" representa un número entero de grados sexagesimales que posee un ángulo; hallar dicho ángulo en radianes.

A) $\frac{4\pi}{45}$ B) $\frac{7\pi}{45}$ C) $\frac{3\pi}{23}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{6}$

Ejercicio : Si los números de grados sexagesimales (S) y centesimales (C) que contiene un ángulo, se relacionan del siguiente modo:

$$C - S = x + \frac{1}{x};\ x \in IR^+$$

¿Cuál es la medida del menor ángulo que verifica la condición anterior?

A) $\frac{\pi}{2}$ rad. B) $\frac{\pi}{20}$ rad. C) $\frac{\pi}{40}$ rad.

D) $\frac{\pi}{10}$ rad. E) $\frac{\pi}{60}$ rad.

Ejercicio : Se ha medido un ángulo en grados S y C respectivamente. Los número hallados satisfacen la igualdad.

$$19(C^2 + S^2) = 181K(C^2 - S^2)$$

Hallar el valor de "K".

A) π^2 B) π C) 1/2 D) 2 E) 1

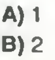
Ejercicio : Siendo: "a" el número de minutos sexagesimales y "b" el número de minutos centesimales que mide el mismo ángulo. Calcular el valor de dicho ángulo en radianes, sabiendo que: $a = 27x$; $b = 25(x + 4)$

A) $\frac{\pi}{60}$ B) $\frac{\pi}{20}$ C) $\frac{\pi}{30}$ D) $\frac{\pi}{50}$ E) $\frac{\pi}{100}$

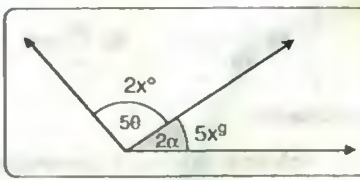
Ejercicio : Dada la relación:

$\frac{3\pi\ \theta}{4} + \pi\alpha = 90°$ y además se tiene el gráfico.

Calcular el valor de: $E = \frac{60}{\pi x} + \frac{S}{3C}$



A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



Clave de Respuestas

1. A	2. A	3. C	4. C
5. E	6. B	7. D	8. C
9. B	10. D	11. C	12. D
13. B	14. C	15. D	16. A
17. D	18. E	19. E	20. B

PROBLEMAS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Organizados por las Academias: ***César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.***

Problema 1. Si un ángulo mide 17,3075° expresar dicha medida en grados, minutos y segundos sexagesimales.

A) 17°18'27" B) 17°27'18" C) 17°18'36" D) 17°21'37" E) 17°18'45"

Resolución:

La expresión: 17,3075°; se puede escribir de la manera siguiente:

$$17,3075° = 17° + 0,3075°$$
$$= 17° + 18,45'$$
$$= 17° + 18' + 0,45'$$
$$= 17° + 18' + 27"$$
$$= 17°18'27"$$

Convertimos: 0,3075° a minutos.

$$0,3075 = 0,307° \times \frac{60'}{1°}$$
$$0,3075° = 18,45'$$

Convertimos: 0,45' a segundos sexagesimales:

$$0,45' = 0,45' \times \frac{60"}{1'}$$
$$0,45' = 27"$$

$\therefore$ 17,3075° = 17°18'27" **Rpta. A**

Problema 2. La medida de un ángulo en grados sexagesimales es (20 - x)° y en el sistema centesimal (20 + x)g. Calcular la medida de dicho ángulo en radianes.

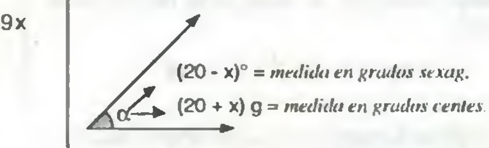
A) $\frac{\pi}{19}$ rad. B) $\frac{2\pi}{19}$ rad. C) $\frac{3\pi}{19}$ rad. D) $\frac{4\pi}{19}$ rad. E) $\frac{5\pi}{19}$ rad.

Resolución:

- Aplicando la fórmula que relaciona el sistema sexagesimal y centesimal, osea: $\frac{S}{9} = \frac{C}{10}$; obtenemos:

$$\frac{20-x}{9} = \frac{20+x}{10} \Rightarrow 10(20-x) = 9(20+x)$$
$$200 - 10x = 180 + 9x$$
$$20 = 19x$$
$$\frac{20}{19} = x$$

- Sea el ángulo = α



- Reemplazamos el valor de $x = \frac{20}{19}$ en la expresión:

$$\alpha = (20 - x)^\circ \Rightarrow \alpha = \left(20 - \frac{20}{19}\right)^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{360^\circ}{19}$$

- Convertimos las $\frac{360^\circ}{19}$ a radianes, veamos: $\alpha = \frac{360^\circ}{19} \Rightarrow \alpha = \frac{360^\circ}{19} \times \left(\frac{\pi rad}{180^\circ}\right) = \frac{2\pi}{19}$ rad

$$\therefore \quad \alpha = \frac{2\pi}{19} \text{ rad}$$

Rpta. B

Problema 3. Sabiendo que α y θ son complementarios, si, "α" mide $(8x)^g$ y "θ" mide $(2x - 2)^\circ$. Hallar la diferencia de "α" y "θ" expresado en radianes.

A) $\pi/10$ B) $\pi/5$ C) $3\pi/10$ D) $\pi/4$ E) $\pi/3$

Resolución:

- De acuerdo al enunciado: $\alpha + \theta = 90^\circ$ ... I
- Convertimos: $\alpha = (8x)^g$ a grados sexagesimales: $\alpha = (8x)^g = (8x)^g \times \left(\frac{9^\circ}{10^g}\right) \Rightarrow \alpha = \left(\frac{72}{10}x\right)^\circ$ ... II

Por dato: $\theta = (2x - 2)^\circ$ ... III

Reemplazamos (II) y (III) en (I):

Recordar que:

$9^\circ <> 10\text{ g}$

$$\left(\frac{72}{10}x\right)^\circ + (2x - 2)^\circ = 90^\circ \Rightarrow \frac{72}{10}x + 2x - 2 = 90$$

$$\frac{92x}{10} = 92 \Rightarrow \therefore \quad x = 10$$

Reemplazamos el valor de $x = 10$ en (II) y (III):

De II : $\alpha = \left(\frac{72}{10}x\right)^\circ = \left(\frac{72}{10} \cdot 10\right)^\circ \Rightarrow \alpha = 72^\circ$

De III : $\theta = (2x - 2)^\circ = (2 \cdot 10 - 2)^\circ \Rightarrow \theta = 18^\circ$

Luego: $\alpha - \theta = 72^\circ - 18^\circ = 54^\circ$ ⟶ *convertimos a radianes.*

$$\alpha - \theta = 54^\circ = 54^\circ \times \left(\frac{\pi\, rad}{180^\circ}\right) = \frac{3\pi\, rad}{10} \quad \therefore \quad \alpha - \theta = \frac{3}{10}\pi rad$$

Rpta. C

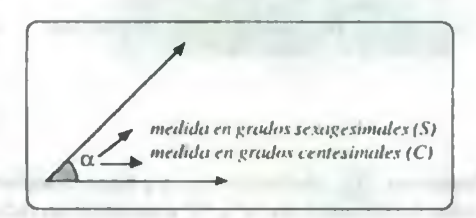
Problema 4 . Entre las medidas sexagesimal y radial de un ángulo α; existe la relación: $s\pi - 156R = 12\pi$, calcular el ángulo en radianes.

A) $\pi/3$ **B)** 2π **C)** $\pi/2$ **D)** $3\pi/2$ **E)** N.A.

Resolución:

- De la fórmula: $\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi}$; obtenemos:

$$S\pi = 180R \quad \ldots \text{I}$$



Reemplazamos (I) en la expresión:

$$\underbrace{S\pi}-156R = 12\pi$$

$$180R - 156R = 12\pi$$

$$24R = 12\pi \Rightarrow R = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$\therefore$ El ángulo "α" en radianes es igual a: $\pi/2$rad. **Rpta. C**

Problema 5 . Siendo S y C los números convencionales y además se verifica la relación:

$$\left(\frac{5S}{a+1}\right)^{g} <> \left(\frac{3C}{b+2}\right)^{\circ}$$

Calcule el valor de: $E = 20a - 27b$

A) 54 **B)** 48 **C)** 34 **D)** 28 **E)** 14

Resolución:

- Convertimos los $\left(\frac{5S}{a+1}\right)^{g}$, a grados sexágesimales:

$$\left(\frac{5S}{a+1}\right)^{g} = \left(\frac{5S}{a+1}\right)^{g} \times \frac{9^{\circ}}{10^{g}} = \left(\frac{9S}{2(a+1)}\right)^{\circ} \Rightarrow \therefore \left(\frac{5S}{a+1}\right)^{g} = \left(\frac{9S}{2(a+1)}\right)^{\circ} \quad \ldots (I)$$

Reemplazamos (I) en la expresión: $\underbrace{\left(\frac{5S}{a+1}\right)^{g}} <> \left(\frac{3C}{b+2}\right)^{\circ}$

$$\left(\frac{9S}{2(a+1)}\right)^{\circ} <> \left(\frac{3C}{b+2}\right)^{\circ} \Rightarrow \frac{\cancel{9}S}{2(a+1)} = \frac{\cancel{3}C}{b+2}$$

$$\frac{3S}{2(a+1)} = \frac{C}{b+2} \Rightarrow \frac{S}{C} = \frac{2(a+1)}{3(b+2)} \quad \ldots (II)$$

- **Por fórmula:** $\frac{S}{9}=\frac{C}{10} \Rightarrow \frac{S}{C}=\frac{9}{10}$ ...(III)

Reemplazamos (III) en (II): $\frac{9}{10}=\frac{2(a+1)}{3(b+2)}$

$$27b+54 = 20a+20$$

$$34 = \underbrace{20a-27b}_{E}$$

$\therefore$ $E = 20a - 27b = 34$ **Rpta. C**

***Problema* 6**. Siendo "S" y "C" los números de grados sexagesimales y centesimales de un ángulo, para los cuales se tiene que:

$S = 9\,(a-10)^2$ y $C = 10\,(b-9)^2$. Calcule el valor de: $E=\frac{a+b}{a-b}$

A) 13 B) 15 C) 17 D) 19 E) 21

Resolución:

- De la fórmula: $\frac{S}{9}=\frac{C}{10}$; obtenemos:

$\frac{\not{9}(a-10)^2}{\not{9}}=\frac{\not{10}(b-9)^2}{\not{10}}$; Aplicamos: Si: $x^2 = A$ $\therefore$ $\boxed{x = \pm\sqrt{A}}$

$$(a-10) = \pm\sqrt{(b-9)^2}$$

$a-10 = \pm(b-9)$
- $a - 10 = +(b-9) \Rightarrow a - b = 1$
- $a - 10 = -(b-9) \Rightarrow a + b = 19$

Reemplazamos los valores hallados en la expresión; obtenemos: $E=\frac{a+b}{a-b}=\frac{19}{1} \Rightarrow \therefore E = 19$ **Rpta. D**

***Problema* 7**. Determine la medida circular de un ángulo si se tiene que:

$C = 2a + b$; $S = a + b$ y $R = 7\pi - \pi a$

A) $\frac{\pi}{2}$ rad. B) $\frac{\pi}{3}$ rad. C) $\frac{\pi}{4}$ rad. D) $\frac{\pi}{5}$ rad. E) $\frac{\pi}{6}$ rad.

Resolución:

- De la fórmula: $\dfrac{S}{9} = \dfrac{C}{10}$; obtenemos:

$$\frac{a+b}{9} = \frac{2a+b}{10} \Rightarrow 10a+10b = 18a+9b \quad \therefore \quad \boxed{b=8a} \quad ...(I)$$

- De la fórmula: $\dfrac{S}{180} = \dfrac{C}{200} = \dfrac{R}{\pi}$; obtenemos: $\dfrac{S}{180} = \dfrac{R}{\pi}$ ...(II)

Reemplazamos los valores de "S" y "R" en (II):

$$\frac{a+b}{180} = \frac{7\pi-\pi a}{\pi} \Rightarrow \frac{a+b}{180} = \frac{\cancel{\pi}(7-a)}{\cancel{\pi}} \quad ...(III)$$

Reemplazamos (I) en (III): $\dfrac{a+8a}{180} = 7-a \Rightarrow \dfrac{\cancel{9}a}{\cancel{180}} = 7-a$

$\dfrac{a}{20} = 7-a$; resolviendo la ecuación se tiene:

$$a = 140-20a \Rightarrow 21a = 140 \Rightarrow \boxed{a = \frac{20}{3}}$$

El valor de $a = \dfrac{20}{3}$, lo reemplazamos en la expresión:

$$S = a+b = a+8a = 9a = 9\left(\frac{20}{3}\right) = 60°$$

$$\therefore \quad S = 60° = \cancel{60°}\times\frac{\pi\,rad}{\cancel{180°}} = \frac{\pi}{3}\,rad.$$ **Rpta. B**

Problema 8 Determine la medida circular del ángulo que cumple con la igualdad.

$$\frac{\dfrac{S^5}{81}+\dfrac{C^4}{100}+400\dfrac{R^3}{\pi^2}}{\dfrac{S^4}{36}+\dfrac{C^3}{40}+5\dfrac{R^2}{\pi}} = \frac{S}{3}+\frac{C}{4}-5$$

A) $\dfrac{\pi}{2}$ rad. B) $\dfrac{\pi}{3}$ rad. C) $\dfrac{\pi}{4}$ rad.

D) $\dfrac{\pi}{5}$ rad. E) $\dfrac{\pi}{6}$ rad.

Resolución:

- De la fórmula: $\dfrac{S}{180} = \dfrac{C}{200} = \dfrac{R}{\pi}$

$S = \dfrac{180\,R}{\pi}$ ...(I)

$C = \dfrac{200\,R}{\pi}$ ...(II)

Reemplazamos (I) y (II) en la expresión incógnita; obteniendo:

$$\frac{\dfrac{\left(\frac{180R}{\pi}\right)^5}{81}+\dfrac{\left(\frac{200R}{\pi}\right)^4}{100}+400\dfrac{R^3}{\pi^2}}{\dfrac{\left(\frac{180R}{\pi}\right)^4}{36}+\dfrac{\left(\frac{200R}{\pi}\right)^3}{40}+5\dfrac{R^2}{\pi}} = \frac{180\frac{R}{\pi}}{3}+\frac{200\frac{R}{\pi}}{4}-5$$

$$\frac{\dfrac{\cancel{180}\cdot\cancel{180}\,(180)^3R^5}{\cancel{81}\cdot\pi^5}+\dfrac{\cancel{200}\,(200)^3R^4}{\cancel{100}\,\pi^4}+\dfrac{400R^3}{\pi^2}}{\dfrac{\cancel{180}\,(180)^3R^4}{\cancel{36}\cdot\pi^4}+\dfrac{\cancel{200}\,(200)^2R^3}{\cancel{40}\cdot\pi^3}+\dfrac{5R^2}{\pi}} = 110\frac{R}{\pi}-5$$

$$\frac{\dfrac{400(180)^3R^5}{\pi^5}+\dfrac{2(200)^3R^4}{\pi^4}+\dfrac{400R^3}{\pi^2}}{\dfrac{5(180)^3R^4}{\pi^4}+\dfrac{5(200)^2R^3}{\pi^3}+\dfrac{5R^2}{\pi}} = 110\frac{R}{\pi}-5$$

$$\frac{80\dfrac{R}{\pi}\cancel{\left[\dfrac{5(180)^3R^4}{\pi^4}+\dfrac{5(200)^2R^3}{\pi^3}+\dfrac{5R^2}{\pi}\right]}}{\cancel{\left[\dfrac{5(180)^3R^4}{\pi^4}+\dfrac{5(200)^2R^3}{\pi^3}+\dfrac{5R^2}{\pi}\right]}} = 110\frac{R}{\pi}-5$$

$$80\frac{R}{\pi} = 110\frac{R}{\pi}-5 \Rightarrow 5 = 30\frac{R}{\pi} \quad \therefore\ R=\frac{\pi}{6}\text{ rad}$$

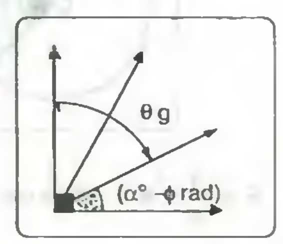
Rpta. E

***Problema* 9**. Del gráfico mostrado, calcule el valor de: $E = \dfrac{10\pi\alpha+9\pi\theta}{\pi+2\phi}$

A) 3 600 B) 2 400 C) 1 200

D) 1 800 E) 900

Resolución:



- De acuerdo a la figura:

$$\theta g + (\alpha^\circ - \phi\text{rad}) = 90^\circ$$

$$\theta \cancel{g}\times\frac{\pi\text{rad}}{200\cancel{g}}+\alpha^\circ\times\frac{\pi\text{rad}}{180^\circ}-\phi\text{rad} = 90^\circ\times\frac{\pi\text{rad}}{180^\circ}$$

$$\frac{\theta\pi}{200}+\frac{\pi\alpha}{180}-\phi = \frac{\pi}{2}$$

Damos común denominador en el primer miembro:

$$\frac{18\theta\pi + 20\pi\alpha - 3\ 600\phi}{3\ 600} = \frac{\pi}{2}$$

$$18\theta\pi + 20\pi\alpha - 3\ 600\phi = 1\ 800\pi$$

$$9\theta\pi + 10\pi\alpha - 1\ 800\phi = 900\pi$$

$$10\pi\alpha + 9\pi\theta = 900\pi + 1\ 800\phi$$

$$10\pi\alpha + 9\pi\theta = 900(\pi + 2\phi)$$

$$\frac{10\pi\alpha + 9\pi\theta}{\pi + 2\phi} = 900 \Rightarrow \therefore \boxed{E = 900}$$

Rpta. E

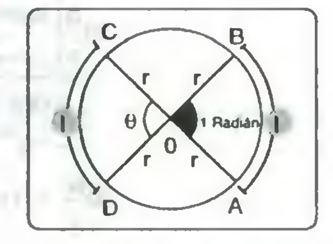
2.2 LONGITUD DE ARCO

Una de las muchas aplicaciones de radián unidad angular es el cálculo de longitud de arco. Sea "l" el arco de una circunferencia de radio "r" interceptado por un ángulo "θ" radianes.

$$\frac{\angle DOC}{\angle AOB} = \frac{DC}{AB} \quad \ldots (1)$$

Si el ángulo AOB mide 1 radian, el arco AB tiene longitud "r", reemplazando estos valores en (I); obtenemos:

$$\boxed{\frac{\theta\ \text{rad}}{1\ \text{rad}} = \frac{l}{r}}$$

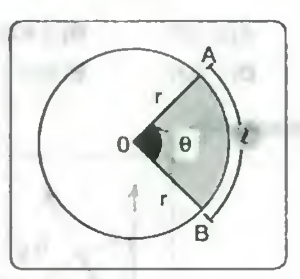


De donde: $l = r \cdot \theta$; θ en radianes

Siendo:
- l : longitud del arco
- r : radio de la circunferencia
- θ : ángulo central expresado en radianes

2.2.1 SECTOR CIRCULAR

Es una parte del circulo como se muestra en la figura, donde el área achurada (sombreada) es el sector circular.



POR GEOMETRÍA:

$$\text{Área Sector Circular} = \frac{\pi\ r^2\ \theta°}{360°}$$

$$S = \frac{\pi\ r^2\ \theta°}{360°}$$ "θ" *en grados sexagesimales*

POR TRIGONOMETRÍA:

$$\text{Área Sector Circular} = \frac{\pi\ r^2\ \theta}{360°} = \frac{\pi\ r^2\ \theta}{2\ \pi} \Rightarrow S = \frac{1}{2} r^2 \theta$$ "θ" *en radianes*

Esta última expresión se puede escribir así: $S = \frac{1}{2} r \cdot \theta \cdot r$ ... I

Por fórmula de longitud de arco: ➡ $\ell = \theta r$ ... II

Reemplazamos (II) en (I): ➡ $S = \frac{1}{2} \ell \cdot r$ ... III

De la ecuación (II), despejamos "r": ➡ $\ell = \theta r$ ➡ $r = \frac{\ell}{\theta}$ ... IV

Reemplazamos (IV) en (III): ➡ $S = \frac{1}{2} \ell \cdot \frac{\ell}{\theta}$ $\therefore$ $S = \frac{\ell^2}{2\theta}$ **Fórmula**

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE SECTOR CIRCULAR

Ejercicio (1): Dada la circunferencia de 24 m de radio. Encontrar la longitud del arco subtendido por un ángulo central de 2/3 radianes.

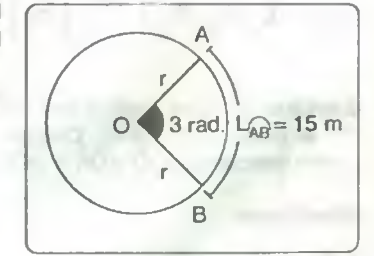
Resolución:

- **Por Fórmula:** $L_{\overset{\frown}{AB}} = \angle$ rad. x radio

Reemplazando valores, obtenemos:

$L_{\overset{\frown}{AB}} = \frac{2}{\cancel{3}} \times \cancel{24}m = 2 \times 8m$ ➡ $\therefore$ $L_{\overset{\frown}{AB}} = 16\ m$ ***Rpta.***

Ejercicio (2): Encontrar el radio de una circunferencia tal que un arco de 15 m de longitud, subtiende un ángulo central de 3 rad.



- **Por Fórmula:** $L_{\overset{\frown}{AB}} = \angle$ rad. x radio

Reemplazando valores; obtenemos:

$15\ m = 3 \times r$

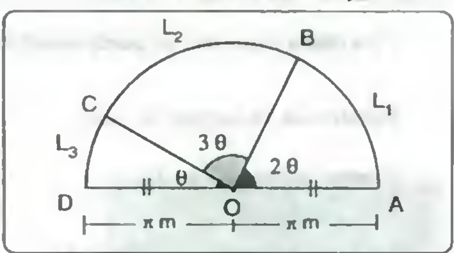
$r = \frac{15\ m}{3}$ ➡ $\therefore$ $r = 5m$ ***Rpta.***

Ejercicio (3): La figura es un semicírculo. Hallar: $L_1 + L_2 - L_3$

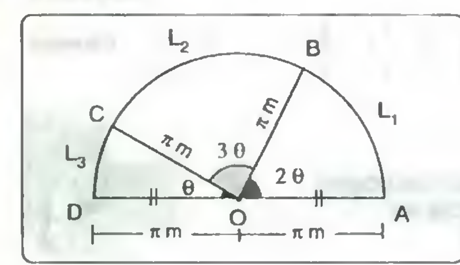
A) $\left(\frac{3}{4}\pi^2\right)$ m B) $\left(\frac{1}{2}\pi^2\right)$ m

C) $\left(\frac{2}{3}\pi^2\right)$ m D) $\left(\frac{1}{3}\pi^2\right)$ m

E) $\left(\frac{7}{12}\pi^2\right)$ m



Resolución:



• De la figura:

$$\theta + 3\theta + 2\theta = 180°$$

$$6\theta = \pi \text{ rad.} \quad \therefore \quad \theta = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

• Por Fórmula: $L_{\widehat{AB}} = \angle \text{ rad.} \times \text{radio}$;

Reemplazando valores, obtenemos:

$$L_1 = 2\theta\text{rad} \times \pi\text{m} \Rightarrow L_1 = 2\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot \pi\text{m} \Rightarrow \therefore L_1 = \left(\frac{\pi^2}{3}\right)\text{m} \quad \ldots 1$$

• Aplicando la misma fórmula:

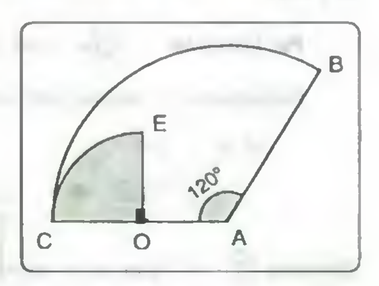
$$L_2 = 3\theta\text{rad} \times \pi\text{m} \Rightarrow L_2 = 3\left(\frac{\pi}{6}\right)\times\pi\text{m} \Rightarrow \therefore L_2 = \left(\frac{\pi^2}{2}\right)\text{m} \quad \ldots 2$$

• Aplicando la misma fórmula:

$$L_3 = \theta\text{rad.} \times \pi\text{m} \Rightarrow L_3 = \frac{\pi}{6}\pi\text{m} \Rightarrow \therefore L_3 = \left(\frac{\pi^2}{6}\right)\text{m} \quad \ldots 3$$

Luego: $L_1 + L_2 - L_3 = \left(\frac{\pi^2}{3}\right)\text{m} + \left(\frac{\pi^2}{2}\right)\text{m} - \left(\frac{\pi^2}{6}\right)\text{m} \quad \therefore \quad L_1 + L_2 - L_3 = \left(\frac{2}{3}\pi^2\right)\text{m}$ ***Rpta. D***

Ejercicio 4 **:** Si la longitud del arco $\widehat{BC}$ es 4 πm y "O" es punto medio de AC. Calcular el área de la región sombreada (CO = OA = OE)



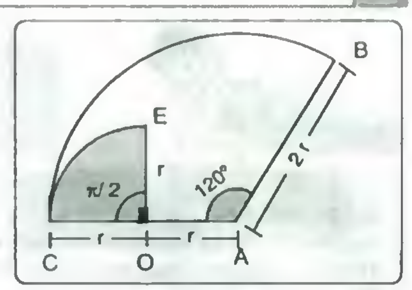
Resolución:

• Convertimos 120° a radianes.

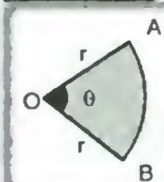
$$120° = 120° \times \frac{\pi\text{rad}}{180°} = \frac{2}{3}\pi \text{ rad.} \quad \therefore \quad 120° = \frac{2}{3}\pi \text{ rad.}$$

Por Fórmula: $L_{\overset{\frown}{BC}} = \alpha \text{ rad.} \times \text{radio}$

donde: $4\pi m = \frac{2}{3}\pi \cdot (2r) \quad \therefore \quad 3m = r$



Recordar que:

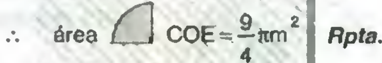


área del sector circular

$AOB = \frac{1}{2} r^2 \theta$

donde: "θ" en radianes

Luego: área COE $= \frac{1}{2}(3m)^2 \times \frac{\pi}{2}$



$\therefore$ área COE $= \frac{9}{4}\pi m^2$ ***Rpta.***

Ejercicio (5)*:* De la figura mostrada. La longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$ es 2π m. Calcular el área de la región sombreada ($\overline{AO} = \overline{OB} = \overline{OC} = 12$ m).

Resolución:

• ***Por Fórmula:*** $L_{\overset{\frown}{AB}} = \theta \text{rad} \times \text{radio}$

$2\pi m = \theta \text{rad} \times 12m$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$ rad.

• De la región: $\theta + \beta = 90°$

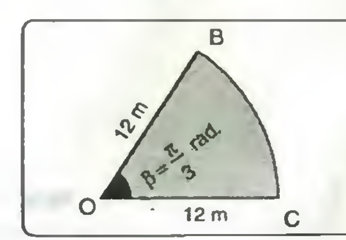
$\frac{\pi}{6}\text{rad.} + \beta = \frac{\pi}{2} \text{ rad.} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} \text{ rad.} - \frac{\pi}{6} \text{ rad.} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$

Luego; calculamos el área de la región sombreada:

área BOC $= \frac{1}{2}(12m)^2 \times \frac{\pi}{3}$

$= 72 \text{ m}^2 \times \frac{\pi}{3}$

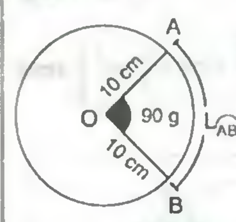
área BOC $= 24\pi m^2$ ***Rpta.***



TALLER DE EJERCICIOS Nº 5

EJERCICIO 1 : Calcular la longitud de un arco en una circunferencia cuyo radio mide 10 cm y el ángulo central que subtiende mide 90 g.

Resolución:



• Convertimos los 90^g a radianes:

$$90^g = 90^g \times \frac{\pi rad.}{200^g}$$

$$90^g = \frac{9}{20}\pi rad.$$

Luego: $L_{\overset{\frown}{AB}} = \alpha rad. \times radio$ **(Fórmula)**

$$L_{\overset{\frown}{AB}} = \frac{9}{20}\pi \times 10cm$$

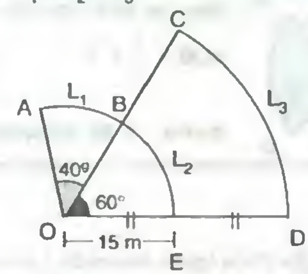
$$\therefore \ L_{\overset{\frown}{AB}} = 4{,}5\ \pi cm$$ ***Rpta.***

EJERCICIO 2 : Una circunferencia tiene un radio de 30 m. ¿Cuántos radianes mide un ángulo central subtendido por un arco de 20 m?

Resolución:

Rpta. $\frac{2}{3}$ rad

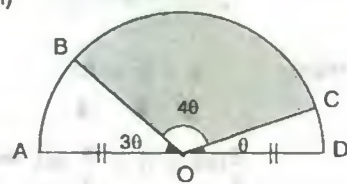
EJERCICIO 3 : De la figura mostrada: Calcular: $L_1 + L_2 + L_3$



Resolución:

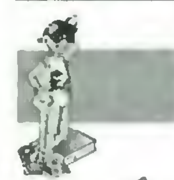
Rpta. 18π m

EJERCICIO 4 : De la figura mostrada: Calcular el área de la región sombreada ($L_{\overset{\frown}{CD}} = 2\pi$ m)

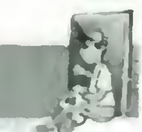


Resolución:

Rpta. $16\pi\ m^2$



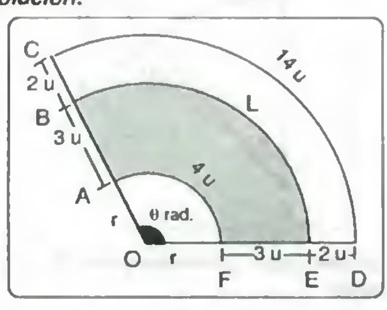
PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE SECTOR CIRCULAR TIPO I.B.M.

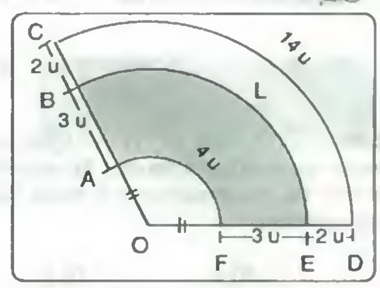


Problema 1: Determine el valor de "L" en el esquema mostrado:

A) 5 u B) 7 u C) 9 u
D) 10 u E) 12 u

Resolución:





• **Por Fórmula:** $L_{\overparen{AF}} = \theta$ rad. x radio

Luego: $4 = \theta \times r$ ... **1**

• Aplicando la misma fórmula: $L_{\overparen{BE}} = \theta \times (r + 3)$

$L = \theta \times r + 3\theta$ ... **2**

Reemplazamos (1) en (2): $L = 4 + 3\theta$ ... **3**

• Nuevamente aplicamos la misma fórmula: $L_{\overparen{CD}} = \theta \times (r + 5)$ ➡ $14 = \theta \times r + 5\theta$ ... **4**

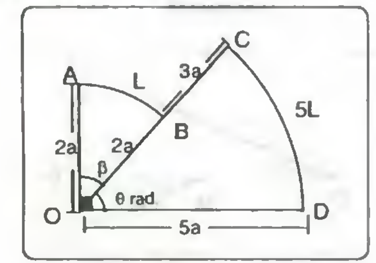
- Reemplazamos (1) en (4): $14 = 4 + 5\theta$ ➡ $10 = 5\theta$ ➡ $\therefore$ $\theta = 2$

Luego, reemplazamos $\theta = 2$; en (3) : ➡ $L = 4 + 3(2)$ ➡ $\therefore$ $L = 10$ u *Rpta. D*

Problema 2: Determine el valor de "θ" en el esquema mostrado:

A) π/2 B) π/3 C) π/4
D) π/5 E) π/6

Resolución:



• **Por Fórmula:** $L_{CD} = \theta$ rad. x radio

Luego: $5L = \theta \times 5a \Rightarrow L = \theta \times a$ ... **1**

De la figura:

$\beta + \theta$ rad. $= 90°$

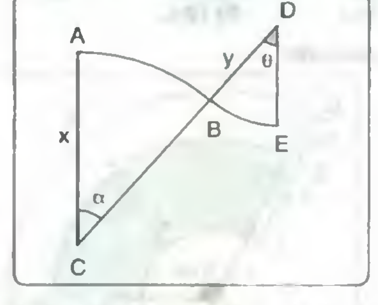
$\beta + \theta$ rad. $= \pi/2$ rad. $\Rightarrow \beta = (\pi/2 - \theta)$ rad. ... **2**

- Aplicando la fórmula: $L_{\widehat{AB}} = \beta$ rad. x radio ; obtenemos: $L = \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \times 2a$ ... 3

- Reemplazando (1) en (3): $\theta \times \cancel{a} = \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \times 2\cancel{a}$

$$\theta = \pi - 2\theta \Rightarrow \therefore \boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$$ ***Rpta. B***

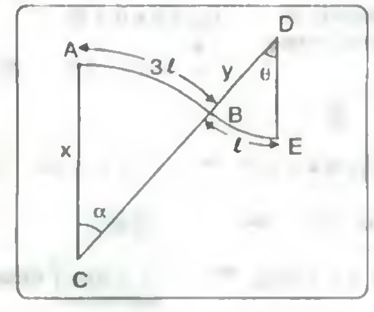
Problema 3: Calcular (x - y), ver figura adjunta, sabiendo que la longitud del arco AB es el triple de la del arco BE, los ángulos α y θ miden 30° y 10° respectivamente.



A) 0 B) 1 C) 2

D) 3 E) $\frac{3}{2}$

Resolución:

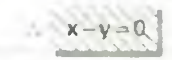


En primer lugar convertimos los 30° y 10° a radianes.

$$\begin{cases} \alpha = 30° <> 30° \times \frac{\pi \text{ rad}}{180°} = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \\ \beta = 10° <> 10° \times \frac{\pi \text{ rad}}{180°} = \frac{\pi}{18} \text{ rad} \end{cases}$$

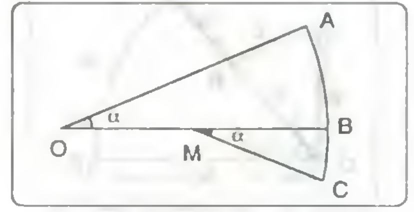
Luego: - En el sector circular BDE: $\ell_{\widehat{BE}} = \theta$ rad. . (y) $\Rightarrow \ell = \frac{\pi}{18}$ y $\therefore$ $\boxed{y = \frac{18\ell}{\pi}}$

- En el sector circular ACB: $\ell_{\widehat{AB}} = \alpha$ rad. . (x) $\Rightarrow 3\ell = \frac{\pi}{6} \cdot x$ $\therefore$ $\boxed{x = \frac{18\ell}{\pi}}$

Incógnita: $x - y = \frac{18\ell}{\pi} - \frac{18\ell}{\pi}$ $\Rightarrow$ $\therefore$  $\boxed{x - y = 0}$ ***Rpta. A***

Problema 4: Hallar la longitud de las curvas: AB + BC; "M" es punto medio de OB.

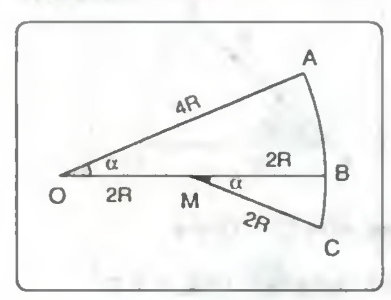
$$\alpha = \frac{\pi}{6} \text{rad} \quad ; \quad OA = 4R$$



A) πR B) 2πR C) 3πR

D) 4πR E) 5πR

Resolución:



- Aplicando la fórmula de longitud de arco, obtenemos:

• $L_{\widehat{AB}} = \alpha \text{ rad.} \times \overline{OB}$

$L_{\widehat{AB}} = \dfrac{\pi}{6} \times 4R = \dfrac{2}{3}\pi R$ ...(I)

•• $L_{\widehat{BC}} = \alpha \text{rad.} \times \overline{MC}$

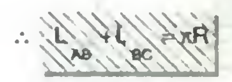
$L_{\widehat{BC}} = \dfrac{\pi}{6} \times 2R = \dfrac{\pi R}{3}$ ...(II)

Luego, sumamos miembro a miembro (I) y (II):

$$L_{\widehat{AB}} + L_{\widehat{BC}} = \frac{2\pi R}{3} + \frac{\pi R}{3} = \frac{3\pi R}{3} \qquad \therefore\ L_{\widehat{AB}} + L_{\widehat{BC}} = \pi R$$

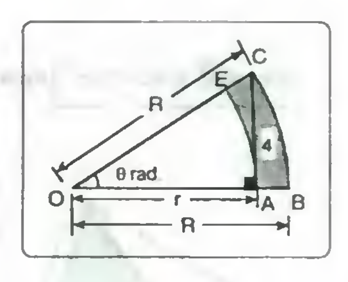
Rpta. A

Problema (5) : Del gráfico. Hallar el área sombreada. Si: AC = 4, EOA y COB son sectores circulares.



A) 16 θ B) 8 θ C) 6 θ
D) 4 θ E) 3 θ

Resolución:



De la figura:

Área sombreada = Área ◺ COB - Área ◺ EOA

$$A.S = \frac{R^2}{2}\cdot\theta - \frac{r^2}{2}\cdot\theta$$

$$A.S = \left(\frac{R^2 - r^2}{2}\right)\cdot\theta \quad \text{... I}$$

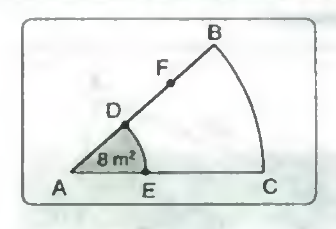
En el ◺CAO: Por el teorema de Pitágoras, obtenemos: $OC^2 = CA^2 + AO^2$

$$R^2 = 4^2 + r^2 \quad \Rightarrow \quad R^2 - r^2 = 16 \quad \text{... II}$$

Reemplazamos (II) en (I): $A.S = \dfrac{16}{2}\cdot\theta \Rightarrow \therefore\ A.S = 8\theta$

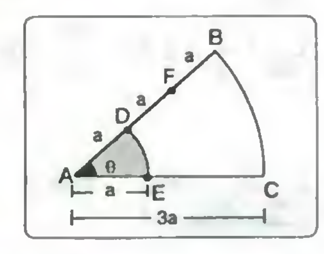
Rpta. B

Problema 6: Calcular el área del sector circular BAC; si el área del sector circular DAE vale 8 m^2 y AD = DF = FB.



A) 24 m^2 B) 16 m^2 C) 72 m^2
D) 64 m^2 E) 36 m^2

Resolución:



- Hacemos: $\overline{AD} = \overline{DF} = \overline{FB} = a$

- ***Por dato:*** área ◁ DAE = 8 m^2

$$\frac{1}{2}\overline{AE}^2 \cdot \theta = 8\ m^2$$

$$\frac{1}{2}a^2 \cdot \theta = 8\ m^2$$

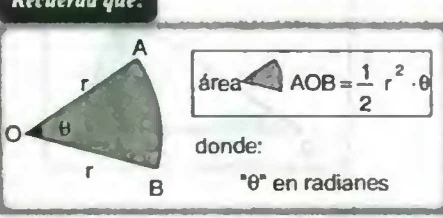
$$a^2 \cdot \theta = 16\ m^2 \quad \ldots \text{I}$$

Luego: área ◁ BAC $= \frac{1}{2}\ AC^2 \cdot \theta$

$$= \frac{1}{2}(3a)^2 \cdot \theta$$

$$= \frac{9}{2}(a^2 \cdot \theta) \quad \ldots \text{II}$$

Recuerda que:



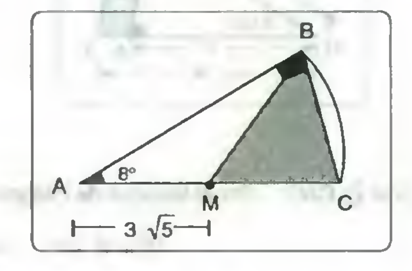
área ◁ AOB $= \frac{1}{2}\ r^2 \cdot \theta$

donde:

"θ" en radianes

Reemplazamos (I) en (II): área ◁ BAC $= \frac{9}{2}(16\ m^2)$ ∴ área ◁ BAC = 72m^2 ***Rpta. C***

Problema 7: En la figura "M" es punto medio. Hallar el área del sector circular BMC



A) $\pi\ u^2$ B) $2\pi\ u^2$ C) $\frac{\pi}{2}\ u^2$

D) $\frac{3\pi}{2}\ u^2$ E) $8\frac{\pi}{3}\ u^2$

Resolución:

- Como "M" es punto medio de $\overline{AC}$. Entonces: $\overline{AM} = \overline{MC} = 3\sqrt{5}$

Además; BMC es un sector circular, siendo: $\overline{MC} = \overline{MB} = 3\sqrt{5}$

De acuerdo a la figura el Δ AMB, resulta ser un isósceles, donde: $\angle A = \angle B = 8°$

- En el Δ AMB, por ángulo exterior ➡ $M = \angle A + \angle B$

$$M = 8° + 8° \Rightarrow \angle M = 16°$$

Luego: $$\text{Área} \triangleleft \text{BMC} = \frac{\pi\,(MC)^2 \times \angle M°}{360°}$$

$$\text{Área} \triangleleft \text{BMC} = \frac{\pi\left(3\sqrt{5}\right)^2 \times 16°}{360°} = \frac{\pi\,(45)\,(16°)}{360°} = \frac{\pi\,(720°)}{360°}$$

$$\therefore \text{Área} \triangleleft \text{BMC} = 2\,\pi u^2$$ ***Rpta. B***

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE SECTOR CIRCULAR

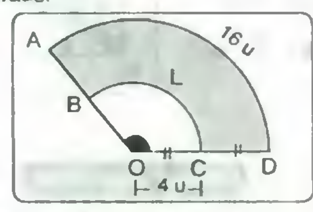
NIVEL I

Ejercicio 1: Calcular la longitud de un arco en una circunferencia cuyo radio mide 15 y el ángulo central que subtiende mide 160g.

A) 15 π cm **B)** 15 cm **C)** 12 π cm
D) 24 π cm **E)** 18 π cm

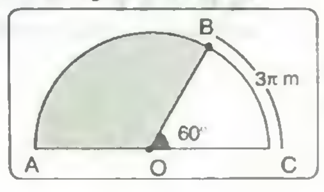
Ejercicio 2: Determine el valor de "L" en el esquema mostrado:

A) 6 u
B) 10 u
C) 8 u
D) 12 u
E) 9 u



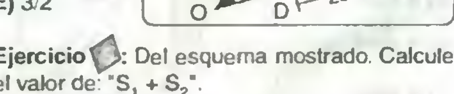
Ejercicio 3: En el esquema mostrado. Determine el área de la región sombreada

A) $9\pi\ m^2$
B) $18\pi\ m^2$
C) $23\pi\ m^2$
D) $27\pi\ m^2$
E) $24\pi\ m^2$



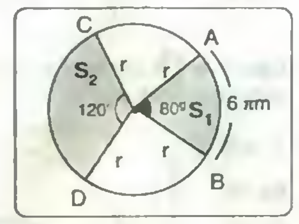
Ejercicio 4: Determine el valor de "θ" en el esquema mostrado.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 1/2
E) 3/2



Ejercicio 5: Del esquema mostrado. Calcule el valor de: "$S_1 + S_2$".

A) $100\pi\ m^2$
B) $160\pi\ m^2$
C) $120\pi\ m^2$
D) $140\pi\ m^2$
E) $150\pi\ m^2$



Clave de Respuestas

1. C	2. C	3. D	4. B	5. C

NIVEL II

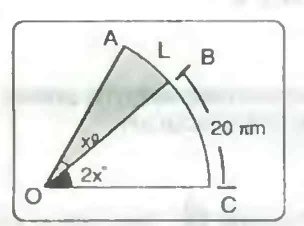
Ejercicio 1: Calcular el área de un sector circular sabiendo que es numéricamente igual a la longitud de su arco, siendo su ángulo central 18°.

A) $\frac{\pi}{10}\ u^2$ B) $\frac{\pi}{5}\ u^2$ C) $\frac{2}{5}\ \pi u^2$

D) $\frac{3}{5}\ \pi u^2$ E) $\frac{3}{10}\ \pi u^2$

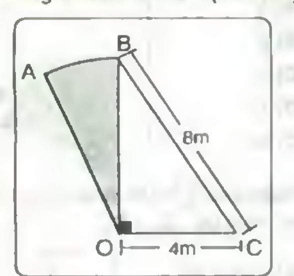
Ejercicio 2: Del esquema mostrado. Calcule el valor de "L".

A) 3 π m
B) 7 π m
C) 9 π m
D) 5 π m
E) 10 π m



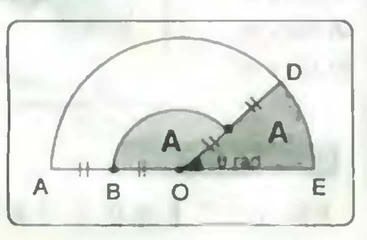
Ejercicio 3: Del esquema mostrado. Determine el área de la región sombreada. ($\overline{AO}//\overline{BC}$)

A) 6 π m²
B) 4 π m²
C) 8 π m²
D) 3 π m²
E) 5 π m²



Ejercicio 4: Determine el valor de "θ" en el esquema mostrado.

A) π/3
B) π/5
C) π/6
D) π/8
E) 2/3 π

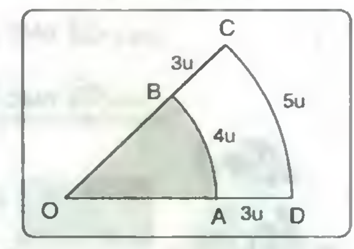


Ejercicio 5: Determine la longitud de arco de un sector cuyo ángulo central mide (x/3) rad. y su radio mide (6x) m; sabiendo además que el perimetro de este secto es de 110 m.

A) 20 m B) 30 m C) 40 m
D) 50 m E) 60 m

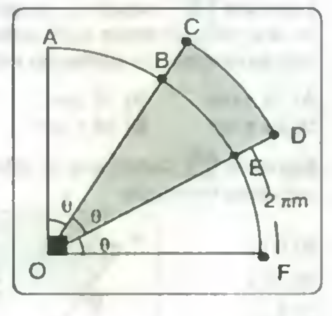
Ejercicio 6: En el esquema mostrado, determine el área de la región sombreada.

A) 16 u²
B) 12 u²
C) 18 u²
D) 22 u²
E) 24 u²



Ejercicio 7: En el esquema mostrado; determine el área de la región sombreada. ($\overline{OB} = 3\,\overline{BC}$)

A) $\frac{58}{3}\ \pi m^2$
B) $32\ \pi m^2$
C) $\frac{64}{3}\ \pi m^2$
D) $48\ \pi m^2$
E) $\frac{68}{3}\ \pi m^2$



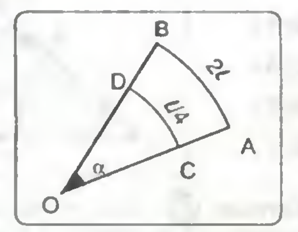
Clave de Respuestas

1. B	2. C	3. B	4. B
5. D	6. E	7. C	

NIVEL III

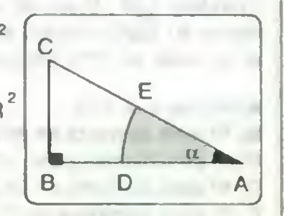
Ejercicio 1: De la figura mostrada; Hallar: AC; Si: $\alpha = 0{,}25$ rad.

A) 3L
B) 4L
C) 5L
D) 6L
E) 7L



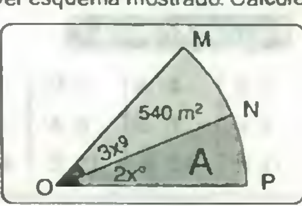
Ejercicio 2: Si: O y O_1 son centros de las circunferencias. Calcular la longitud del arco $\overset{\frown}{OO_1}$; los radios de las circunferencias son R y r.

A) $\frac{\pi}{2}(R+r)$
B) $\frac{\pi}{2}(R-r)$
C) $\frac{\pi}{6}(R+r)$
D) $(R+r)\pi$
E) $\pi(R-r)$



Ejercicio 3: Si: $\overline{AD} = \overline{BD} = R$; Hallar el área del sector circular ADE; Si el área del triángulo ABC vale $2\sqrt{3}\,R^2$.

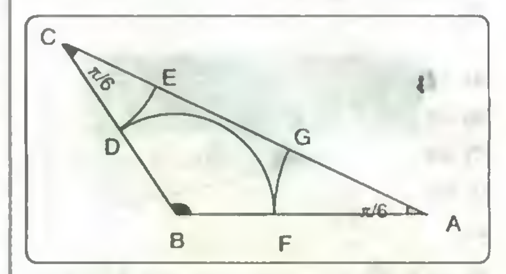
A) $\frac{\pi}{3}R^2$ B) $\frac{\pi}{8}R^2$
C) $\frac{\pi}{6}R^2$ D) $\frac{\pi}{12}R^2$
E) $\frac{\pi}{15}R^2$



Ejercicio 4: Del esquema mostrado. Calcule el valor de "A".

A) 100 m^2
B) 200 m^2
C) 300 m^2
D) 400 m^2
E) 500 m^2

Ejercicio 5: De la figura mostrada. Hallar el perímetro del triángulo ABC. Si: $DE + GF = 2\pi m$; $DF = 4\pi m$.



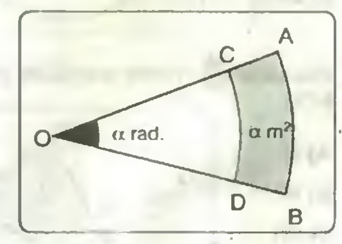
A) $12\left(1+\sqrt{3}\right)$ m B) $12\left(2+\sqrt{3}\right)$ m

C) $12\left(1+2\sqrt{3}\right)$ m D) $12\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ m

E) $24\left(1+\sqrt{3}\right)$ m

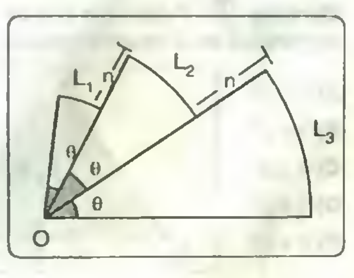
Ejercicio 6: En la figura; Calcular el radio del sector AOB; en metros. $\overset{\frown}{CD} = \alpha m$; $\overline{OC} = \overline{OD}$.

A) $2\sqrt{3}$ m
B) 2 m
C) $\sqrt{3}$ m
D) 1 m
E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ m



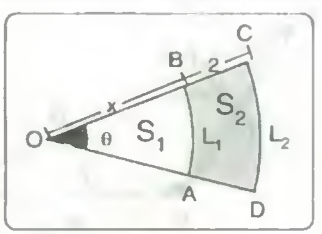
Ejercicio 7: Calcular el valor del ángulo "θ" (en radianes) mostrado en la figura; Si: $L_1 = 4n$ y $L_3 = 8n$ "0" centro de los sectores circulares.

A) 1 rad.
B) 2 rad.
C) $\frac{2}{3}$ rad.
D) $\frac{3}{2}$ rad.
E) $\frac{1}{2}$ rad.



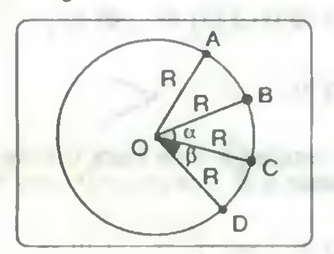
Ejercicio : Del gráfico adjunto; Calcular: $\dfrac{S_1}{S_2}$; Si: $L_1 + L_2 = 2\pi$; $\theta\ x = \dfrac{2\pi}{3}$.

A) 1/4
B) 1/2
C) 3/4
D) 4/5
E) 1



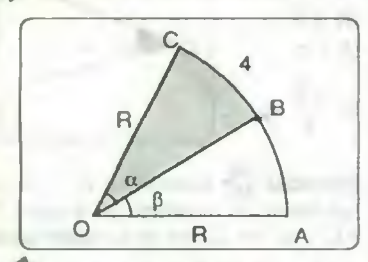
Ejercicio : En la figura mostrada: $\overset{\frown}{AB} = 3\pi u$; $\overset{\frown}{AD} = 17\pi u$; $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ rad; $\beta = 40^g$. Calcular: "R".

A) 36 u
B) 24 u
C) 63 u
D) 48 u
E) 56 u



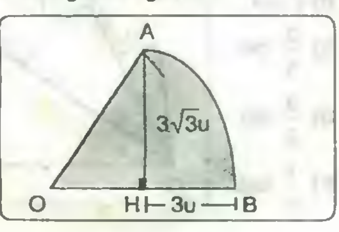
Ejercicio 10 : Hallar el área del sector circular BOC.

A) R
B) R^2
C) 2R
D) $2R^2$
E) $4R^2$



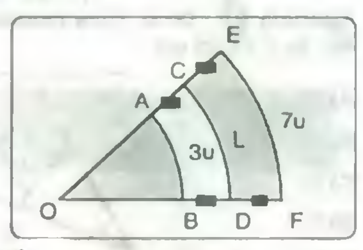
Ejercicio : Determinar el área de la región sombreada en el siguiente gráfico.

A) $2\pi u^2$
B) $3\pi u^2$
C) $4\pi u^2$
D) $5\pi u^2$
E) $6\pi u^2$



Ejercicio : Del esquema mostrado; determine el valor de "L".

A) 5 u
B) 4 u
C) 3 u
D) 2 u
E) 1 u

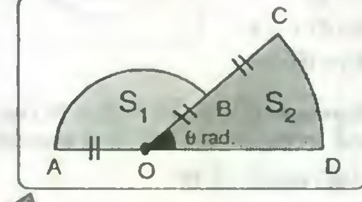


Ejercicio : Si a un sector circular se le duplica el ángulo central y a su radio se le reduce en 3 m; se obtendrá un nuevo sector cuya área es la mitad que la del área del sector inicial, determine el radio del sector inicial.

A) 2 m B) 3 m C) 4 m D) 5 m E) 6 m

Ejercicio : De la figura los perímetros de las áreas S_1 y S_2 son iguales. Calcular el valor de: $(\pi - 3\theta)$

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



Ejercicio : Si en un sector circular se aumenta su ángulo central en 20% y se disminuye su radio en 20%; entonces:

A) No varía el área
B) El área aumenta en 20%
C) El área disminuye en 20%
D) El área aumenta en 23,2%
E) El área disminuye en 23,2%

Clave de Respuestas

1. E	2. A	3. C	4. D	5. B
6. C	7. B	8. A	9. A	10. C
11. E	12. A	13. E	14. B	15. E

EJERCICIOS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Organizados por las Academias:

César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

PROBLEMA 1 : En la figura. Calcular:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_{25}$

A) 47 B) 48 C) 49 D) 50 E) 51

Resolución:

• Aplicamos la fórmula: $L_{\overset{\frown}{AB}} = \alpha \text{ rad} \cdot \text{radio}$

I. En el sector circular AOB.

$$\underbrace{L_{\overset{\frown}{AB}}}_{} = \theta \cdot x_1$$

$$1 = \theta \cdot x_1 \quad \ldots \text{(1)}$$

II. En el sector circular COD.

$$\underbrace{L_{\overset{\frown}{CD}}}_{} = \theta \cdot (x_1 + 2)$$

$$3 = \theta \cdot x_1 + 2\theta \quad \ldots \text{(2)}$$

Reemplazamos (1) en (2): $3 = 1 + 2\theta \Rightarrow \therefore \boxed{\theta = 1}$;

Este valor lo sustituimos en (1); obteniendo: $1 = 1 \cdot x_1 \Rightarrow \therefore \boxed{x_1 = 1}$

III. En el sector circular EOF.

$$L_{\overset{\frown}{EF}} = \theta \cdot (3 + x_2)$$

$$= 1 \cdot (3 + x_2) \Rightarrow \therefore \boxed{x_2 = 2}$$

IV. En el sector circular GOH.

$$L_{\overset{\frown}{GH}} = \theta \cdot (5 + x_3)$$

$$7 = 1 \cdot (5 + x_3) \Rightarrow \therefore \boxed{x_3 = 2}$$

V. En el sector circular IOJ:

$$L_{\overset{\frown}{IJ}} = \theta \cdot (7 + x_4)$$

$$9 = 1 \cdot (7 + x_4) \Rightarrow \therefore \boxed{x_4 = 2}$$

Luego: $\underbrace{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \ldots\ldots + x_{25}}_{\text{25 términos}} = 1 + \underbrace{2 + 2 + 2 + 2 + \ldots\ldots + 2}_{\text{24 términos}}$

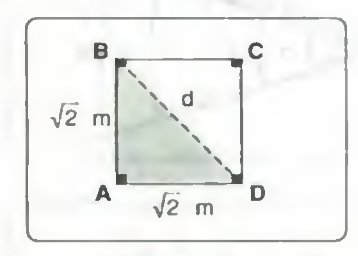
$$= 1 + 24(2) = \boxed{49} \quad \text{Rpta. C}$$

PROBLEMA 2 : El área de un cuadrado de $\sqrt{2}$ m de lado, es equivalente a un sector circular cuyo radio es igual a la longitud de la diagonal de aquél. Calcular la longitud del arco del sector circular.

A) Faltan datos B) 2m C) 3m D) 4m E) N.A.

Resolución:

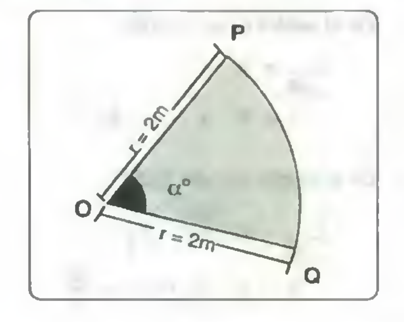
• Sea el cuadrado ABCD y el sector circular POQ.



• En el ◺ BAD, aplicamos el Teorema de Pitágoras:

$$d^2 = (\sqrt{2}\ m)^2 + (\sqrt{2}\ m)^2$$

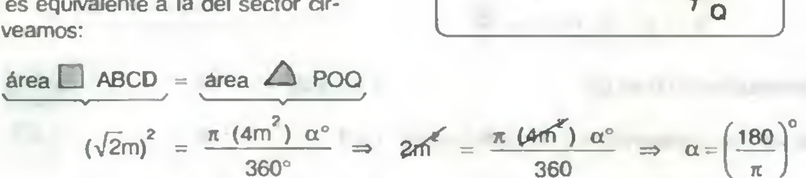
$$d^2 = 4m^2 \Rightarrow \therefore\ d = 2m$$



• De acuerdo al enunciado el radio del sector circular POQ es igual a la longitud de la Diagonal del cuadrado. Osea:

$$r = d = 2m$$

• Además sabemos que el área del cuadrado es equivalente a la del sector circular; veamos:



$$\underbrace{\text{área} \ \square\ ABCD}_{} = \underbrace{\text{área} \ \triangle\ POQ}_{}$$

$$(\sqrt{2}m)^2 = \frac{\pi\ (4m^2)\ \alpha°}{360°} \Rightarrow 2m^2 = \frac{\pi\ (4m^2)\ \alpha°}{360} \Rightarrow \alpha = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$$

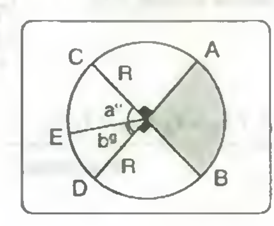
Luego, convertimos los $\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$ a radianes: $\alpha = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \times \frac{\pi\,rad}{180°} \Rightarrow \alpha = 1\ rad.$

• Ahora calculamos la longitud de arco del sector circular:

$$L_{\overset{\frown}{PQ}} = \alpha\ rad. \times r \Rightarrow L_{\overset{\frown}{PQ}} = 1 \cdot 2m \Rightarrow \therefore\ L_{\overset{\frown}{PQ}} = 2m$$

Rpta. B

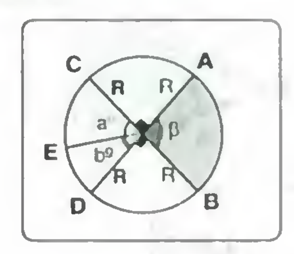
PROBLEMA 3 : Si: $10a + 9b = 1\ 350$; calcular el área de la región sombreada. Si además: $R = 2\sqrt{2}$.



A) π B) $\pi/2$ C) $\pi/4$

D) 2π E) N.A.

Resolución:



- De la figura:

$$a^\circ + b^g + 180^\circ + \beta^\circ = 360^\circ$$

$$a^\circ + b^g \times \frac{9^\circ}{10^g} + \beta^\circ = 180^\circ$$

$$\underbrace{10a + 9b} + 10\beta = 1\,800$$

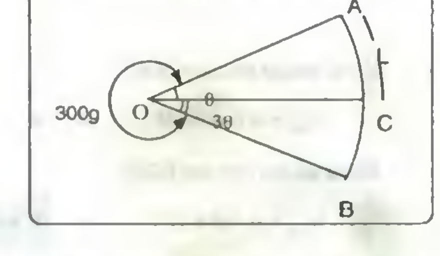
$$1\,350 + 10\beta = 1\,800 \Rightarrow \therefore \boxed{\beta = 45^\circ}$$

Luego, calculamos el área de la región sombreada:

$$\text{área} \;(\text{sector } AOB,\ R,\ \beta^\circ) = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \beta^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi(2\sqrt{2})^2 \cdot 45^\circ}{360^\circ} = \pi \quad \therefore$$

Área de la Región Sombreada = π **Rpta. A**

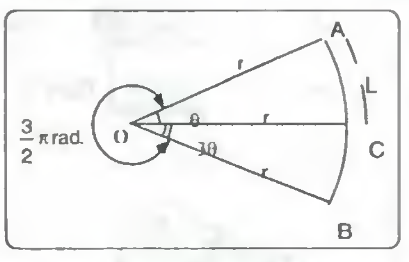
Problema 4 : En la figura mostrada. Calcular el valor del radio del sector circular AOB, sabiendo que: L = 2 π cm



A) 8 cm **B)** 4 cm **C)** 2 cm

D) 16 cm **E)** 32 cm

Resolución:



- En primer lugar, convertimos los 300g a radianes.

$$300g \;<\;> 300g \times \frac{\pi\,\text{rad}}{200g} = \frac{3}{2}\pi\ \text{rad}.$$

$$\therefore 300g \;<\;> \frac{3}{2}\pi\,\text{rad}.$$

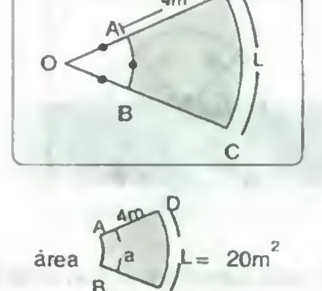
- De la figura: $\frac{3}{2}\pi\text{rad} + \theta + 3\theta = \underbrace{360^\circ}$

$$\frac{3}{2}\pi\text{rad} + 4\theta = 2\pi\text{rad} \;\Rightarrow\; 4\theta = 2\pi\text{rad} - \frac{3}{2}\pi\text{rad} \;\Rightarrow\; \therefore \quad \theta = \frac{\pi}{8}\text{rad}$$

- Luego, aplicamos la fórmula: $\underbrace{L_{\widehat{AC}}} = \underbrace{\theta \text{ rad}} \times \text{ radio}$

Donde: $2\pi\text{cm} = \frac{\pi}{8} \cdot r \;\Rightarrow\; \therefore \boxed{r = 16\text{ cm}}$ **Rpta. D**

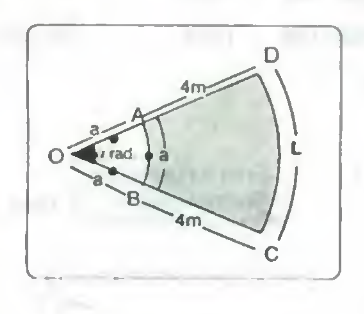
PROBLEMA 5 : En la figura mostrada, determine el valor de "L" si el trapecio circular ABCD tiene 20 m^2 de área.



A) 1m **B)** 3 m **C)** 5 m

D) 7 m **E)** 9 m

Resolución:



• **Por dato:** área (ABCD) = $20m^2$

$$\left(\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}}{2}\right)\times AD = 20$$

$$\left(\frac{a+L}{2}\right)\times 4 = 20$$

$$a + L = 10 \quad ...(I)$$

• En el sector circular AOB:

$L_{\overset{\frown}{AB}} = \alpha \text{ rad} \times \overline{OB} \Rightarrow a = \alpha . \text{rad} . \times a \Rightarrow \therefore \alpha = 1 \text{ rad}$ ...(II)

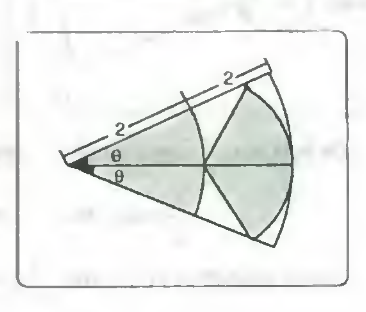
• En el sector circular DOC:

$L_{\overset{\frown}{CD}} = \alpha \text{ rad} \times OC \Rightarrow L = \alpha\text{rad} \times (a+4)$ ...(III)

Reemplazamos (II) en (III): $L = 1 \times (a+4) \Rightarrow \therefore a = L - 4$ ...(IV)

Reemplazamos (IV) en (I): $L - 4 + L = 10 \Rightarrow \therefore L = 7m$ **Rpta. D**

PROBLEMA 6 : Hallar el área sombreada entre el área no sombreada.



A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

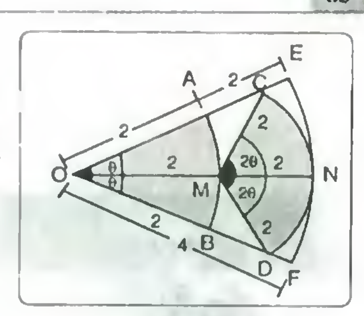
Resolución:

• Como se puede observar el Δ OMC es isósceles ($\overline{OM} = \overline{MC}$); siendo:

$$\angle COM = \angle OCM = \theta$$

• En el Δ OCM: (Por $\angle$ exterior): $\angle CMN = 2\theta$

De igual manera $\angle DMN = 2\theta$.



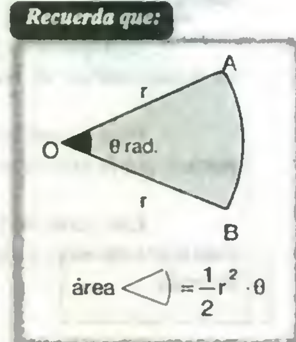
Luego:

▫ área sombreada = $\underbrace{\text{área} \triangleleft AOB + \text{área} \triangleleft CMD}$

$$\text{área sombreada} = \frac{1}{2}\overline{OB}^2 \cdot 2\theta + \frac{1}{2}\overline{MD}^2 \cdot 4\theta$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2^2 \cdot 2\theta + \frac{1}{2}\cdot 2^2 \cdot 4\theta$$

$\therefore$ área sombreada = 12θ



•• área no sombreada = $\underbrace{\text{área} \triangleleft EOF - \text{área sombreada}}$

$$= \frac{1}{2}\overline{OF}^2 \cdot 2\theta - 12\theta$$

$$= \frac{1}{2}4^2 \cdot 2\theta - 12\theta$$

$\therefore$ área no sombreada $= 4\theta$

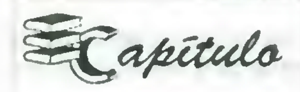
Luego: $\dfrac{\text{área sombreada}}{\text{área no sombeada}} = \dfrac{12\theta}{4\theta} = 3$ **Rpta. C**

¿SABÍAS QUE...

... Arquímides fue calificado por los historiadores romanos como el dios de la matemática, el Homero de la geometría?

Para los soldados romanos Arquímides era un verdadero demonio matemático, por la eficiencia de sus inventos bélicos.

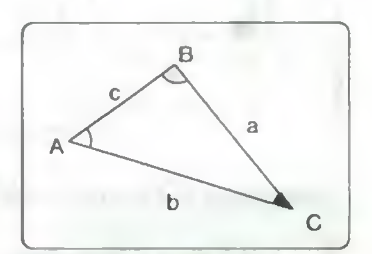
Este genio de la antigüedad calculó el valor de π con la mayor aproximación hasta entonces y dando además, el método que genera cualquier aproximación deseada.

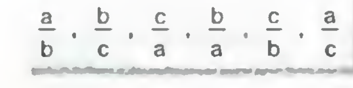


RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

3.1 CRITERIOS PRELIMINARES

RAZÓN : En forma general se le define como la comparación entre dos cantidades, por medio de un cociente aplicando esta definición a un triángulo cualquiera y relacionando sus tres lados 2 a 2 obtenemos 6 razones, veamos.





$$\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{a}{c}$$

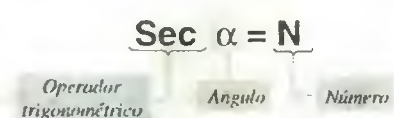
Operador Trigonométrico:

Se llama así, al símbolo matemático que como tal, no tiene significado cuando actúa por si sólo, pero que se transforma cuando lo acompaña un ángulo. Estos operadores trigonométricos son 6.

Sen	→	Seno
Cos	→	Coseno
Tan ó tg	→	Tangente
Cot ó cotg	→	Cotangente
Sec	→	Secante
Csc ó Cosec	→	Cosecante

Razón Trigonométrica:

Es aquella que se obtiene como consecuencia de fusionar un operador trigonométrico y un ángulo obteniéndose como resultado un número, veamos el siguiente ejemplo:

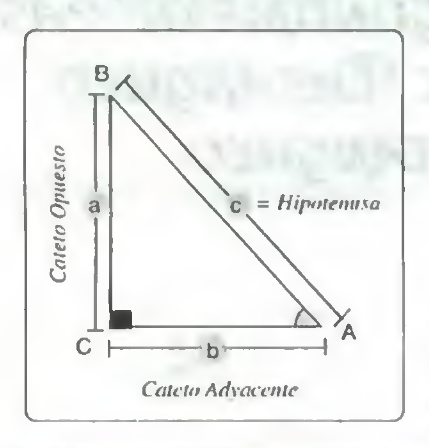


Ejemplos:

I) $\text{tg } 45° = 1$ II) $\text{Sen } 30° = \frac{1}{2}$ III) $\cos 60° = \frac{1}{2}$ IV) $\sec 45° = \sqrt{2}$

3.1.1 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Se les define como los cocientes que se obtienen al relacionar los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo, a continuación veamos las definiciones de cada una de dichas Razones trigonométricas con respecto al ángulo agudo A.



$$\text{Sen } A = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{Cos } A = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{Tg } A = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}} = \frac{a}{b}$$

$$\text{Cotg } A = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Cateto Opuesto}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{Sec } A = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Adyacente}} = \frac{c}{b}$$

$$\text{Cosec } A = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Opuesto}} = \frac{c}{a}$$

Condiciones que hay que tener presente

I) Sen A y Cos A; son menores que 1

II) tg A y cot A: toman cualquier valor

III) sec A y cosec A, son mayores que 1

IV). $c > a$ y $c > b$

V) $c^2 = a^2 + b^2$, (Teorema de Pitágoras)

VI) $\angle A + \angle B = 90°$; (A y B ángulos agudos)

Recomendación:

Estimado alumno no es necesario aprender las 6 razones trigonométricas sólo basta aprender las 3 primeras, y las 3 restantes se deducen por criteria inverso, veamos:

a) Si: $\text{sen } \theta = \frac{3}{8} \Rightarrow$ Su inverso $\Rightarrow \text{cosec } \theta = \frac{8}{3}$

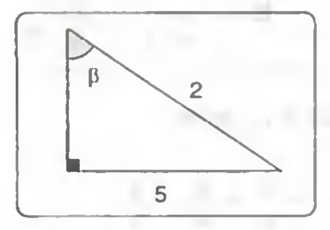
b) Si: $\text{tg } \theta = \frac{5}{4} \Rightarrow$ Su inverso $\Rightarrow \text{cotg } \theta = \frac{4}{5}$

c) Si: $\cos \theta = \frac{7}{9} \Rightarrow$ Su inverso $\Rightarrow \sec \theta = \frac{9}{7}$

- A continuación mencionaremos otros ejemplos sobre aplicación del criterio inverso, veamos:

$$\text{Si: } \quad \text{sen } \beta = \frac{5}{2} \Rightarrow \text{Su inverso} \Rightarrow \text{cosec } \beta = \frac{2}{5}$$

Si el valor de sen $\beta = \frac{5}{2}$, lo llevamos a un triángulo rectángulo, lo que resulta es:



$$\text{sen } \beta = \frac{5}{2}$$

5 — Cateto Opuesto

2 — Hipotenusa

- Según lo obtenido dicha razón resulta **absurda** ya que la hipotenusa jamás podrá ser **menor** que un cateto.

Observación: El valor de la razón trigonométrica es un número Adimensional (Sin dimensión), por tratarse de un cociente de magnitudes de la misma especie.

Ejemplo:

* **Como longitud.** $\text{Sen } \alpha = \frac{3\text{ m}}{5\text{ m}} = \frac{3}{5}$

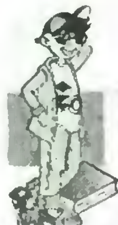
$\therefore \text{Sen } \alpha = 0,6$

α
4m
5m
3m

** **En física** $\text{Sen } \alpha = \frac{4\text{ Kg}}{5\text{ Kg}} = \frac{4}{5}$

$\therefore \text{Sen } \alpha = 0,8$

4Kg
5Kg
α
3Kg



PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Problema 1 **:** Hallar las 6 razones trigonométricas del ángulo "A" de un triángulo rectángulo ACB, recto en "C", sabiendo que: a = 6; b = 8.

Resolución:

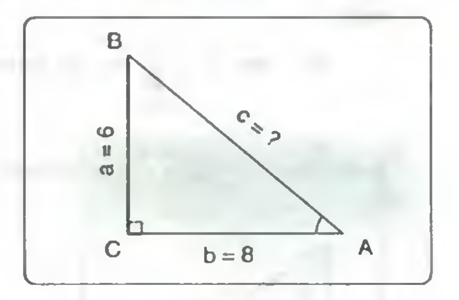
- Hallamos el valor de "C" por medio del teorema de Pitágoras.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Luego: $c^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64$

$c^2 = 100$

$c = \sqrt{100} \Rightarrow c = 10$



Ahora, hallamos las 6 razones trigonométricas, con respecto al ángulo "A".

$$\text{Sen A} = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{a}{c} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\text{Cos A} = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{b}{c} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Tg A} = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}} = \frac{a}{b} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Cotg A} = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Cateto Opuesto}} = \frac{b}{a} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Sec A} = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Adyacente}} = \frac{c}{b} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$\text{Cosec A} = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Opuesto}} = \frac{c}{a} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

Problema 2: Hallar las razones trigonométricas del ángulo "B" de un triángulo rectángulo ACB, recto en "C". Sabiendo que: a = 5 y c = 13.

Resolución:

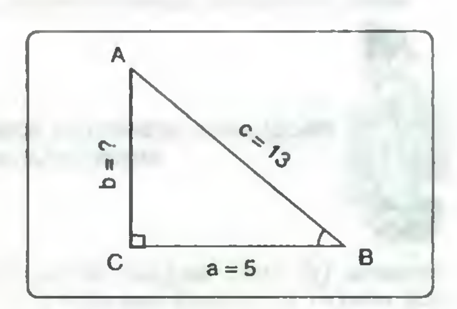
- Hallamos el valor de "b" por medio del teorema de Pitágoras.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Luego: $13^2 = 5^2 + b^2 \Rightarrow 169 = 25 + b^2$

$144 = b^2 \Rightarrow \sqrt{144} = b$

$\therefore$ **12 = b**



Ahora, hallamos las 6 razones trigonométricas, respecto al ángulo agudo "B".

$$\text{sen } B = \frac{b}{c} = \frac{12}{13} \Rightarrow \text{cosec } B = \frac{c}{b} = \frac{13}{12}$$

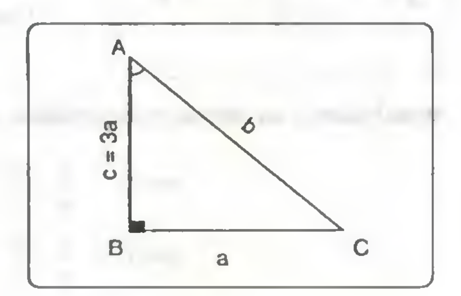
$$\cos B = \frac{a}{c} = \frac{5}{13} \Rightarrow \sec B = \frac{c}{a} = \frac{13}{5}$$

$$\text{tg } B = \frac{b}{a} = \frac{12}{5} \Rightarrow \cot B = \frac{a}{b} = \frac{5}{12}$$

Problema 3: Hallar las 6 razones trigonométricas del ángulo "A" en el triángulo rectángulo ABC, recto en "B", si se sabe que: $a = \frac{c}{3}$

Resolución:

De la condición: $a = \frac{c}{3} \Rightarrow \boxed{c = 3a}$



- Calculamos el valor de "b" por medio del teorema de Pitágoras:

$$b^2 = a^2 + c^2$$

Luego: $b^2 = a^2 + (3a)^2 \Rightarrow b^2 = 10\,a^2$

$$b = \sqrt{10\,a^2} = \sqrt{10} \cdot \sqrt{a^2}$$

$$\therefore\ b = \sqrt{10}\,a$$

Ahora, hallamos las 6 razones trigonométricas, respecto al ángulo agudo "A".

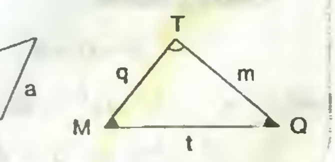
$$\text{sen } A = \frac{a}{b} = \frac{\not{a}}{\sqrt{10}\,\not{a}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \text{cosec } A = \frac{\sqrt{10}}{1} = \sqrt{10}$$

$$\cos A = \frac{c}{b} = \frac{3\not{a}}{\sqrt{10}\,\not{a}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \sec A = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\text{tg } A = \frac{a}{c} = \frac{\not{a}}{3\not{a}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cot A = \frac{3}{1} = 3$$

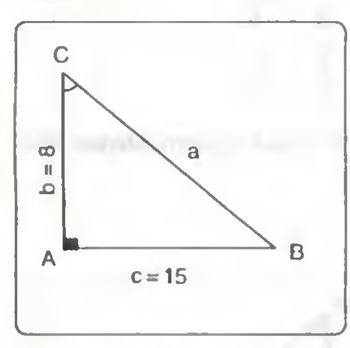
Observación: *Recordemos que en los vértices de los triángulos siempre se colocan letras mayúsculas y a los lados que se oponen se colocan sus respectivas letras minúsculas por decir: Si en uno de los vértices del triángulo colocamos la letra "A", en su lado opuesto colocaremos su minúscula "a" (ver figura)*

Otro Ejemplo:



***Problema** (4)*: En el triángulo rectángulo ABC; recto en "A", si: tg B = $\frac{8}{15}$. Hallar las razones trigonométricas del ángulo "C".

Resolución:



Por definición: $\text{tg } B = \frac{b}{c}$ $\quad \frac{8}{15} = \frac{b}{c}$ → b = 8, c = 15

- Calculamos el valor de "a" por medio del teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Luego: $a^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225$

$a^2 = 289 \Rightarrow a = \sqrt{289} \Rightarrow \therefore \ a = 17$

Ahora hallamos las razones trigonométricas con respecto al ángulo agudo "c".

$$\text{sen } C = \frac{c}{a} = \frac{15}{17} \Rightarrow \text{cosec } C = \frac{17}{15}$$

$$\cos C = \frac{b}{a} = \frac{8}{17} \Rightarrow \sec C = \frac{17}{8}$$

$$\text{tg } C = \frac{c}{b} = \frac{15}{8} \Rightarrow \cot C = \frac{8}{15}$$

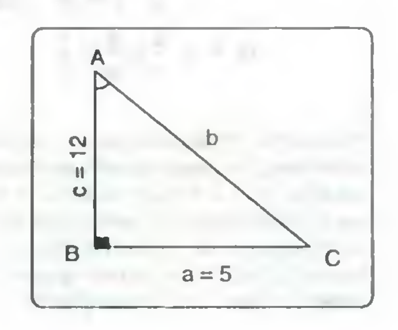
***Problema** (5)* : En el triángulo rectángulo ABC, recto en "B", si: tg C = $\frac{12}{5}$. Calcular el valor de:

$$\frac{\text{Cos } A}{1 + \text{Sen } A}$$

Resolución:

Por definición:

$\text{tg } C = \frac{c}{a}$ → $\frac{12}{5} = \frac{c}{a}$ → c = 12, a = 5



- Calculamos el valor de "b" por medio del teorema de Pitágoras:

$$b^2 = a^2 + c^2$$

Luego: $b^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144$

$b^2 = 169 \Rightarrow b = \sqrt{169} \Rightarrow b = 13$

Ahora calculamos el valor de la expresión incógnita: $\dfrac{\cos A}{1+\operatorname{sen} A}=\dfrac{\frac{c}{b}}{\left(1+\frac{a}{b}\right)}=\dfrac{\frac{12}{13}}{\left(1+\frac{5}{13}\right)}=\dfrac{\frac{12}{13}}{\frac{18}{13}}$

$$\therefore\quad \frac{\operatorname{Cos} A}{1+\operatorname{Sen} A}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$$

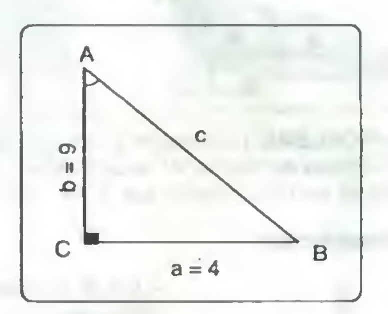
Problema 6: En el triángulo ACB, recto en "C", hallar el valor de: sen A x cos A; si: tg A = 0,444...

Resolución:

Sabemos que: $0{,}444\ldots\ldots=\dfrac{4}{9}\Rightarrow \operatorname{tg} A=\dfrac{4}{9}$

Por definición: $\operatorname{tg} A=\dfrac{\text{Cateto} \times \text{Opuesto}}{\text{Cateto} \times \text{Adyacente}}=\dfrac{a}{b}$

$\dfrac{4}{9}=\dfrac{a}{b}$ ➡ $a=4$ ➡ $b=9$



Calculamos el valor de "c" por medio del teorema de Pitágoras:

$$c^2=a^2+b^2$$

Luego: $c^2=4^2+9^2=16+81$

$c^2=97\Rightarrow\ \therefore\ c=\sqrt{97}$

• Ahora, hallamos el valor de la expresión incógnita:

$$\operatorname{sen} A\times\cos A=\frac{4}{c}\times\frac{9}{c}=\frac{36}{c^2}$$

$$\therefore\quad \operatorname{sen} A\times\cos A=\frac{36}{\left(\sqrt{97}\right)^2}=\frac{36}{97}$$

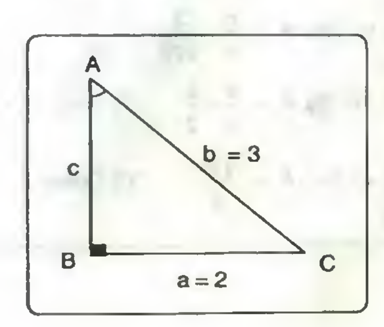
Problema 7: En un triángulo ABC, recto en "B", hallar el valor de: tg A x sec A; si: sen A = 0,666...

Resolución:

Sabemos que: $0{,}666\ldots=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow \operatorname{sen} A=\dfrac{2}{3}$

Por definición: $\operatorname{sen} A=\dfrac{\text{Cateto} \cdot \text{Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}=\dfrac{a}{b}$

$\dfrac{2}{3}=\dfrac{a}{b}$ ➡ $a=2$ ➡ $b=3$



- Calculamos el valor de "c" por medio del teorema de Pitágoras:

$$b^2 = a^2 + c^2$$

Luego: $3^2 = 2^2 + c^2 \Rightarrow 9 = 4 + c^2$

$5 = c^2 \Rightarrow \therefore \sqrt{5} = c$

- Ahora, hallamos el valor de la expresión incógnita:

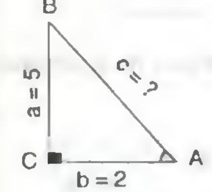
$$\text{tg } A \times \sec A = \frac{a}{c} \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c^2}$$

$$\therefore \text{ tg } A \times \sec A = \frac{2 \times 3}{\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{6}{5}$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 6

PROBLEMA 1 : Hallar las 6 razones trigonométricas del ángulo "A" de un triángulo ABC; recto en "C"; sabiendo que: a = 5 ; b = 2.

Resolución:



- Por el Teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 5^2 + 2^2 = 29$$

$$c = \sqrt{29}$$

Luego; hallamos las 6 razones trigonométricas.

I) $\text{Sen } A = \frac{a}{c} = \frac{5}{\sqrt{29}} = \frac{5\sqrt{29}}{29}$

II) $\text{Cos } A = \frac{b}{c} = \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{2\sqrt{29}}{29}$

III) $\text{tg } A = \frac{a}{b} = \frac{5}{2}$ IV) $\text{Cotg } A = \frac{2}{5}$

V) $\text{Sec } A = \frac{\sqrt{29}}{2}$ VI) $\text{Cosec } A = \frac{\sqrt{29}}{5}$

PROBLEMA 2 : Hallar las 6 razones trigonométricas del ángulo "B" de un triángulo ABC; recto en "C"; sabiendo que: b = 3; c = 6.

Resolución:

PROBLEMA 3 : Hallar las 6 razones trigonométricas del ángulo "C" de un triángulo BAC; recto en "A"; sabiendo que: $a = \sqrt{9}$; $b = \sqrt{4}$.

Resolución:

PROBLEMA 4 : Determinar las 6 razones trigonométricas del ángulo "B" de un triángulo ABC; recto en "C"; si se sabe que: $2b = a$.

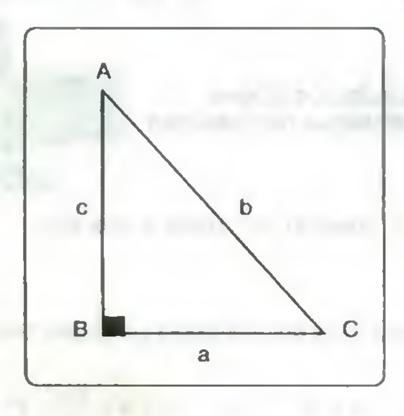
Resolución:

3.1.2 Razones Trigonométricas Recíprocas

TEOREMA: *"El producto de dos razones recíprocas es siempre igual a la unidad"*

CÁLCULO DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS RECÍPROCAS.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS RESPECTO AL ÁNGULO AGUDO "A"



$\text{Sen A} = \dfrac{a}{b}$

$\text{Cos A} = \dfrac{c}{b}$

$\text{Tg A} = \dfrac{a}{c}$

$\text{Cotg A} = \dfrac{c}{a}$

$\text{Sec A} = \dfrac{b}{c}$

$\text{Cosec A} = \dfrac{b}{a}$

(Sen A x Cosec A; Cos A x Sec A; Tg A x Cotg A)

- Efectuando el producto como se indica, obtenemos:

I) $\text{Sen } A \times \text{Cosec } A = \frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$

$$\therefore \text{Sen } A \times \text{Cosec } A = 1 \quad \begin{cases} \text{Sen } A = \dfrac{1}{\text{Cosec } A} \\ \text{Cosec } A = \dfrac{1}{\text{Sen } A} \end{cases}$$

II) $\text{Cos } A \times \text{Sec } A = \frac{c}{b} \times \frac{b}{c} = 1$

$$\therefore \text{Cos } A \times \text{Sec } A = 1 \quad \begin{cases} \text{Cos } A = \dfrac{1}{\text{Sec } A} \\ \text{Sec } A = \dfrac{1}{\text{Cos } A} \end{cases}$$

III) $\text{Tg } A \times \text{Cotg } A = \frac{a}{c} \times \frac{c}{a} = 1$

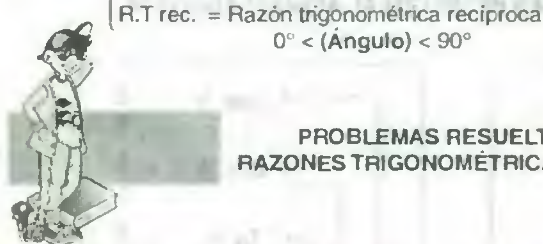
$$\therefore \text{Tg } A \times \text{Cotg } A = 1 \quad \begin{cases} \text{Tg } A = \dfrac{1}{\text{Cotg } A} \\ \text{Cotg } A = \dfrac{1}{\text{tg } A} \end{cases}$$

En General: R.T (Angulo) x R.T rec. (Angulo) = 1

Donde:
- R.T = Razón trigonométrica
- R.T rec. = Razón trigonométrica recíproca

$0° < (\text{Ángulo}) < 90°$

Ejemplos:
- a) Sen 50° x Cosec 50° = 1
- b) Tg 5° x Cotg 5° = 1
- c) Cos 45° x Sec 45° = 1



PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS RECÍPROCAS

Problema 1: Si se cumple que: Sen (2x + 5°) . Cosec 21° = 1. Hallar el valor de "x".

Resolución:

Como el producto de Seno y Cosecante es igual a 1, los ángulos deben ser iguales, Veamos:

$$2x + 5° = 21° \Rightarrow 2x = 21° - 5° \Rightarrow 2x = 16° \Rightarrow \therefore x = \frac{16°}{2} = 8°$$

Problema 2: Si: Tg (15 x - 31°) . Cotg (3x - 25°) - 1 = 0. Hallar el valor de "x"

Resolución:

La expresión dada se puede escribir así. $tg\,(15x - 31°)\,.\,Cotg\,(3x - 25°) = 0 + 1$

$$tg\,(15x - 31°)\,.\,Cotg\,(3x - 25°) = 1$$

Por definición de razones recíprocas: $(15x - 31°) = (3x - 25°)$

$$15x - 3x = 31° - 25° \Rightarrow 12x = 6° \Rightarrow x = \frac{6°}{12} \therefore \boxed{x = 0{,}5°}$$

Problema 3: Si: Cos (x + y + 20°) . Sec (6x + y - 60°) = 1. Hallar el valor de "x"

Resolución:

- Como el producto de coseno y secante es igual a 1, por razones recíprocas los ángulos deben ser iguales:

$$x + \cancel{y} + 20° = 6x + \cancel{y} - 60°$$
$$20° + 60° = 6x - x \Rightarrow 80° = 5x$$
$$\frac{80°}{5} = x \Rightarrow \therefore \boxed{x = 16°}$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 7

PROBLEMA 1 : Si se cumple que:

$tg\,(a + b + 40°) \times cotg\,(3a - b - 60°) = 1$ ... I

$a + b = 70°$ ... II

Hallar el valor de "a".

Resolución:

Aplicando la **propiedad:** $tg\,\alpha\,.\,cotg\,\alpha = 1$

Obtenemos que:

$a + b + 40° = 3a - b - 60°$

$100° = 2a - 2b$

$\cancel{100°} = \cancel{2}(a - b) \Rightarrow a - b = 50°$ ... III

• Sumamos miembro a miembro I y III:

$a + b = 70°$

$\underline{a - b = 50°}$

Σ. M.A.M. $2a = 120° \Rightarrow \therefore \boxed{a = 60°}$ ***Rpta.***

PROBLEMA 2 : Si se cumple que:

$Cos\,(x + y + 30°)\,.\,Sec\,(3y + x - 10°) = 1$

Hallar el valor de "y":

Resolución:

Rpta. $\boxed{y = 20°}$

PROBLEMA 3 : Si:

$$\text{Ctg}\,(3m - n + 10^\circ)\,.\,\text{tg}\,(n + m + 50^\circ) + 31 = 32 \quad ...(I)$$

$$m = 3\,n \quad ...\ (II)$$

Hallar el valor de "m"

Resolución:

Rpta. $m = 30^\circ$

PROBLEMA 4 : Si:

$$\text{Sen}\,(x + y)\,.\,\text{Cosec}\,(2x - y) - 1 = 0 \quad ...\ (I)$$

$$\text{Sec}\,(3x - y)\,.\,\text{Cos}\,100^\circ = 1 \quad ...\ (II)$$

Hallar el valor de "x":

Resolución:

Rpta. $x = 40^\circ$

TEOREMA FUNDAMENTAL:

Las razones trigonométricas de un ángulo de diferentes triángulos rectángulos no cambian cuando el ángulo permanece igual.

Sea: BAC un ángulo agudo, desde los puntos R, P y Q del lado $\overline{CA}$, trazamos las perpendiculares $\overline{RM}$, $\overline{PN}$ y $\overline{QT}$, resultando los triángulos rectángulos ATQ, ANP y AMR, semejantes por tener el mismo ángulo "A". (Como se muestra en la figura)

- Por semajanzas de triángulos, obtenemos las siguientes relaciones:

I) $$\frac{\overline{QT}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{PN}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{RM}}{\overline{RA}} = \text{sen } A$$

II) $$\frac{\overline{AT}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{RA}} = \cos A$$

III) $$\frac{\overline{QT}}{\overline{AT}} = \frac{\overline{PN}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{RM}}{\overline{AM}} = \text{tg } A$$

Las relaciones obtenidas nos indica que las razones trigonométricas del ángulo agudo "A" son invariables, cualquiera que sea el triángulo rectángulo al cual pertenece dicho ángulo.

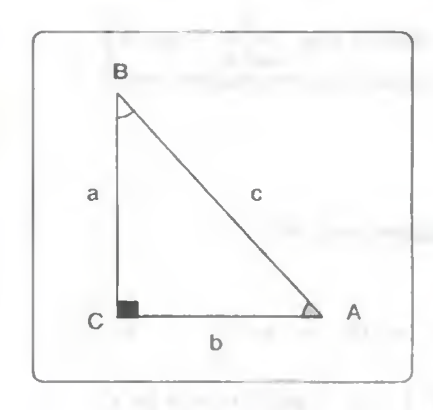
3.1.3 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS (CO-RAZONES COMPLEMENTARIAS)

Toda razón trigonométrica de un ángulo es igual a la Co-razón trigonométrica del complemento de dicho ángulo, es decir:

Si: $\hat{A} + \hat{B} = 90°$ Entonces: **R.T. (Ángulo A) = Co-R.T (Ángulo B)**

CÁLCULO DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

Sea el $\triangle$ BCA: Recto en "C", cuyos ángulos agudos son A y B (A + B = 90°)



I) $\underbrace{\text{sen } A}= \frac{a}{c}$ $\underbrace{\cos B} = \frac{a}{c}$

sen A = cos B Si: **A + B = 90°**

II) $\underbrace{\text{tg } A} = \frac{a}{b}$ $\underbrace{\text{cotg } B} = \frac{a}{b}$

tg A = cotg B Si: **A + B = 90°**

III) $\underbrace{\sec A} = \frac{c}{b}$ $\underbrace{\text{cosec } B} = \frac{c}{b}$

sec A = cosec B Si: **A + B = 90°**

En General: **R.T. (Ángulo A)** = **CO-R.T. (90° - Ángulo A)**

Razón trigonométrica — *Co-Razón trigonométrica*

Ejemplos:

- sen 30° = cos (90° - 30°) ⇒ sen 30° = cos 60°
- tg 40° = cotg (90° - 40°) ⇒ tg 40° = cotg 50°
- sec 20° = cosec (90° - 20°) ⇒ sec 20° = cosec 70°

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPLETARIOS

Problema 1 : Siendo: tg (α + 10°) = cotg (α + 40°). El valor de "α" es:

Resolución:

En la expresión dada, la cotangente es Co-razón de la tangente, los ángulos son complementarios, o sea deben sumar 90°.

$$(\alpha+10°) + (\alpha+40°) = 90°$$

$$2\alpha = 90°-10°-40° \Rightarrow 2\alpha = 40° \Rightarrow \therefore \alpha = \frac{40°}{2} = 20°$$

Problema 2: Si: sen (3x - 20°) . sec (2x + 95°) = 1. Hallar el valor de "x"

Resolución:

La expresión dada se puede escribir así:

$$\text{sen}\,(3x-20°) = \frac{1}{\sec\,(2x+95°)}\ ; \quad \text{recordar que: } \frac{1}{\sec\theta} = \cos\theta$$

$$\text{sen}\,(3x-20°) = \cos\,(2x+95°)$$

Como "coseno" es Co-Razón del "seno", sus ángulos deben sumar 90°

$$(3x-20°) + (2x+95°) = 90°$$

$$5x = 90°+20°-95° \Rightarrow 5x = 15° \Rightarrow x = \frac{15°}{5} \Rightarrow x = 3°$$

Problema 3: Si: $\text{tg}\left(\sqrt{x}+y+60°\right)\cdot\text{tg}\left(\sqrt{x}-y+10°\right)-1 = 0$. Calcular el valor de "x":

Resolución:

La expresión dada se escribe así: $\text{tg}\left(\sqrt{x}+y+60°\right)\cdot\text{tg}\left(\sqrt{x}-y+10°\right) = 1$

$$\text{tg}\left(\sqrt{x}+y+60°\right) = \frac{1}{\text{tg}\left(\sqrt{x}-y+10°\right)}\ ; \quad \text{recordar que: } \frac{1}{\text{tg}\,\theta} = \text{cotg}\,\theta$$

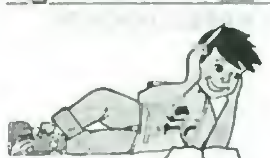
$$\text{tg}\left(\sqrt{x}+y+60°\right) = \text{cotg}\left(\sqrt{x}-y+10°\right)$$

Como "cotg" es Co-razón de "tg", sus ángulos deben sumar 90°

$$\left(\sqrt{x}+\cancel{y}+60°\right) + \left(\sqrt{x}-\cancel{y}+10°\right) = 90°$$

$$2\sqrt{x} = 90°-60°-10° \Rightarrow 2\sqrt{x} = 20°$$

$$\sqrt{x} = \frac{20°}{2} = 10° \Rightarrow \sqrt{x} = 10° \Rightarrow x = (10°)^2 \Rightarrow \therefore x = 100°$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 8

EJERCICIO 1 : Si:

$$\text{Sen}\,(x + 2y) = \text{Cos}\,(y - x) \quad \ldots \text{I}$$

$$\text{tg}\,(2x - y) = \text{cotg}\,(20°) \quad \ldots \text{II}$$

Hallar el valor de "x".

Resolución:

Aplicando las **propiedades**:

$$\text{Sen A} = \text{Cos B} \Rightarrow A + B = 90°$$
$$\text{tg}\,\alpha = \text{Cotg}\,\beta \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$$

Obtenemos que:

* $(x+2y)+(y-x) = 90°$

$3y = 90° \Rightarrow \therefore \boxed{y = 30°}$

** $(2x-y)+20° = 90°$

$2x - 30° = 70° \Rightarrow \therefore \boxed{x = 50°}$

Rpta.

EJERCICIO 2 : Si:

$$\text{Sen}\,2x \,.\, \text{Sec}\,4y = 1 \quad \ldots \text{I}$$

$$x - y = 15° \quad \ldots \text{II}$$

Hallar el valor de "y".

Resolución:

Rpta. $y = 10°$

EJERCICIO 3 : Si:

$$\text{Sen}\left(2\sqrt{x} + y - 20°\right) \text{Sec}\left(\sqrt{x} - y + 50°\right) - 1 = 0$$

Hallar el valor de "x":

Resolución:

Rpta. 400°

EJERCICIO 4 : Si:

$$\text{tg}\left(\frac{3Kx}{4} - \frac{\alpha}{3}\right) \bullet \text{tg}\left(\frac{\alpha}{3} - \frac{3Ky}{4}\right) = 1$$

Además: $x - y = 10°$. Calcular el valor de "K"

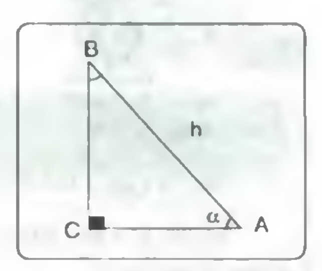
Resolución:

Rpta. $K = 12$

CASOS QUE SE PRESENTAN CON MUCHA FRECUENCIA EN LA RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

PRIMER CASO: ***Datos:*** Hipotenusa "h" y un ángulo "α"

Incógnita: Expresar los catetos en términos de "h" y "α"



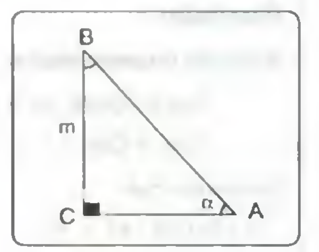
En el $\triangle$ BCA:

I) $\text{sen } \alpha = \dfrac{\overline{BC}}{h}$ II) $\cos \alpha = \dfrac{\overline{AC}}{h}$

$\overline{BC} = h \cdot \text{sen } \alpha$ $\overline{AC} = h \cdot \cos \alpha$

SEGUNDO CASO: ***Datos:*** Un ángulo agudo "α" y su cateto opuesto "m"

Incógnita: Expresar el otro cateto y la hipotenusa en términos de "α" y "m"



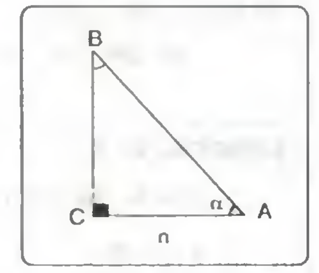
En el $\triangle$ BCA:

I) $\text{cosec } \alpha = \dfrac{\overline{AB}}{m}$ II) $\text{cotg } \alpha = \dfrac{\overline{AC}}{m}$

$AB = m \cdot \text{cosec } \alpha$ $AC = m \cdot \text{cotg } \alpha$

TERCER CASO: ***Datos:*** Un ángulo "α" y su cateto adyacente "n"

Incógnita: Expresar el otro cateto y la hipotenusa en términos de "α" y "n"



En el $\triangle$ BCA:

I) $\sec \alpha = \dfrac{\overline{AB}}{n}$ II) $\text{tg } \alpha = \dfrac{\overline{BC}}{n}$

$AB = n \cdot \sec \alpha$ $BC = n \cdot \text{tg } \alpha$

Observaciones:

a) *En trigonometría, los operadores no tienen significado por sí solo, ni tampoco se puede realizar operaciones algebraicas con ellas, de manera que, es absurdo, considerar las operaciones.*

$$\frac{\text{sen } \theta}{\theta} = \text{sen} \Rightarrow \text{(Absurdo)} \quad ; \quad \underbrace{\text{sen } (\alpha) + \text{sen } (\beta) = \text{sen } (\alpha + \beta)}_{\text{Absurdo}}$$

b) *Se ha demostrado que las razones trigonométricas son números, luego con ellos se puede operar así:*

I) $5 \sec \beta - 3 \sec \beta + 2 \sec \beta = 4 \sec \beta$

II) $(3\,\text{cotg}\,\alpha + 2\,\text{cosec}\,\alpha)\,\text{sen}\,\alpha = 3\,\text{cotg}\,\alpha\,.\,\text{sen}\,\alpha + 2\,\text{cosec}\,\alpha\,.\,\text{sen}\,\alpha$

$$= 3\left(\frac{\cos\alpha}{\cancel{\text{sen}\,\alpha}}\right)\cancel{\text{sen}\,\alpha} + 2\left(\frac{1}{\cancel{\text{sen}\,\alpha}}\right)\cancel{\text{sen}\,\alpha}$$

$$= 3\cos\alpha + 2$$

c) *Tenga cuidado con la equivalencia: $\text{sen}^n x = (\text{sen}\,x)^n$; la primera se utiliza continuamente pero la segunda no; porque corre el riesgo de concluir que:*

$$(\text{sen}\,x)^n = \text{sen}^n\,x^n \quad \Rightarrow \quad \textit{y esto es incorrecto}$$

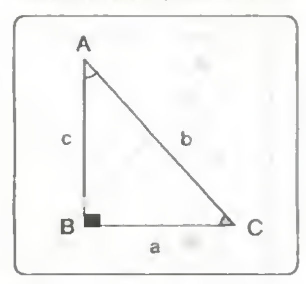
PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS TIPO I.B.M.

Problema 1 **:** Si el cuadrado de la suma del cateto "a" y la hipotenusa "b" de un triángulo rectángulo (recto en "B") es igual a 9 veces su producto. Hallar: "sen A + cosec A".

A) 6 B) 5 C) 9 D) 8 E) 7

Resolución:

- Del enunciado, obtenemos:



$$(a+b)^2 = 9\,(a \times b)$$

$$a^2 + 2a \times b + b^2 = 9a \times b$$

$$\therefore \quad a^2 + b^2 = 7a \times b \quad \ldots \text{I}$$

La expresión incógnita, se puede escribir así:

$$\text{sen}\,A + \text{cosec}\,A = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

$$\text{sen}\,A + \text{cosec}\,A = \frac{a^2 + b^2}{a \times b} \quad \ldots \text{II}$$

Reemplazamos (I) en (II):

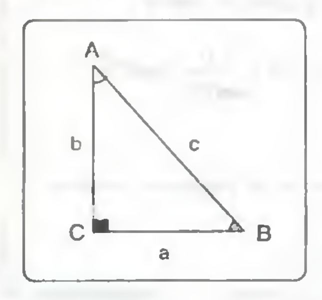
$$\text{sen}\,A + \text{cosec}\,A = \frac{7a \times b}{a \times b} = 7 \qquad \therefore \quad \boxed{\text{sen}\,A + \text{cosec}\,A = 7}$$

Rpta. E

Problema 2 **:** En un triángulo rectángulo ABC (C = 90°) se cumple que: ctg A . cos A = 3
Calcular: M = sec B - cos B

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Resolución:



- De la condición: cotg A . cos A = 3; obtenemos:

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{c}=3 \Rightarrow b^2=3a\times c \quad \dots \text{I}$$

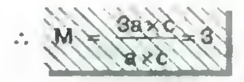
Luego, la expresión incógnita, se puede escribir así:

$$M = \sec B - \cos B$$

$$M = \frac{c}{a}-\frac{a}{c} \Rightarrow M = \frac{c^2-a^2}{a\times c} \quad \dots \text{II}$$

Por el teorema de pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 - a^2 = b^2 \quad \dots \text{III}$

Reemplazamos (III) en (II): $M = \dfrac{b^2}{a\times c} \quad \dots \text{IV}$

Reemplazamos (I) en (IV): $\therefore$  $M = \dfrac{3a\times c}{a\times c} = 3$ **Rpta. A**

Problema **3**: En un triángulo ABC, recto en "C", reducir: $Q = (\text{sen } A \,.\, \cos A - \text{sen } B \,.\, \cos B)^2$

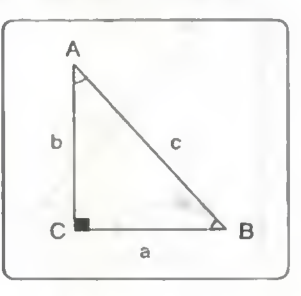
A) 1 **B)** 0 **C)** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **D)** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **E)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Resolución:

Del ◺ ABC; obtenemos:

$$\text{sen } A = \frac{a}{c} \;;\; \cos A = \frac{b}{c}$$

$$\text{sen } B = \frac{b}{c} \;;\; \cos B = \frac{a}{c}$$



De la expresión: $Q = (\text{sen } A \,.\, \cos A - \text{sen } B \,.\, \cos B)^2$

Obtenemos: $Q = \left(\dfrac{a}{c}\cdot\dfrac{b}{c} - \dfrac{b}{c}\cdot\dfrac{a}{c}\right)^2$

$$Q = \left(\frac{a\cdot b}{c^2}-\frac{a\cdot b}{c^2}\right)^2 = (0)^2 = 0 \quad \therefore \boxed{Q = 0}$$ **Rpta. B**

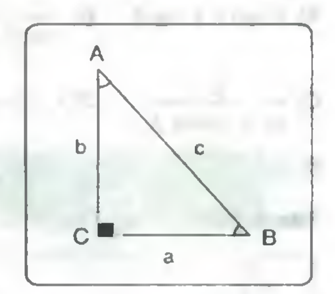
Problema **4**: En un triángulo ABC, recto en "C", se tiene que: $\dfrac{\text{tg } A \cdot \text{cotg } B}{1-\text{sen } A} = \dfrac{\text{tg } B \cdot \text{cotg } A}{1-\cos B}$

Hallar. "tg A + tg B"

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** -1 **E)** -2

Resolución:

- De la condición: $\dfrac{\text{tg } A \cdot \text{cotg } B}{1-\text{sen } A} = \dfrac{\text{tg } B \cdot \text{cotg } A}{1-\cos B}$



Obtenemos: $\dfrac{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{a}{b}}{\left(1-\dfrac{a}{c}\right)} = \dfrac{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{b}{a}}{\left(1-\dfrac{a}{c}\right)}$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow a^4 = b^4 \quad \therefore \quad a = b \quad \ldots \text{I}$$

De la expresión incógnita: "tg A + tg B"; obtenemos: $\text{tg } A + \text{tg } B = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \quad \ldots \text{II}$

Reemplazamos (I) en (II): $\text{tg } A + \text{tg } B = \dfrac{b}{b} + \dfrac{b}{b} = 1 + 1 = 2 \quad \therefore \quad \text{tg } A + \text{tg } B = 2$ **Rpta. B**

Problema **5** : En un triángulo rectángulo ABC (recto en "A"), de superficie 0,5 m².

Calcular: $Q = \dfrac{b^2}{\text{tg } B} + \dfrac{c^2}{\text{tg } C}$

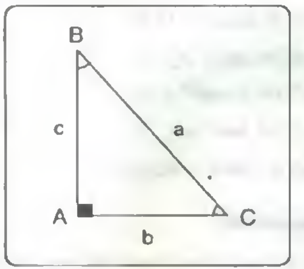
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

Resolución:

Por dato: $\text{Area } \triangle ABC = \dfrac{\text{Cateto } (\overline{AC}) \times \text{Cateto } (\overline{AB})}{2}$

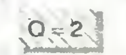
$$0{,}5 = \frac{b \times c}{2}$$

$$0{,}5 \times 2 = b \times c \Rightarrow 1 = b \times c \quad \ldots \text{I}$$



De la expresión: $Q = \dfrac{b^2}{\text{tg } B} + \dfrac{c^2}{\text{tg } C}$; Obtenemos:

$$Q = \frac{b^2}{\left(\dfrac{b}{c}\right)} + \frac{c^2}{\left(\dfrac{c}{b}\right)} = 2b \times c \quad \ldots \text{II}$$

Reemplazamos (I) en (II): $Q = 2\,(1) = 2 \Rightarrow \quad \therefore$ 

Rpta. B

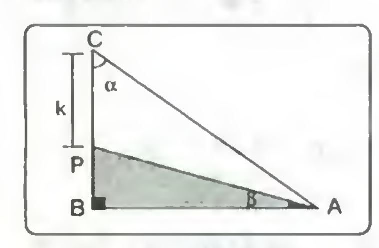
Problema **6** : En la figura mostrada. Hallar: $\overline{AB}$ en función de (α, β y k)

A) $k \operatorname{sen} \alpha + \cos \beta$ B) $\dfrac{k}{\operatorname{cotg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$

C) $\dfrac{k}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{cotg} \beta}$ D) $k \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$

E) N.A.

Resolución:



- En el ◺ PBA: $\operatorname{tg} \beta = \dfrac{PB}{AB} \Rightarrow PB = AB \cdot \operatorname{tg} \beta$ ... I

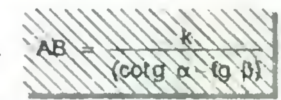
- En el ◺ CBA: $\operatorname{cotg} \alpha = \dfrac{CB}{AB} \Rightarrow CB = AB \cdot \operatorname{cotg} \alpha$ ... II

De la figura: $CB = CP + PB \Rightarrow CB = k + PB$ ... III

Reemplazamos (I) y (II) en (III): AB . cotg α = k + AB . tg b

AB . cotg - AB . tg β = k ; factorizamos AB

AB (cotg α - tg β) = k ∴



Rpta. B

Problema 7 : En la figura mostrada, hallar el área del triángulo ABC en función de "k", "α" y "β".

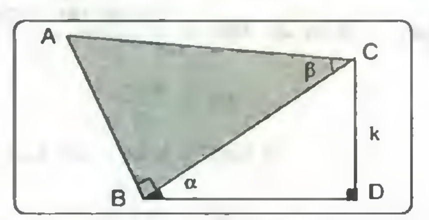
A) 0,5 (k cosec α tg β)

B) 0,5 (k sec α ctg β)

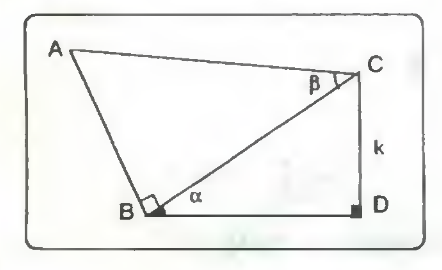
C) 0,5 (k^2 cosec^2 α tg β)

D) 0,5 (k^2 $\sec^2$ α tg β)

E) 0,5 (k^2 sen^2 α cotg β)



Resolución:



- En el ◺BDC: $\operatorname{cosec} \alpha = \dfrac{BC}{CD} = \dfrac{BC}{k}$

$\therefore \ BC = k \operatorname{cosec} \alpha$ ... I

- En el ◺ ABC: $\operatorname{tg} \beta = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AB}{k \operatorname{cosec} \alpha}$

$\therefore \ AB = k \operatorname{cosec} \alpha \operatorname{tg} \beta$ ... II

Luego: $\text{Area ABC} = \dfrac{\text{Cateto }(\overline{BC}) \times \text{Cateto }(\overline{AB})}{2}$ ... III

Reemplazamos (I) y (II) en (III):

$$\text{Area ABC} = \frac{k \text{ cosec } \alpha \times k \text{ cosec } \alpha \text{ tg } \beta}{2} = \frac{1}{2}\left(k^2 \text{ cosec}^2 \alpha \text{ tg } \beta\right)$$

$$\therefore \quad \text{Area ABC} = 0{,}5\left(k^2 \text{ cosec}^2 \alpha \text{ tg } \beta\right)$$ **Rpta. C**

Problema 8 **:** Hallar una fórmula para el área de un triángulo cualquiera en función de dos de sus lados y el ángulo que forman.

Demostración:

Por Geometría: $\text{Area } \Delta \text{ ABC} = \dfrac{\text{Base} \times \text{Altura}}{2}$

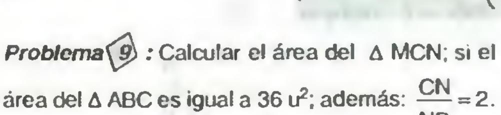
$$\text{Area } \Delta \text{ ABC} = \frac{b \times h}{2} \quad \ldots \text{ I}$$

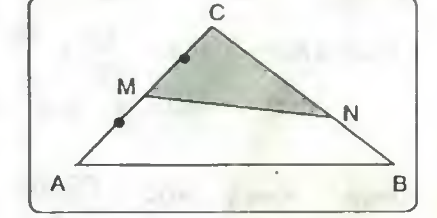
Por trigonometría: En el ◺ AHB:

$$\text{Sen A} = \frac{BH}{AB} = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \text{sen A} \quad \ldots \text{ II}$$

Reemplazamos (II) en (I): $\text{Area } \Delta \text{ ABC} = \dfrac{b \times c \cdot \text{sen A}}{2}$

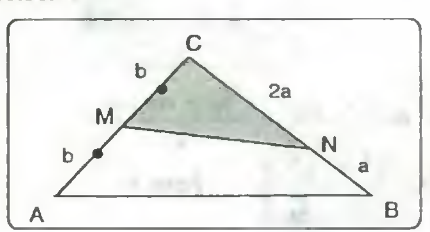
$$\therefore \quad \text{Area } \Delta \text{ ABC} = \left(\frac{b \times c}{2}\right) \text{sen A}$$ ***Fórmula***


Problema 9 **:** Calcular el área del Δ MCN; si el área del Δ ABC es igual a 36 u^2; además: $\dfrac{CN}{NB} = 2$.



A) 10 u^2 **B)** 11 u^2 **C)** 12 u^2
D) 13 u^2 **E)** 14 u^2

Resolución:



De la condición: $\dfrac{CN}{NB} = 2 \Rightarrow CN = 2\ NB$

Hacemos: $NB = a$

Donde: $CN = 2a$

Por dato: Area Δ ABC = 36 u^2

$$\left(\frac{AC \times CB}{2}\right) \text{sen } C = 36u^2 \Rightarrow \left(\frac{2b \times 3a}{2}\right) \text{sen } C = 36u^2$$

$$\therefore \quad a \cdot b \cdot \text{sen } C = 12\ u^2 \quad \ldots \text{I}$$

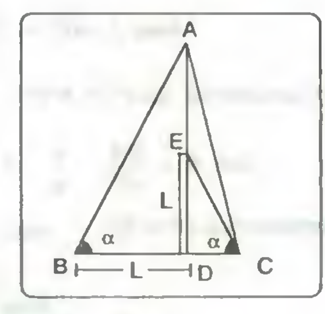
Ahora, calculamos el área MCN:

$$\text{Area } \Delta \text{ MNC} = \left(\frac{MC \times CN}{2}\right) \text{sen } C \Rightarrow \text{Area } \Delta \text{ MCN} = \left(\frac{b \times 2a}{2}\right) \text{sen } C$$

$$\therefore \quad \text{Area } \Delta \text{ MCN} = a \cdot b \cdot \text{sen } C \quad \ldots \text{II}$$

Reemplazamos (I) en (II): $\therefore$ Area Δ MCN = 12 u^2 **Rpta. C**

Problema 10 : En la figura mostrada: BD = DE = L. Calcular el área del triángulo ADC en función de "L"



A) $\frac{L^2}{2}$ B) $\frac{2L^3}{3}$ C) $\frac{L^2}{3}$

D) $\frac{L}{2}$ E) N.A.

Resolución:

- En el ◺ EDC: $\text{cotg } \alpha = \frac{DC}{DE} = \frac{DC}{L}$ $\therefore$ $DC = L \cdot \text{cotg } \alpha$ ... I

- En el ◿ ADB: $\text{tg } \alpha = \frac{AD}{BD} = \frac{AD}{L}$

$$\therefore \quad AD = L \cdot \text{tg } \alpha \quad \ldots \text{II}$$

Luego: Area ◺ ADC $= \frac{DC \times AD}{2}$ ... III

Reemplazamos (I) y (II) en (III):

$$\text{Area ◺ ADC} = \frac{L \cdot \text{cotg } \alpha \times L \cdot \text{tg } \alpha}{2} \Rightarrow \text{Area ◺ ADC} = \frac{L^2 \text{tg } \alpha \cdot \text{cotg } \alpha}{2}$$

Pero: $\text{tg } \alpha \cdot \text{cotg } \alpha = 1$ $\therefore$ Area ◺ ADC $= \frac{L^2 \cdot 1}{2} = \frac{L^2}{2}$ **Rpta. A**

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

NIVEL I

Ejercicio 1: En el triángulo rectángulo ACB; recto en "C", Si: Cos A = 5/13; Hallar el valor de "tg B"

A) 13/12 **B)** 12/5 **C)** 5/12
D) 12/13 **E)** 13/5

Ejercicio 2: En el triángulo rectángulo ABC; recto en "B", Si: tg C = 3/5; Hallar el valor de " sen A"

A) $\frac{\sqrt{34}}{34}$ **B)** $\frac{\sqrt{34}}{3}$ **C)** $\frac{5}{\sqrt{34}}$ **D)** $\frac{\sqrt{34}}{5}$ **E)** $\frac{5}{4}$

Ejercicio 3: En el triángulo ACB; recto en "C" se sabe que: Cotg A = 0,777 .... Hallar el valor de: "Sen B"

A) $\frac{\sqrt{130}}{9}$ **B)** $\frac{9}{7}$ **C)** $\frac{\sqrt{130}}{7}$

D) $\frac{9}{\sqrt{130}}$ **E)** $\frac{7\sqrt{130}}{130}$

Ejercicio 4: En el triángulo ABC; recto en "B"; se sabe que: 5 Cos A = 3; Hallar el valor de: $\frac{12(\text{tg } A + \text{cotg } A)}{5 \text{ sen } A}$

A) 6 **B)** 8 **C)** 5 **D)** 9 **E)** 12

Ejercicio 5: En el triángulo ACB; recto en "C", se sabe que: 7 Sen B = 5; Hallar el valor de: $\frac{4(\text{sen } A - \text{tg } A)}{3 \cos B}$

A) -15/8 **B)** -6/7 **C)** -8/15 **D)** -16/15 **E)** -5/7

Ejercicio 6: En el triángulo ABC, recto en "B"; se sabe que: Sen A = 0,272727... Hallar el valor de: "Sen C"

A) $\frac{2\sqrt{7}}{11}$ **B)** $\frac{4\sqrt{7}}{11}$ **C)** $\frac{11\sqrt{7}}{7}$ **D)** $\frac{4}{3}\sqrt{7}$ **E)** $\frac{11}{\sqrt{7}}$

Ejercicio 7: En el triángulo BAC; recto en "A" se sabe que: 3 Cos C = 1; Hallar el valor de: $\frac{(\text{Cotg}^2 B + \text{tg}^2 B)}{4}$

A) 65/18 **B)** 1/3 **C)** 32/65 **D)** 65/16 **E)** 65/32

Ejercicio 8: Si:

$$\text{Sen}\left[(a-b)+x-4^\circ\right]\cdot\text{Cosec}\left[5x-(b-a)-36^\circ\right]=1$$

Hallar el valor de "x"

A) 4° **B)** 6° **C)** 8° **D)** 12° **E)** 16°

Ejercicio 9: Si:

Sec (x - 3y) = Cosec (2y + x) ... I
Cotg (2x - y) = tg (60° - x) ... II

Hallar el valor de: E = 3x - 2y

A) 80° **B)** 100° **C)** 110° **D)** 120° **E)** 140°

Ejercicio 10: Si:

tg (x + y - 2z + 40°) . cotg [2x - (y + 2z)] - 1 = 0 ...I
Sen (3x - 20°) . Sec (50° - y) - 1 = 0 ... II

Calcular el valor de "x":

A) 18° **B)** 16° **C)** 32° **D)** 30° **E)** 24°

Clave de Respuestas

1. C	2. D	3. E	4. B	5. C
6. B	7. E	8. C	9. D	10. B

NIVEL II

Ejercicio 1: En un triángulo ABC; recto en "C", se tiene que:

tg B = Cos A (4 - Cosec A); Hallar: "Sen A"

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B)** -1 **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** 1 **E)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ejercicio 2 : En un triángulo BAC; recto en "A"; se tiene que:

Cos B . Cos C = 3/7; Hallar: "tg B + tg C"

A) 7/3 **B)** 7/5 **C)** 7/4 **D)** 7/2 **E)** 3/7

Ejercicio 3: En un triángulo BAC; recto en "A"; Hallar:"tg B + tg C"; Si:

$$\text{Sen } B + \text{Sen } C = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

A) 4 **B)** 8 **C)** 12 **D)** 2 **E)** $\sqrt{5}$

Ejercicio 4 : En un triángulo ABC; recto en "B"; Hallar: "tg A"; sabiendo que:

3 Sen A + 2 Sec C = 7

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** $\sqrt{8}$ **E)** $\frac{\sqrt{2}}{8}$

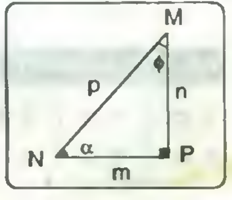
Ejercicio 5 : En un triángulo ABC (A = 90°), se cumple que: Sen B . Cos C = 5 Cos B

Hallar: $Q = 2 + \text{Cotg}^2 C - 5 \text{ Sec } B$

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 1,5 **E)** 2,5

Ejercicio 6 : De acuerdo a los datos de la figura adjunta, marca lo incorrecto.

A) $n = p \cos \phi$
B) $m = p \cos \alpha$
C) $n = m \text{ tg } \alpha$
D) $p = n \sec \phi$
E) $p = m \text{ cosec } \alpha$



Ejercicio 7 : Si los lados de un triángulo rectángulo PQR (recto en "R") son: p, q y r respectivamente, expresar en términos de los lados.

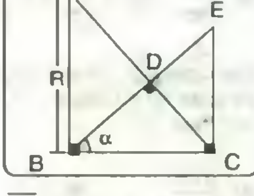
$$T = \frac{\text{Sec}^2 P + \text{Sec}^2 Q}{\text{tg } P + \text{tg } Q}$$

A) $\frac{r^2}{pq}$ **B)** $\frac{p^2}{rq}$ **C)** $\frac{q^2}{pr}$

D) $\frac{p^2+q^2}{p^2-q^2}$ **E)** $\frac{p+r}{q+r}$

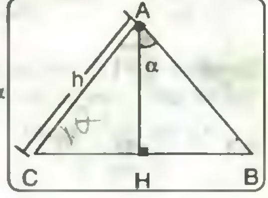
Ejercicio 8 : De la figura mostrada, Hallar: $\overline{DE}$

A) R Sen α . tg α
B) R Sen^2 α . tg α
C) R Sen α . tg^2 α
D) R Cos α . cotg α
E) R cos α . cotg^2 α



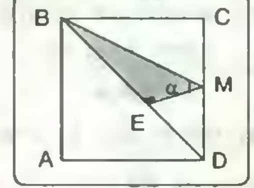
Ejercicio 9 : Hallar: $\overline{BH}$, en términos de "h" y "α" en el triángulo BAC, recto en "A".

A) h sen α . cos α
B) h tg α
C) h sec α . cosec α
D) h sen α . tg α
E) h sec α . tg α



Ejercicio 10 : En la figura mostrada: ABCD es un cuadrado; "M" es punto medio de CD. Hallar: "tg α"

A) 1 **B)** 2
C) 3 **D)** 1,5
E) 2,5



Ejercicio 11 : En un triángulo rectángulo ABC; recto en "B"; se cumple que:

$\text{Cos } A + \text{Cos } C = \sqrt{2}$ Calcular:

"Cosec A + Cosec C"

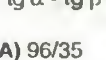
A) 1 **B)** $\sqrt{2}$ **C)** $2\sqrt{2}$ **D)** $4\sqrt{2}$ **E)** 3

Ejercicio 12: En un triángulo rectángulo ABC; recto en "C", y de área igual $8m^2$. Calcular:

$$R = b^2 \text{ Cotg } B + a^2 \text{ Cotg } A$$

A) $16\ m^2$ **B)** $24\ m^2$ **C)** $32\ m^2$
D) $36\ m^2$ **E)** $48\ m^2$

Ejercicio 13: De la figura mostrada: Calcular: "tg α - tg β"



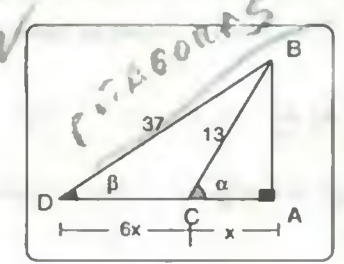
A) 96/35

B) 72/35

C) 14/5

D) 24/5

E) 37/13



Ejercicio 14: En un triángulo rectángulo ABC (recto en "B"), se cumple que:

$$b \text{tg } A + a \text{ Cosec } C = b \cdot S$$

Siendo: "S" el área del triángulo. Hallar el valor del cateto "c".

A) 1 **B)** 2 **C)** 1/2 **D)** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **E)** $\sqrt{2}$

Ejercicio 15: En un triángulo rectángulo se tiene que sus lados se encuentran en progresión aritmética. Determine la suma de los senos de sus ángulos agudos.

A) $\dfrac{17}{13}$ **B)** $\dfrac{23}{17}$ **C)** $\dfrac{7}{5}$

D) $\dfrac{31}{25}$ **E)** $\dfrac{41}{49}$

Ejercicio 16: De la figura mostrada. Hallar el valor de "x" si:

$$x = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} + \ldots\ldots\ldots$$

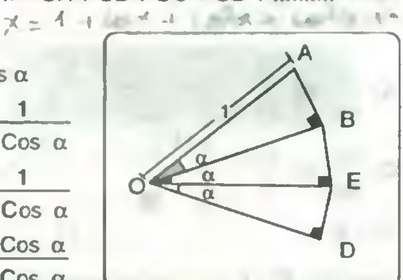
A) 1

B) Cos α

C) $\dfrac{1}{1-\text{Cos }\alpha}$

D) $\dfrac{1}{1+\text{Cos }\alpha}$

E) $\dfrac{1-\text{Cos }\alpha}{1+\text{Cos }\alpha}$



Ejercicio 17: De la figura mostrada. Hallar el área sombreada.

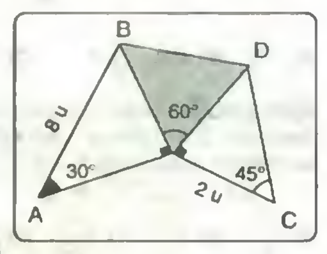
A) $4\ u^2$

B) $4\sqrt{3}\ u^2$

C) $2\sqrt{3}\ u^2$

D) $8u^2$

E) $6\sqrt{3}\ u^2$



Ejercicio 18: De la figura mostrada, calcule "tg θ".

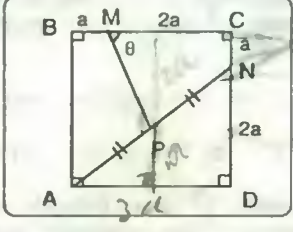
A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

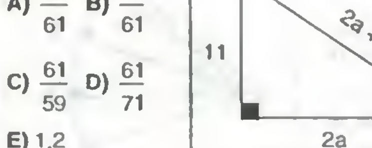


Clave de Respuestas

1. C	2. A	3. B	4. B	5. B
6. E	7. A	8. C	9. D	10. C
11. C	12. C	13. B	14. B	15. C
16. C	17. C	18. C		

NIVEL III

Ejercicio 1: De la figura mostrada; calcular: $R = \text{Sen}\,\alpha + \text{Cos}\,\alpha$



A) $\frac{59}{61}$ B) $\frac{71}{61}$

C) $\frac{61}{59}$ D) $\frac{61}{71}$

E) 1,2

Ejercicio 2: En un triángulo rectángulo BCA (recto en "C"). Calcular el lado "b" si:

$$\text{Sec}A \;.\; \text{Sec}B - \text{tg}A = \frac{8}{ab}$$

A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) 4 D) $\sqrt{2}/2$ E) $\sqrt{2}/4$

Ejercicio 3: En un triángulo rectángulo ABC (recto en "C"). Hallar el seno del ángulo "A", si se cumple que: 2 cotg A = 3 Cotg B

A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ C) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ D) $\frac{\sqrt{5}}{10}$ E) $\frac{2}{5}$

Ejercicio 4: En un triángulo rectángulo ABC (recto en "B") se sabe que un cateto es el triple del otro.

Calcular: $K = \text{Cotg}^2 A + \text{Cosec}^2 A$; Si: $\hat{C} > \hat{A}$

A) 17 B) 18 C) 19 D) 20 E) 21

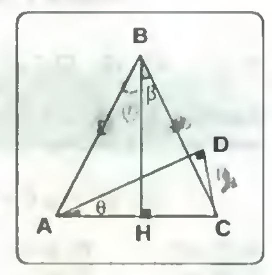
Ejercicio 5: En un triángulo rectángulo ABC (recto en "B") se cumple que: 4a = b + 4c. Calcular: K = Sen A - Sen C

A) 1/2 B) 1/3 C) 1/4 D) 1/5 E) 1/6

Ejercicio 6: En un triángulo rectángulo el menor cateto es el triple de la diferencia entre los otros 2 lados. Hallar la tangente del mayor ángulo agudo.

A) 1/2 B) 1/3 C) 4/3 D) 3/4 E) 2

Ejercicio 7: Si: $\overline{AB} = \overline{BC}$ y $\overline{CD} = 2$. Hallar: BH en términos de "β" y "θ".



A) Sen θ + Sen β

B) Cotg θ . Cosec β

C) tg θ . Cosec β

D) tg β . Sen θ

E) Cotg β . Cosec θ

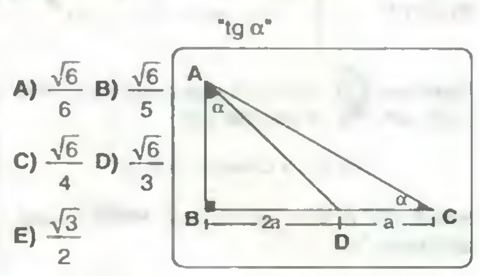
Ejercicio 8: En un triángulo BAC; recto en "C", se tiene:

tg B = Cos A (4 - Cosec A); Hallar: $\text{Sen}\left(\frac{\pi}{3} + A\right)$

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) -1 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ejercicio 9: De la figura mostrada. Hallar:

"tg α"



A) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ B) $\frac{\sqrt{6}}{5}$

C) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ejercicio 10: En un triángulo rectángulo ABC, se tiene que el ángulo recto está en "C" y además: $(\text{Cos}\,A - \text{Cos}\,B)^{-1} = 5$; Calcule el valor de:

$$E = \frac{\text{Sen}A + \text{Sen}B}{\text{tg}B - \text{tg}A}$$

A) 12/5 B) 7/5 C) 5/7 D) 12/7 E) 2

Ejercicio 11: Hallar $\overline{BD}$; si: $\overline{AM}$ es mediana.

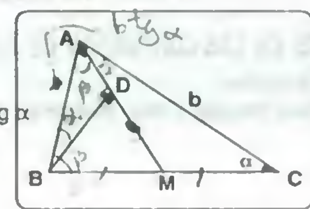
A) b Sec α

B) b Cosec α

C) b Sen α Cotg α

D) b Cos α tgα

E) b tg α



Ejercicio 12: Si: $K\ \text{Sen}^2 30° = \frac{3}{8}\ \text{Sec}\ 60°$

Calcular: Q = Sen 8K° . Sec 22 K° . Sec 60°

A) 3 B) 2 C) 4 D) 6 E) 5

Ejercicio 13: Calcular "x", si: ("x" → ángulo agudo)

tg 44°.Sen (2x + 5°).tg 46°.Cosec 15° = 2 Sen 30°

A) 3° B) 4° C) 5° D) 6° E) 7°

Ejercicio 14: Si:

M = Cos 30° + tg 60° + Cosec 60° y

R = 3M tg30° . Sec 60°. Hallar: $\text{Sen}\left(\frac{780°}{R}\right)$

A) 0,8 B) 0,6 C) $\sqrt{2}/2$ D) 1/2 E) $\sqrt{3}/2$

Ejercicio 15: Si se cumple que: Sen (x + 2y) - Cos (3x + y) = 0 Calcular el valor de:

$$M = \frac{\text{tg}\ (2x - 3y)}{\text{Cotg}\ (2x + 6y)}$$

A) 1/2 B) 1/3 C) 1 D) 2 E) 0,25

Ejercicio 16: Calcular el valor de "tg θ" en la figura mostrada:

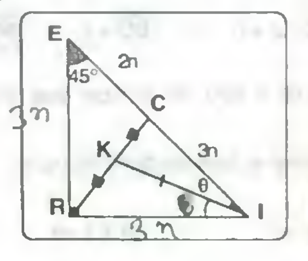
A) 5/11

B) 6/13

C) 7/12

D) 5/13

E) 7/10



Ejercicio 17: Siendo: Cos40° . Sec 2x = 2 Sen y = 1. Hallar el valor de: "x + y"; si: "x" é "y" son ángulos agudos.

A) 20° B) 30° C) 40° D) 50° E) 60°

Ejercicio 18: Si: Cos (x + 20°) = Sen (3x + 10°). Calcular el valor de: M = 4 Sen² 2x - tg 3x + Sec 4x; (x → ángulo agudo)

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Ejercicio 19: De la figura mostrada. Hallar: R = 3 Cotg β - Cotg α.

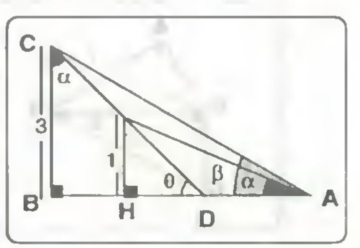
A) Cotg θ

B) 2 Cotg θ

C) 3 Cotg θ

D) 4 Cotg θ

E) 5 Cotg θ



Ejercicio 20: Del gráfico mostrado: Calcular: "tg θ" ("O" centro de la semicircunferencia).

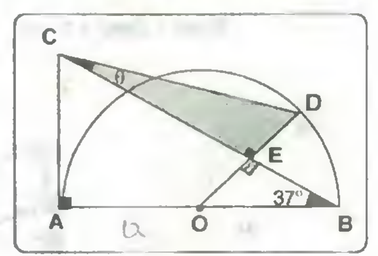
A) 4/7

B) 3/7

C) 4/17

D) 3/17

E) 5/17



Clave de Respuestas

1. B	2. B	3. B	4. C	5. C
6. C	7. E	8. D	9. D	10. A
11. D	12. B	13. C	14. E	15. C
16. A	17. D	18. C	19. B	20. C

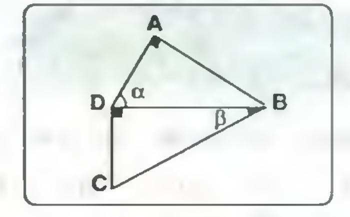
EJERCICIOS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Organizado por las Academias:

César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

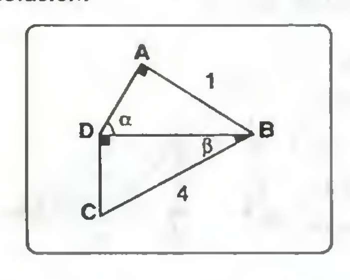
PROBLEMA 1 : De la figura. Calcular: $\overline{BD}$; si:

$\text{Sen}\,\alpha + \text{Cos}\,\beta = 1$; $\overline{AB} = 1$ y $\overline{BC} = 4$.



A) 4 B) 2 C) 1
D) 5 E) 3

Resolución:



- En el ◺DAB: $\text{Sen}\alpha = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \dfrac{1}{\overline{DB}} = \dfrac{1}{\overline{BD}}$

$\therefore \quad \text{Sen}\alpha = \dfrac{1}{\overline{BD}} \quad \ldots \text{(I)}$

- En el ◺CDB: $\text{Cos}\beta = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{BD}}{4}$

$\therefore \quad \text{Cos}\beta = \dfrac{\overline{BD}}{4} \quad \ldots \text{(II)}$

- (I) y (II), los reemplazamos en la expresión:

$\text{Sen}\alpha + \text{Cos}\beta = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\overline{BD}} + \dfrac{\overline{BD}}{4} = 1$; Resolviendo la ecuación:

$$4 + \overline{BD}^2 = 4\overline{BD}$$

$\overline{BD}^2 - 4\overline{BD} + 4 = 0$; factorizamos aplicando el método del Aspa:

$$\begin{array}{ccc} \overline{BD} & \diagdown\!\!\!\diagup & -2 \\ \overline{BD} & & -2 \end{array}$$

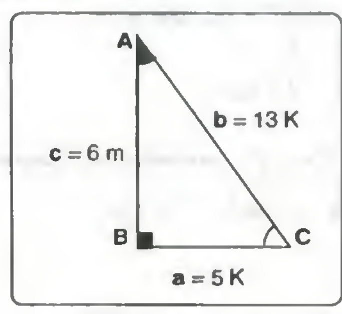
Donde: $(\overline{BD} - 2)\ (\overline{BD} - 2) = 0$; Igualando cada factor a cero, obtenemos:

i) $\overline{BD} - 2 = 0 \Rightarrow \overline{BD} = 2$ ii) $\overline{BD} - 2 = 0 \Rightarrow \overline{BD} = 2$ $\therefore$ $\overline{BD} = 2$ **Rpta. B**

PROBLEMA 2 : En un triángulo rectángulo ABC, (B = 90°). Se cumple que: $\text{Sen}\,A = \dfrac{2x+1}{6x+1}$ y $\text{Cos}\,C = \dfrac{3x-1}{7x-1}$; si el cateto mayor mide 6 m. Calcular el área de dicho triángulo.

A) 12 m² B) 9 m² C) 6 m² D) 7,5 m² E) 8,5 m²

Resolución:



• ***Por propiedad:***

$$\text{Sen A} = \text{Cos C}$$

Donde: $\dfrac{2x+1}{6x+1} = \dfrac{3x-1}{7x-1}$; resolviendo la ecuación:

$$(2x+1)(7x-1) = (3x-1)(6x+1)$$

$$14x^2+5x-1 = 18x^2-3x-1$$

$$8x = 4x^2 \Rightarrow \therefore \; x=2$$

Luego: $\text{Sen}\,A = \dfrac{2x+1}{6x+1} = \dfrac{2(2)+1}{6(2)+1} = \dfrac{5}{13}$

$\text{Sen}\,A = \dfrac{5}{13}$ → 5K **(cateto opuesto)**
→ 13 K **(hipotenusa)**

• En el ⊿ ABC; aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 \Rightarrow (13K)^2 = (5K)^2 + (6m)^2$$

$$169K^2 - 25K^2 = 36m^2$$

$144K^2 = 36m^2$; extraemos raíz cuadrada a ambos miembros: $\sqrt{144K^2} = \sqrt{36m^2} \Rightarrow 12K = 6m \Rightarrow K = \dfrac{1}{2}m$

• Ahora, hallamos el área del triángulo ABC:

$$\text{Area}\ ⊿\ ABC = \frac{\text{Cateto}(\overline{BC}) \times \text{Cateto}(\overline{AB})}{2} = \frac{(5K)\times(6m)}{2}$$

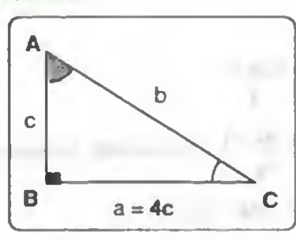
$$\text{Area}\ ⊿\ ABC = 15Km = 15\left(\frac{1}{2}m\right)m = 7{,}5m^2$$

$\therefore$ Area ⊿ ABC = 7,5 m² **Rpta. D**

PROBLEMA 3 : En un triángulo rectángulo ABC (B = 90°) se sabe que: tg A . Cotg C = 16. Calcular: P = 17(Sen C + Cos A)

A) $4\sqrt{17}$ B) $2\sqrt{17}$ C) 17 D) 34 E) N.A

Resolución:



• De la condición: tg A . cotg C = 16; obtenemos:

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{a}{c} = 16$$

$a^2 = 16c^2$; extraemos raiz cuadrada a ambos miembros: $\sqrt{a^2} = \sqrt{16c^2}$ $\therefore$ $a = 4c$

• En el ⊿ ABC, aplicamos el Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 \Rightarrow b^2 = (4c)^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = 17c^2 \Rightarrow \therefore \; b = \sqrt{17}c$$

• De la expresión: P = 17 (SenC + CosA); obtenemos:

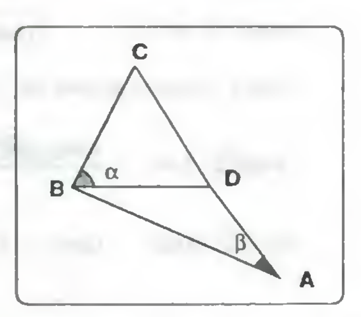
$$P = 17\left(\frac{c}{b} + \frac{c}{b}\right) \Rightarrow P = 17\left(\frac{2c}{b}\right)$$

- El valor de $b = \sqrt{17}\,c$, lo reemplazamos en esta última expresión:

$$P = 17\left(\frac{2c}{\sqrt{17}c}\right) = 17\left(\frac{2\sqrt{17}}{17}\right) \Rightarrow \therefore \; P = 2\sqrt{17}$$

Rpta. B

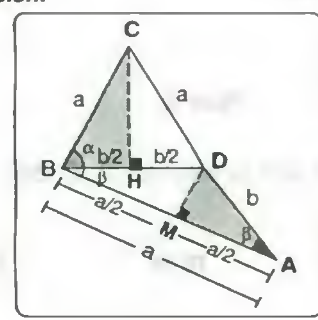
PROBLEMA 4 : De la figura mostrada: $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$; $\overline{AD} = \overline{BD}$. Calcular: "Cos α . Cos β"



A) 0,50 B) 0,35 C) 0,25

D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ E) 0,1

Resolución:



• Hacemos: $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = a$ y $\overline{AD} = \overline{BD} = b$

• Como se podrá observar los triángulos BCD y ADB, resultan ser isósceles.

• En el ⊿ BHC:

$$\text{Cos}\alpha = \frac{\overline{BH}}{\overline{BC}} = \frac{b/2}{a} \Rightarrow \therefore \; \text{Cos}\alpha = \frac{b}{2a}$$

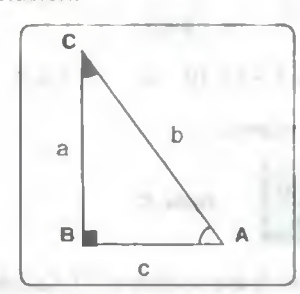
• En el ◺ DMA: $\text{Cos}\beta = \dfrac{\overline{MA}}{\overline{DA}} = \dfrac{a/2}{b} \Rightarrow \therefore \text{Cos}\beta = \dfrac{a}{2b}$

Luego: $\text{Cos}\alpha \cdot \text{Cos}\beta = \dfrac{b}{2a} \cdot \dfrac{a}{2b} = \dfrac{1}{4} = 0,25 \Rightarrow \therefore$ $\text{Cos}\alpha \cdot \text{Cos}\beta = 0,25$ **Rpta. C**

PROBLEMA 5 : En un triángulo rectángulo ABC (B = 90°) se cumple que: tg A = 3 tg C. Calcular: Q = 2 (Sec A + Sen C)

A) 3 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 4 **E)** 8

Resolución:



• De la expresión: tg A = 3 tg C; obtenemos:

$$\frac{a}{c} = 3\left(\frac{c}{a}\right) \Rightarrow a^2 = 3c^2 \quad ...(I)$$

• Por el Teorema de Pitágoras: $b^2 = a^2 + c^2$ ...(II)

Reemplazamos (I) en (II):

$$b^2 = 3c^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = 4c^2 \Rightarrow \therefore b = 2c \quad ...(III)$$

• De la expresión: $Q = 2(\text{Sec}A + \text{Sen}C)$; obtenemos:

$$Q = 2\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \Rightarrow Q = 2\left(\frac{b^2+c^2}{bc}\right) \quad ...(IV)$$

Reemplazamos (III) en (IV): $Q = 2\left(\dfrac{4c^2+c^2}{(2c)\,.\,c}\right) = 2\left(\dfrac{5c^2}{2c^2}\right) \Rightarrow \therefore$ $Q = 5$ **Rpta. B**

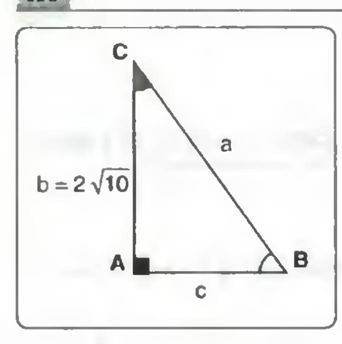
PROBLEMA 6 : En un triángulo rectángulo BAC (A = 90°), se sabe que: b . Cosec B + a . Sen C = 10 y b = $2\sqrt{10}$. Calcular la tangente del mayor ángulo agudo.

A) $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ **B)** $\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$ **C)** $\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$ **D)** $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ **E)** N.A.

Resolución:

• De la expresión: b . Cosec B + a . Sen C = 10; obtenemos:

$$\cancel{b} \cdot \frac{a}{\cancel{b}} + \cancel{a} \cdot \frac{c}{\cancel{a}} = 10 \Rightarrow a + c = 10 \quad ...(I)$$



• Por el Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\underbrace{a^2 - c^2} = b^2$$

$$(a+c)(a-c) = (2\sqrt{10})^2 \Rightarrow (a+c)(a-c) = 40 \quad ...(II)$$

Reemplazamos (I) en (II):

$$10(a-c) = 40 \Rightarrow \therefore a - c = 4 \quad ...(III)$$

• De las expresiones (I) y (III); obtenemos:

$$\begin{cases} a + c = 10 & ...(I) \\ a - c = 4 & ...(III) \end{cases}$$

$$\Sigma \text{M.A.M:} \quad 2a = 14 \Rightarrow a = 7$$

Reemplazamos el valor de a = 7; en (I): $a + c = 10 \Rightarrow 7 + c = 10 \Rightarrow \therefore c = 3$

Luego, calculamos la tangente del mayor ángulo agudo, veamos:

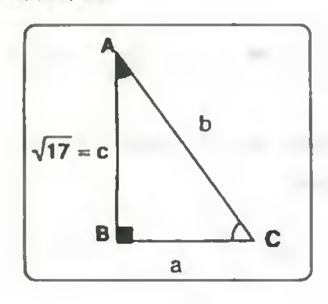
$$\text{tg } B = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c} = \frac{2\sqrt{10}}{3} \Rightarrow \therefore \text{tg } B = \frac{2\sqrt{10}}{3}$$

Rpta. C

PROBLEMA 7 : Si en el triángulo rectángulo el cuadrado de uno de sus catetos es 17. Calcular el coseno del mayor ángulo agudo, siendo los lados restantes números enteros.

A) $\frac{\sqrt{17}}{8}$ B) $\frac{\sqrt{17}}{9}$ C) $\frac{\sqrt{9}}{17}$ D) $\frac{8}{9}$ E) $\frac{9}{8}$

Resolución:



• **Por dato:** $c^2 = 17 \Rightarrow \therefore c = \sqrt{17}$

• Por el Teorema de Pitágoras: $a^2 + c^2 = b^2$

$$a^2 + 17 = b^2$$

Recuerda que:

A mayor ángulo se opone mayor lado.

$$\underbrace{b^2 - a^2} = \underbrace{17}$$

$$(b + a)(b - a) = 17 \times 1$$

$$\begin{rcases} \text{i)} & b + a = 17 \\ \text{ii)} & b - a = 1 \end{rcases}$$

$$\Sigma \text{M.A.M.} \quad 2b = 18 \Rightarrow \therefore b = 9$$

El valor de b = 9; lo reemplazamos en (i): $9 + a = 17 \Rightarrow \therefore\ a = 8$

Luego, calculamos el valor del coseno del mayor ángulo agudo:

$$\text{Cos } A = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{17}}{9} \Rightarrow \therefore\ \text{Cos } A = \frac{\sqrt{17}}{9}$$ **Rpta. B**

PROBLEMA 8 : Siendo α y θ los menores valores posibles, para los cuales se tiene que: Sen $(2\alpha + \theta)° = \text{Cos } (2\theta + \alpha)°$. Calcular el valor de: $E = \frac{\text{Sen }(3\alpha)°}{\text{Cos }(3\theta)°} + \text{Cosec}^2\ (\alpha + \theta)°$

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

Resolución:

- De la condición: Sen $(2\alpha + \theta)° = \text{Cos } (2\theta + \alpha)°$, obtenemos:

$$(2\alpha + \theta)° + (2\theta + \alpha)° = 90° \Rightarrow 3\alpha + 3\theta = 90° \Rightarrow \therefore\ \alpha + \theta = 30$$

- De la expresión: $3\alpha + 3\theta = 90° \Rightarrow 3\alpha = 90° - 3\theta$

Los valores hallados, los reemplazamos en la expresión "E":

Recuerda que:

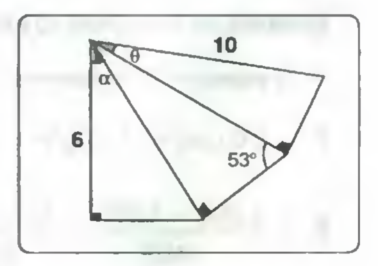
- Sen (90° - x) = Cos x
- Cosec 30° = 2

$$E = \frac{\text{Sen }(90 - 3\theta)°}{\text{Cos }(3\theta)°} + \text{Cosec}^2\ (30)°$$

$$E = \frac{\text{Cos }(3\theta)°}{\text{Cos }(3\theta)°} + (2)^2 = 1 + 4 = 5$$

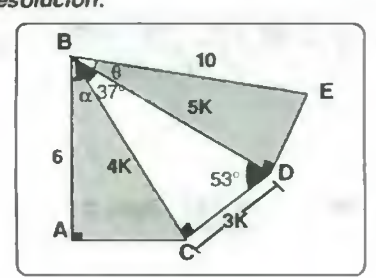
$\therefore\ E = 5$ **Rpta. C**

PROBLEMA 9 : Del esquema mostrado, determine: $E = \text{Cos } \alpha \cdot \text{Cos}\theta$



A) 2/3 B) 4/3 C) 3/2
D) 3/4 E) 5/3

Resolución:



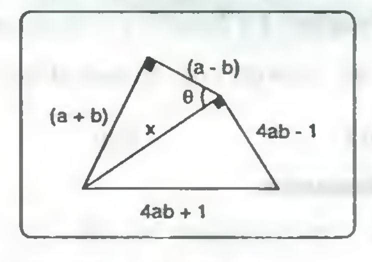
- En el ⊿BAC: $\text{Cos } \alpha = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = \frac{6}{4K}$

$$\therefore\ \text{Cos } \alpha = \frac{3}{2K}$$

- En el ◺BDE: $\text{Cos } \theta = \frac{\overline{BD}}{\overline{BE}} = \frac{5K}{10} \Rightarrow \therefore \text{Cos } \theta = \frac{K}{2}$

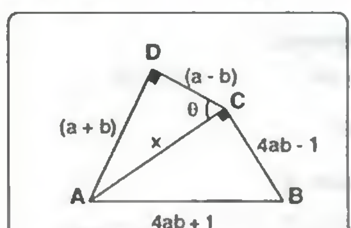
Luego: $E = \text{Cos } \alpha \cdot \text{Cos } \theta = \frac{3}{2K} \cdot \frac{K}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \therefore E = \frac{3}{4}$ Rpta. D

PROBLEMA 10 : Del esquema mostrado: Calcule el valor de: $E = 2\,\text{Cosec}^2\theta + 3\text{cotg}^2\theta$



A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución:



- En el ◺ADC: Por el Teorema de Pitágoras:

$$x^2 = (a+b)^2 + (a-b)^2 \Rightarrow \therefore x^2 = 2(a^2 + b^2) \quad ...(I)$$

- En el ◺ ACB: Por el Teorema de Pitágoras:

$$(4ab+1)^2 = x^2 + (4ab-1)^2$$

$$16a^2b^2 + 8ab + 1 = x^2 + 16a^2b^2 - 8ab + 1 \Rightarrow \therefore 16ab = x^2 \quad ...(II)$$

Igualamos las expresiones (I) y (II): $2(a^2+b^2) = 16\,ab \Rightarrow \therefore a^2 + b^2 = 8ab \quad ...(III)$

- De la expresión "E"; obtenemos:

$$E = 2\,\text{Cosec}^2\theta + 3\,\text{Cotg}^2\theta = 2\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}\right)^2 + 3\left(\frac{\overline{DC}}{\overline{AD}}\right)^2$$

$$E = \frac{2\,(\overline{AC})^2 + 3\,(\overline{DC})^2}{(\overline{AD})^2} = \frac{2x^2 + 3\,(a-b)^2}{(a+b)^2} \Rightarrow E = \frac{2x^2 + 3(a^2+b^2-2ab)}{a^2+b^2+2ab} \quad ...(IV)$$

- Reemplazamos (II) y (III) en (IV):

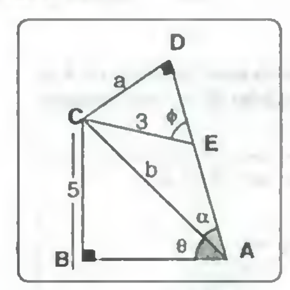
$$E = \frac{2\,(16ab) + 3\,(8ab - 2ab)}{8ab + 2ab} = \frac{50ab}{10ab} = 5 \Rightarrow \therefore E = 5$$ Rpta. E

PROBLEMA 11 : En la figura mostrada; se tiene que: $\overline{CE} = 3$ y $\overline{BC} = 5$. Calcule el valor de:

$$E = \frac{\text{Sen}\theta \cdot \text{Sen}\phi + \text{Sen}\alpha}{\text{Sen}\theta \cdot \text{Sen}\phi - \text{Sen}\alpha}$$

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Resolución:



- En el ◺ ABC: $\text{Sen }\theta = \frac{5}{b}$ ...(I)
- En el ◺ CDE: $\text{Sen }\phi = \frac{a}{3}$ ...(II)
- En el ◺ CDA: $\text{Sen }\alpha = \frac{a}{b}$ ...(III)

Reemplazamos (I), (II) y (III) en la expresión "E":

$$E = \frac{\frac{5}{b}\cdot\frac{a}{3} + \frac{a}{b}}{\frac{5}{b}\cdot\frac{a}{3} - \frac{a}{b}} = \frac{\frac{8}{3}\left(\frac{a}{b}\right)}{\frac{2}{3}\left(\frac{a}{b}\right)} = 4 \Rightarrow \quad \therefore \; E = 4$$

Rpta. B

PROBLEMA 12 : Se tiene que: Sen $(3x + y)°$. Cosec $(x + 3y)° = 1$.

Calcule el valor de: $E = \frac{\text{Sen }(2x+y)°}{\text{Sen }(2y+x)°} + \frac{\text{Sen }(x+30)°}{\text{Cos }(60-y)°}$

A) 1 B) 3 C) 5 D) 4 E) 2

Resolución:

- De la condición:

$\text{Sen }(3x+y)° \cdot \text{Cosec }(x+3y)° = 1$

Recuerda que:

$\text{Sen }\alpha = \text{Cos }(90° - \alpha)$

$$\text{Sen }(3x+y)° = \frac{1}{\text{Cosec }(x+3y)°} \Rightarrow \text{Sen }\underline{(3x+y)°} = \text{Sen }\underline{(x+3y)°}$$

Por comparación: $3x + y = x + 3y \Rightarrow \therefore \; x = y$

Reemplazamos x = y; en la expresión "E": $E = \frac{\text{Sen }(2x+x)°}{\text{Sen }(2x+x)°} + \frac{\text{Sen }(x+30)°}{\text{Cos }(60-x)°}$

$$E = 1 + \frac{\text{Cos }[90° - (x+30)°]}{\text{Cos }(60-x)°} \Rightarrow E = 1 + \frac{\text{Cos }(60-x)°}{\text{Cos }(60-x)°} = 1 + 1 = 2 \quad \therefore \; E = 2$$

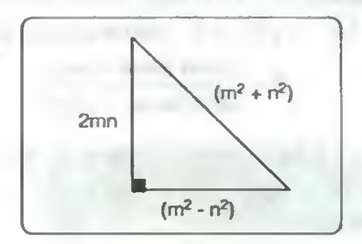
Rpta. E

ESTUDIO DEL TRIÁNGULO PITAGÓRICO

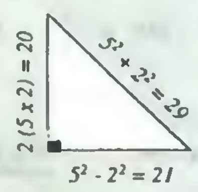
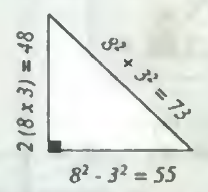
- Todo triángulo pitagórico tiene sus lados expresados por números enteros positivos. Dichos lados tienen la siguiente forma:

  Siendo "m" y "n" números enteros positivos.

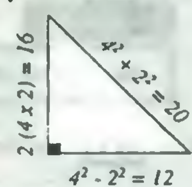
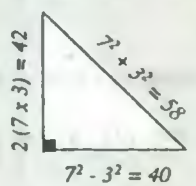
  Además: $m > n$



Observación: *Si elegimos valores de "m" y "n" (números primos enteros entre sí) tal que (m + n) resulte un número impar, se obtienen triángulos pitagóricos cuyas medidas de sus lados también son números primos entre sí.*

Ejemplo: *Cuando: m = 5 y n = 2* 	***Ejemplo:*** *Cuando: m = 8 y n = 3* 

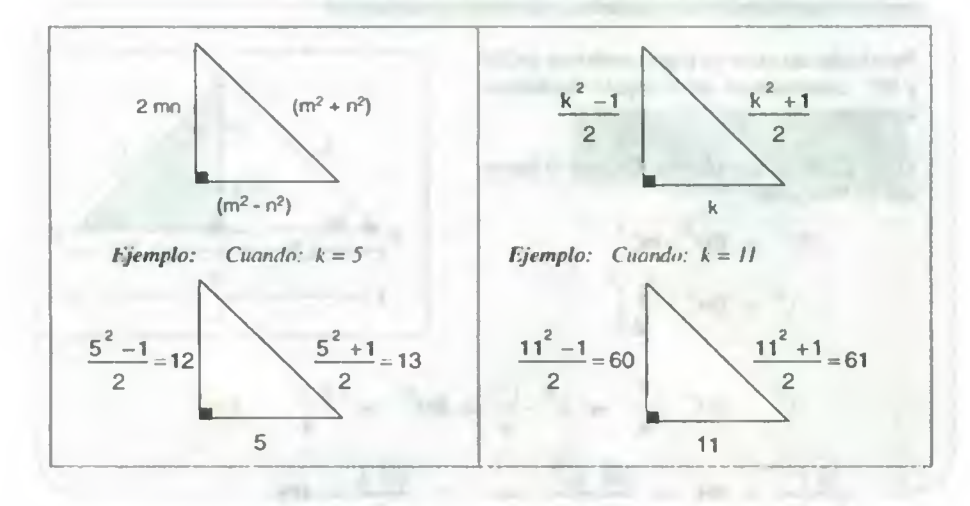
Observación: *Cuando los valores de "m" y "n" (no son primos entre sí) o cuya suma de m y n sea un número par se obtiene triángulos pitagóricos cuyas medidas de sus lados esta expresada por números que tienen un divisor común.*

Ejemplo: *Cuando: m = 4 y n = 2* 	***Ejemplo:*** *Cuando: m = 7 y n = 3* 

CASO PARTICULAR: *Cuando se tiene dos números enteros (m y n), pero consecutivos, entonces se cumplira:*

$$m = \frac{k+1}{2} \quad y \quad n = \frac{k-1}{2}$$; Siendo: k = # impar.

Luego:



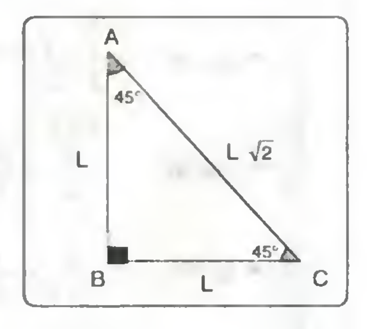
3.1.4 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS ESPECIALES O NOTABLES.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DE 45°

- Sean los catetos del ◺ ABC: AB = BC = L

  Por el teorema de Pitágoras:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$AC^2 = L^2 + L^2 = 2L^2$$
$$AC = \sqrt{2L^2} = \sqrt{2}\sqrt{L^2}$$
$$\therefore \quad AC = \sqrt{2}\,L$$



Luego, calculamos las razones trigonométricas del ángulo de 45°.

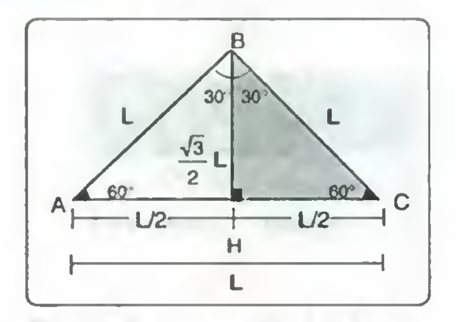
$$\text{sen } 45° = \frac{\cancel{L}}{\cancel{L}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{cosec } 45° = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \sqrt{2}$$

$$\cos 45° = \frac{\cancel{L}}{\cancel{L}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sec 45° = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{tg } 45° = \frac{\cancel{L}}{\cancel{L}} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \Rightarrow \text{cotg } 45° = \frac{1}{1} = 1$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS DE 30° Y 60°

- Para hallar las razones trigonométricas de 30° y 60°, construimos un triángulo equilátero, veamos:



- En el ◺ BHC; calculamos BH, por el teorema de Pitágoras

$$BC^2 = BH^2 + HC^2$$

$$L^2 = BH^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$L^2 = BH^2 + \frac{L^2}{4} \Rightarrow L^2 - \frac{L^2}{4} = BH^2 \Rightarrow \frac{3L^2}{4} = BH^2$$

$$\sqrt{\frac{3L^2}{4}} = BH \Rightarrow \frac{\sqrt{3}\,\sqrt{L^2}}{\sqrt{4}} \Rightarrow \quad \therefore \frac{\sqrt{3}\,L}{2} = BH$$

Luego calculamos las razones trigonométricas de 30° y 60° en el BHC.

$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{L}{2}}{L} = \frac{1}{2} \qquad \text{sen } 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}L}{2}}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\frac{\sqrt{3}L}{2}}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{\frac{L}{2}}{L} = \frac{1}{2}$$

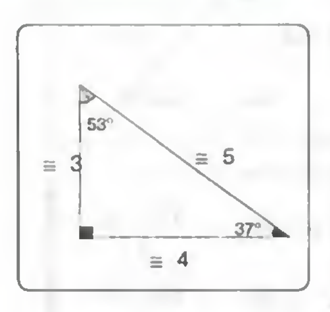
$$\text{tg } 30° = \frac{\frac{L}{2}}{\frac{\sqrt{3}L}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{tg } 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}L}{2}}{\frac{L}{2}} = \sqrt{3}$$

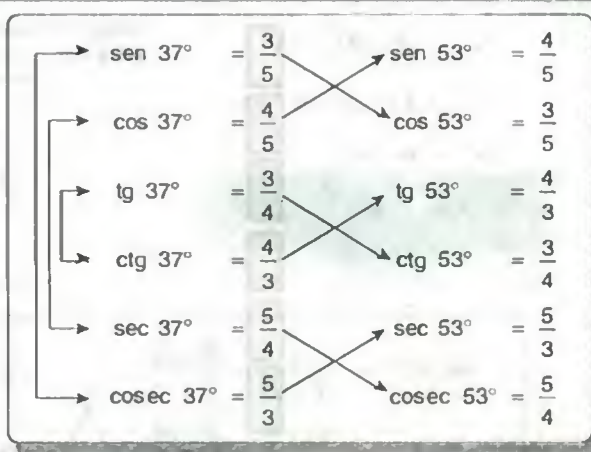
$$\text{ctg } 30° = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \qquad \text{ctg } 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \sec 60° = 2$$

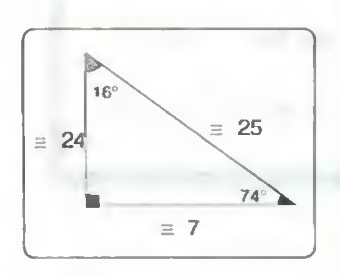
$$\text{cosec } 30° = \frac{2}{1} = 2 \qquad \text{cosec } 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

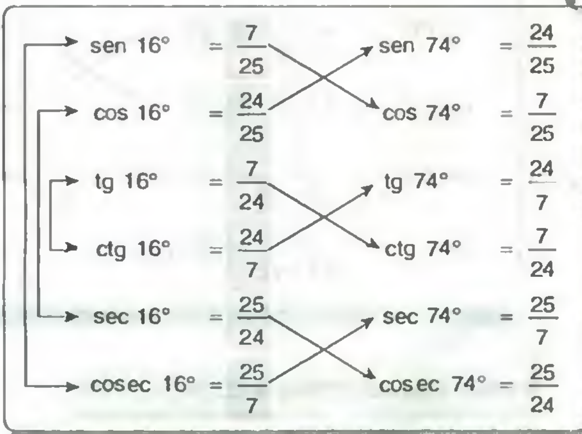
Razones Trigonométricas de los ángulos de 37° y 53° (Aproximadamente)



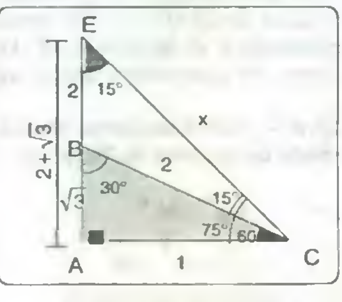


Razones Trigonométricas de 16° y 74° (Aproximadamente)





Razones Trigonométricas de 15° y 75°



Para hallar las razones trigonométricas de los ángulos de 15° y 75° tomamos como referencia el ⊿ Notable de 30° y 60°, luego prolongamos AB (Como se muestra en la figura), hasta obtener un isósceles EBC, siendo: EB = BC = 2

- En el ⊿ EAC: Calculamos el valor de "x" por medio del teorema de Pitágoras:

$$EC^2 = EA^2 + AC^2$$

$\sqrt{A} \pm \sqrt{B} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}} \qquad C = \sqrt{A^2 - B} = \sqrt{A^2 - \sqrt{B}^2}$

$$x^2 = \left(2+\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2$$

$$x^2 = 4 + 4\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 + 1$$

$$x^2 = 8 + 4\sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{8+4\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad x = \sqrt{6}+\sqrt{2}$$

Luego, calculamos las razones trigonométricas de 15° y 75°

15° $\left(2+\sqrt{3}\right)$ $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$ 75° 1

$$\text{sen } 15° = \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15° = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{tg } 15° = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$$

$$\text{ctg } 15° = \frac{2+\sqrt{3}}{1} = 2+\sqrt{3}$$

$$\sec 15° = \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \sqrt{6}-\sqrt{2}$$

$$\text{cosec } 15° = \frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$$

$$\text{sen } 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 75° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{tg } 75° = 2+\sqrt{3}$$

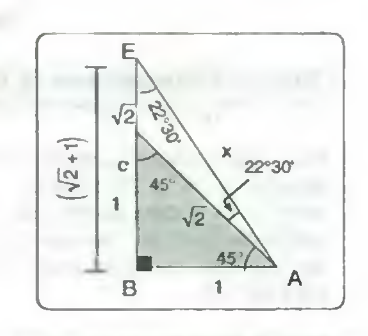
$$\text{ctg } 75° = 2-\sqrt{3}$$

$$\sec 75° = \sqrt{6}+\sqrt{2}$$

$$\text{cosec } 75° = \sqrt{6}-\sqrt{2}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE 22°30' Y 67°30'

Para hallar las razones trigonométricas de los ángulos de 22°30' y 67°30' tomamos como referencia el ⊿ Notable de 45°, luego procedemos de igual manera que el caso anterior.



- En el ⊿ EBA: Calculamos el valor de "x" por medio del teorema de Pitágoras:

$$EA^2 = EB^2 + BA^2$$

$$x^2 = \left(\sqrt{2}+1\right)^2 + (1)^2$$

$$x^2 = 2+2\sqrt{2}+1+1 = 4+2\sqrt{2} = 2\left(2+\sqrt{2}\right) \quad \therefore \quad x = \sqrt{2\left(2+\sqrt{2}\right)} = \sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Luego, calculamos las razones trigonométricas de 22°30' y 67°30'.

$$\text{sen } 22°30' = \frac{1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad\quad \text{sen } 67°30' = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos 22°30' = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \quad\quad \cos 67°30' = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\text{tg } 22°30' = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1 \quad\quad \text{tg } 67°30' = \sqrt{2}+1$$

$$\text{ctg } 22°30' = \frac{\sqrt{2}+1}{1} = \sqrt{2}+1 \quad\quad \text{ctg } 67°30' = \sqrt{2}-1$$

$$\sec 22°30' = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right) \quad\quad \sec 67°30' = \sqrt{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$$

$$\text{cosec } 22°30' = \sqrt{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) \quad\quad \text{cosec } 67°30' = \sqrt{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$$

Observación: Haciendo uso de triángulos rectángulos, también podemos calcular las razones trigonométricas de la mitad de uno de sus ángulos agudos, veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1 : En un triángulo rectángulo ABC (recto en "C"), donde: a = 8 y b = 15. Calcular: "$\text{tg } \frac{A}{2}$"

Resolución:

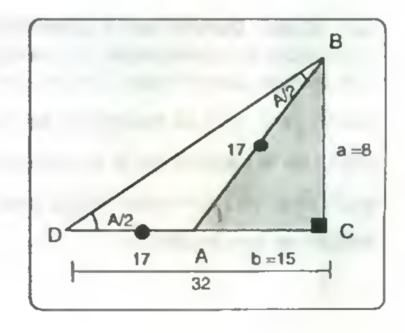
- En el ⊿ BCA: Calculamos AB por medio del teorema de Pitágoras:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 \Rightarrow AB^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225$$

$$AB^2 = 289 \Rightarrow AB = \sqrt{289} \Rightarrow \therefore \quad AB = 17$$

Luego, en el ⊿ DCB: Calculamos: "$\text{tg } \frac{A}{2}$"

$$\text{tg}\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{BC}{DC} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$



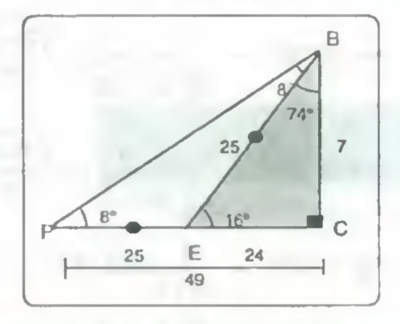
Ejemplo (2) : Haciendo uso del triángulo notable de 16° y 74°. Calcular: "tg 8°"

Resolución:

- En el $\triangle$ BCP:

$$\text{tg } 8° = \frac{BC}{PC} = \frac{7}{49}$$

$$\therefore \quad \text{tg } 8° = \frac{1}{7}$$



CASOS DE RACIONALIZACIÓN QUE DEBE TENERSE EN CUENTA EN ESTE CAPÍTULO:

1er. Caso: Denominador Monomio: Para racionalizar el denominador de una fracción, siendo dicho denominador un monomio, se multiplican los dos términos de la fracción por el radical del mismo indice que el del denominador, y que multiplicado por el radical que se desea eliminar y de como producto una cantidad racional.

Ejemplos:

a) $\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3\cdot 3}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5\cdot 3}}{\sqrt{3\cdot 3}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$

$$\therefore \quad \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

Esta fórmula sólo se cumple, cuando el denominador es raíz cuadrada.

2do. Caso: Denominador Binomio: Para racionalizar el denominador de una fracción, siendo dicho denominador un binomio de la forma: $\left(a \pm \sqrt{b}\right)$ se multiplican los dos términos de la fracción por la expresión conjugada $\left(a \mp \sqrt{b}\right)$ del denominador y luego se simplifican los resultados.

Ejemplos:

a) $\frac{5}{2+\sqrt{3}} = \frac{5\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)} = \frac{5\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2^2-\sqrt{3}^{\,2}\right)}$

$$\frac{5}{2+\sqrt{3}} = \frac{5\left(2-\sqrt{3}\right)}{(4-3)} = 5\left(2-\sqrt{3}\right)$$

b) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \dfrac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)} = \dfrac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}^2-\sqrt{2}^2\right)}$

$$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{(5-2)} = \frac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{3}$$

c) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \dfrac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} = \dfrac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2\right)} = \dfrac{\sqrt{3}^2-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}^2}{(3-2)}$

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{3-2\sqrt{6}+2}{1} = \frac{5-2\sqrt{6}}{1} = 5-2\sqrt{6}$$

$$\frac{a}{n\pm\sqrt{m}} = \frac{a\left(n\mp\sqrt{m}\right)}{n^2-m} \quad ; \quad \frac{b}{\sqrt{p}\pm\sqrt{q}} = \frac{b\left(\sqrt{p}\mp\sqrt{q}\right)}{p-q}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Reducir: $Q = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}+2} + \sqrt{3}$

A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{5}$ C) 2 D) $-\sqrt{5}$ E) $-\sqrt{6}$

2. Racionalizar: $\dfrac{10\sqrt{7}}{2\sqrt{7}-3\sqrt{2}}$

A) $3-2\sqrt{14}$ B) $14-2\sqrt{14}$

C) $\sqrt{14}(3+\sqrt{14})$ D) $2\sqrt{14}$

E) $14+2\sqrt{14}$

3. Luego de racionalizar: $\dfrac{1}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}}$; dar el denominador:

A) 2 B) 3 C) 6 D) 9 E) 18

4. Hallar el valor equivalente de:

$$E = \sqrt{\frac{6+\sqrt{12}}{3-\sqrt{3}}}$$

A) $0,5\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$ B) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

C) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ D) $\sqrt{3}+1$

E) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

5. Dar racionalizar lo siguiente:

$$\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{8}}$$

A) $\sqrt[4]{2}$ B) $0,5\sqrt[4]{2}$ C) $\sqrt{2}$ D) $0,5\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

6. Luego de racionalizar y reducir:

$\dfrac{5}{\sqrt{75}-\sqrt{45}}$; el denominador resulta:

A) 5 B) 6 C) 30 D) 3 E) 1

7. Racionalizar: $P = \dfrac{2}{\sqrt{3}+1} - \dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

A) $-2\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) 2 D) 0 E) -2

8. Hallar el equivalente, con denominador racionalizado, de: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$

A) $\dfrac{\sqrt[6]{2}}{2}$ B) $\dfrac{\sqrt[6]{32}}{2}$ C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

D) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$ E) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$

9. Calcular: $E = \dfrac{6}{\sqrt[3]{9}\bullet\sqrt[3]{6}} - \sqrt[3]{4}$

A) 1 B) 2 C) 0 D) -1 E) -2

10. Racionalizando: $\dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{6}+3}{2\sqrt{\frac{1}{8}}-5}$; resulta una cantidad negativa cuyo denominador es:

A) 29 B) 39 C) 49 D) 59 E) 69

11. Señalar el factor racionalizante de:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}$$

A) $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}$ B) $\sqrt[3]{4^2}-\sqrt[3]{2^2}$

C) $2\sqrt[3]{2}+2+\sqrt[3]{4}$ D) $\sqrt[3]{4}+2+\sqrt[3]{2}$

E) $\sqrt[3]{4}-2+\sqrt[3]{2}$

12. Si: $a=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$; $b=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

Dar el valor de: $E = a^3b - ab^3$

A) $-24\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $-4\sqrt{2}$

D) $-6\sqrt{2}$ E) $-24\sqrt{3}$

13. Proporcionar el equivalente de:

$$\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

A) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2}-1$

D) $\sqrt{2}+1$ E) $\sqrt{3}-1$

14. Sean: $A = \dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$; $B = \dfrac{1}{\sqrt[4]{b^3}}$

racionalizar: $(aA + bB)^{-1}$; indicando el valor del denominador resultante.

A) a + b B) ab C) a - b
D) $a^2 + b^2$ E) 1

CLAVE DE RESPUESTAS

1. B	2. C	3. E	4. D	5. B
6. B	7. E	8. C	9. C	10. C
11. C	12. A	13. A	14. E	

CUADRO RESUMEN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS NOTABLES

R.T. \ < s.	45°	30°	60°	37°	53°	16°	74°	15°	75°	22°30'	67°30'
Sen	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{24}{25}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
Cos	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{24}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
Tg	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{24}{7}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$
Cotg	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{24}{7}$	$\frac{7}{24}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{2}-1$
Sec	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{25}{24}$	$\frac{25}{7}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$\sqrt{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$	$\sqrt{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$
Cosec	$\sqrt{2}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{7}$	$\frac{25}{24}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$	$\sqrt{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS ESPECIALES O NOTABLES

Ejercicio 1 **:** Calcular el valor de: $M = \dfrac{\text{Cos}^2 30° \cdot \text{Cosec } 45° - \text{Sen } 45° \cdot \text{Cotg}^2 30°}{\text{Sen } 45° \cdot \text{tg } 60°}$

Resolución:

Sabemos que:

$\text{Cos } 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\text{Cosec } 45° = \sqrt{2}$
$\text{Sen } 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\text{Cotg } 30° = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$

Reemplazando dichos valores en la expresión "M"; obtenemos:

$$M = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\frac{3}{4}\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\left(\frac{3\sqrt{2} - 6\sqrt{2}}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3}}$$

$$M = \frac{-\frac{3\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{3}}{2}} = \frac{-3 \cdot 2}{4\sqrt{3}} = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{2\cdot 3} \Rightarrow \quad \therefore \; \boxed{M = -\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \textbf{Rpta.}$$

Ejercicio 2 **:** Si: "x" es agudo. Hallar: "tg x"; siendo: $\text{Cos }(3x - 60°) = \dfrac{\sqrt{3}\ \text{tg } 45°}{2}$

Resolución:

Sabemos que: $\text{tg } 45° = 1$ Donde: $\text{Cos }(3x - 60°) = \dfrac{\sqrt{3 \times 1}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; pero : $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \text{Cos } 30°$

$$\text{Cos }(3x - 60°) = \text{Cos } 30°$$

Por comparación: $3x - 60° = 30° \Rightarrow 3x = 90° \quad \therefore \; x = 30°$

Luego: $\text{tg } x = \text{tg } 30° = \boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$ **Rpta.**

Ejercicio* ③ *: Si: Sen 30° = a . Cos 60° ... (1) ; Cos 45° = b . cosec 45° ... (2)

Sec 60° = 4c . tg 45° ...(3) ; Hallar: "a + b + c"

Resolución:

Sabemos que:

$\text{Sen } 30° = \frac{1}{2}$	$\text{Cos } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\text{Cos } 60° = \frac{1}{2}$
$\text{Sec } 60° = 2$	$\text{Cosec } 45° = \sqrt{2}$	$\text{tg } 45° = 1$

Reemplazando valores; obtenemos:

De (1): $\frac{1}{2} = a \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \therefore\ a = 1$ De (2): $\frac{\sqrt{2}}{2} = b \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \therefore\ b = \frac{1}{2}$

De (3): $2 = 4c \cdot 1 \Rightarrow \therefore\ c = \frac{1}{2}$ Luego: $a + b + c = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$ **Rpta.**

Ejercicio* ④ *: Si: Sen (2x + 20°) = Cos (2x - 50°), Calcular el valor de:

$$y = \text{Sen } x \,.\, \text{Cos } \frac{3x}{2} \cdot \text{tg } 2x$$

Resolución:

Aplicando la propiedad: $\boxed{\text{Sen } A = \text{Cos } B \Rightarrow A + B = 90°}$

Obtenemos que: $(2x + 20°) + (2x - 50°) = 90° \Rightarrow 4x = 120° \Rightarrow \therefore\ x = 30°$

Reemplazando el valor de : x = 30°; en la expresión "y"; obtenemos:

$$y = \text{Sen } 30° \cdot \text{Cos } \frac{3 \cdot 30}{2} \cdot \text{tg } 2 \cdot 30°$$

$$y = \text{Sen } 30° \cdot \text{Cos } 45° \cdot \text{tg } 60°$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow \therefore\ y = \frac{\sqrt{6}}{4}$$ **Rpta.**

TALLER DE EJERCICIOS Nº 8

EJERCICIO 1 : Calcular el valor de:

$y = \text{Sen } 60° \cdot \text{Cos } 45° + \text{Sen } 30° \cdot \text{Sec } 45° \cdot \text{tg } 30°$

Resolución:

Rpta. $y = \frac{5}{12}\sqrt{6}$

EJERCICIO 2 : Reducir:

$$E = \frac{\text{Sen } 30° \cdot \text{Cos } 45° \cdot \text{tg } 60°}{\text{tg } 45° \cdot \text{Cosec } 60° \cdot \text{Sec } 30°}$$

Resolución:

Rpta. $E = \frac{3\sqrt{6}}{16}$

EJERCICIO 3 : Si:

$\text{tg } \alpha = \text{Sen}^2 45° + \text{Cos } 60°$; Hallar: "Sen α" ("α" es un ángulo agudo)

Resolución:

Rpta. $\text{Sen } \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

EJERCICIO 4 : Si θ = 10° ; Hallar el valor de:

$$M = \frac{\text{Sen } 3\theta \cdot \text{Cos } 6\theta \cdot \text{Cosec } \frac{9\theta}{2}}{\text{tg } 3\theta \cdot \text{Sec } 6\theta \cdot \text{Cotg } \frac{9\theta}{2}}$$

Resolución:

Rpta. $M = \frac{\sqrt{6}}{8}$

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS ESPECIALES O NOTABLES TIPO I.B.M.

Ejercicio 1 : Si: sen α sec $(\alpha + 60°) = 1$, siendo "α" ángulo agudo. Calcular:

$$M = \text{sen } 2\alpha \cos 3\alpha \text{ tg } 4\alpha$$

A) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ B) $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ C) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ D) $\sqrt{6}$ E) $2\sqrt{6}$

Resolución:

De la expresión sen α sec $(\alpha + 60°) = 1$; obtenemos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{1}{\sec(\alpha+60°)} \Rightarrow \; ; \text{ pero : } \cos(\alpha+60°) = \frac{1}{\sec(\alpha+60°)}$$

$$\text{sen } \alpha = \cos(\alpha+60°) \; ; \text{ (por Co−Razón trigonométrica)}$$

$$\alpha+(\alpha+60°) = 90° \Rightarrow 2\alpha = 30° \Rightarrow \alpha = \frac{30°}{2} \Rightarrow \alpha = 15°$$

Luego, reemplazamos el valor de "α" en la expresión "M"

$$M = \text{sen } 2(15°) \cos 3(15°) \text{ tg } 4(15°)$$

$$M = \text{sen } 30° \cos 45° \text{ tg } 60° = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{4} \Rightarrow \therefore M = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

Rpta. B

Ejercicio 2: Calcular:

$$Q = \text{sen } 30° \text{ sen } 37° \text{ sen } 45° \text{ sen } 60° \text{ sen } 53°$$

A) $\dfrac{\sqrt{6}}{5}$ B) $\dfrac{3\sqrt{6}}{5}$ C) $\dfrac{3\sqrt{6}}{25}$ D) $\dfrac{\sqrt{6}}{25}$ E) $\dfrac{3\sqrt{6}}{50}$

Resolución:

Reemplazando por el valor de cada razón trigonométrica, obtenemos que:

$$Q = \text{sen } 30° \text{ sen } 37° \text{ sen } 45° \text{ sen } 60° \text{ sen } 53°$$

$$Q = \frac{1}{\not{2}} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\not{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\not{4}}{5} = \frac{3\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{50}$$

$$Q = \frac{3\sqrt{2 \times 3}}{50} = \frac{3\sqrt{6}}{50} \Rightarrow \therefore Q = \frac{3\sqrt{6}}{50}$$

Rpta. E

Ejercicio (3) : Si:

$a = \sqrt{3}\ \cos 60^\circ\ tg\ 30^\circ\ cosec\ 30^\circ$ y

$b = \sqrt{2}\ \sec 45^\circ\ tg\ 45^\circ\ sen\ 30^\circ$

Hallar: K = a + b + ab

A) 1 B) -1 C) 3 D) -2 E) 0

Resolución:

Reemplazando por el valor de cada razón trigonométrica, obtenemos que:

$$a = \sqrt{3}\ \cos 60^\circ\ tg\ 30^\circ\ cosec\ 30^\circ \Rightarrow a = \sqrt{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{2}{1} \quad \therefore\ a = 1$$

$$b = \sqrt{2}\ \sec 45^\circ\ tg\ 45^\circ\ sen\ 30^\circ \Rightarrow b = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{2 \times 2}}{2} \quad \therefore\ b = 1$$

Luego, reemplazamos los valores de "a" y "b" en la expresión "K"

$$K = a + b + ab = 1 + 1 + 1 \times 1 \quad \therefore\ \boxed{K = 3}$$ **Rpta. C**

Ejercicio (4): Los catetos de un triángulo rectángulo ABC, son:

$a = sen^2\ 45^\circ\ \sec 60^\circ$
$b = \cos^2 30^\circ\ \cos 37^\circ$

Hallar la tangente del menor ángulo agudo.

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{5}{3}$ E) 1

Resolución:

En primer lugar, hallamos el valor numérico de cada cateto veamos:

$$a = sen^2\ 45^\circ\ \sec 60^\circ \Rightarrow a = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}^2}{2^2} \cdot \frac{2}{1} \Rightarrow \therefore\ a = 1$$

$$b = \cos^2 30^\circ\ \cos 37^\circ \Rightarrow b = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{4}{5} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}^2}{2^2} \cdot \frac{4}{5} \Rightarrow \therefore\ b = \frac{3}{5}$$

Ahora, llevamos los valores de "a" y "b" a un triángulo rectángulo por ser ambos los catetos de dicho triángulo.

Luego: $$tg\ \theta = \frac{b}{a} = \frac{\frac{3}{5}}{1} = \frac{3}{5} \Rightarrow \therefore\ \boxed{tg\ \theta = \frac{3}{5}}$$ **Rpta. B**

Propiedad: *En todo triángulo se cumple que: a menor lado, se opone menor ángulo y a mayor lado, se opone mayor ángulo.*

Ejercicio 5 : Hallar el valor de:

$$E = \frac{3tg^2 30° \ sec^2 45°}{1 - cotg^2 60°}$$

A) 3 B) $2\sqrt{3}$ C) 3
D) $3\sqrt{3}$ E) $4\sqrt{3}$

Resolución:

Reemplazamos por los valores de cada razón trigonométrica, obtenemos:

$$E = \frac{3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2}{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{3\left(\frac{\sqrt{3}^2}{3^2}\right)\cdot(2)}{1 - \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{3^2}}$$

$$E = \frac{3\left(\frac{3}{9}\right)\cdot 2}{1 - \left(\frac{3}{9}\right)} = \frac{\frac{18}{9}}{\frac{6}{9}} = \frac{18}{6} = 3 \Rightarrow \therefore \boxed{E = 3} \text{ Rpta. C}$$

Ejercicio 6 : Si: tg θ = sen² 45° + cos 60°.
Hallar: "sen θ" ("θ" es un ángulo agudo)

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{5}$

Resolución:

De la condición: tg θ = sen² 45° + cos 60°; obtenemos:

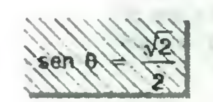
$$tg\ \theta = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2^2} + \frac{1}{2}$$

$$tg\ \theta = \frac{2}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{tg\ \theta = 1} \ ; \ pero: \ 1 = tg\ 45°$$

$$tg\ \theta = tg\ 45° \Rightarrow \boxed{\theta = 45°}$$

Luego, calculamos el valor de: "sen θ"

$$sen\ \theta = sen\ 45° \Rightarrow \therefore$$



$$sen\ \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Rpta. B

Ejercicio 7 : Si:

$$W = \frac{54 \times cosec\ 53° \times cosec\ 37°}{5 \times tg\ 37°}$$

Hallar: sen (W°)

A) 0 B) 1 C) $\frac{4}{5}$
D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{1}{2}$

Resolución:

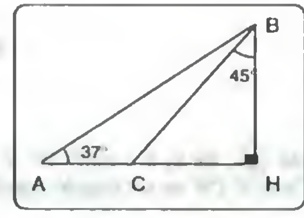
De la expresión "W", obtenemos:

$$W^{\circ} = \frac{54^{\circ} \times \text{cosec } 53^{\circ} \times \text{cosec } 37^{\circ}}{5 \times \text{tg } 37^{\circ}} = \frac{54^{\circ} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{3}}{5 \times \frac{3}{4}} = \frac{54^{\circ} \times 5}{3 \times 3}$$

$$W^{\circ} = 6^{\circ} \times 5 \quad \Rightarrow \quad W = 30^{\circ}$$

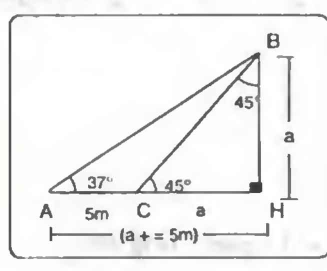
Luego: $\text{sen } (W^{\circ}) = \text{sen } 30^{\circ} = \frac{1}{2}$ **Rpta. E**

Ejercicio 8 : De la figura mostrada: Hallar BH, si: AC = 5 m



A) 10 m **B)** 11 m **C)** 12 m
D) 14 m **E)** 15 m

Resolución:



Incógnita: BH = a = ?

- En el $\triangle$ AHB:

$$\text{tg } 37^{\circ} = \frac{BH}{AH} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{a}{(a+5m)}$$

$$3\ (a+5m) = 4a \Rightarrow 3a+15m = 4a$$

$\therefore$ a = 15m **Rpta. E**

Ejercicio 9 : ¿Cuál es incorrecta?

A) sen 60° = cos 30° sec 60° **B)** sen 60° = 2 sen 30° cos 30°
C) tg 60° = cos 30° + sen 60° **D)** cotg 45° + tg 45° = 4 sen 30°
E) sec 45° - sen 45° = cos 45°

Resolución:

- Calculamos el valor de cada una de las expresiones, veamos:

A) sen 60° = cos 30° sec 60° $\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2$ **(Falso)**

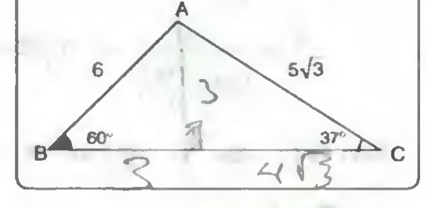
B) sen 60° = 2 sen 30° cos 30° $\Rightarrow$ $\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(Verdadero)**

C) tg 60° = cos 30° + sen 60° $\Rightarrow$ $\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(Verdadero)**

D) cotg 45° + tg 45° = 4 sen 30° $\Rightarrow$ $1 + 1 = 4\times\frac{1}{2}$ **(Verdadero)**

E) sec 45° - sen 45° = cos 45° $\Rightarrow$ $\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **(Verdadero)**

Ejercicio : De la figura mostrada. Hallar: BC

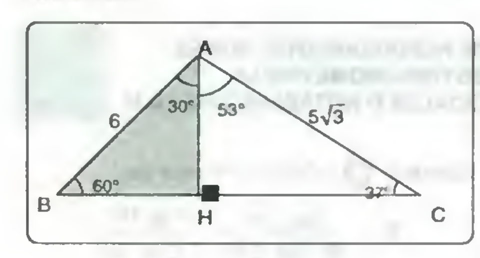


A) $3 + 4\sqrt{3}$ B) $4 + 3\sqrt{3}$

C) $2 + 4\sqrt{3}$ D) $4 + \sqrt{3}$

E) $2 + 3\sqrt{3}$

Resolución:



- Trazamos AH perpendicular a BC, obteniéndose así dos triángulos notables, como se muestra en la figura.

- En el ⊿ BHA:

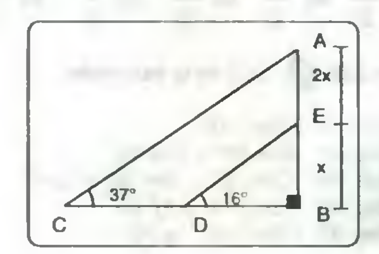
$$\text{sen } 30° = \frac{BH}{BA} = \frac{BH}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BH}{6}$$

$$BH = \frac{6}{2} \Rightarrow BH = 3$$

- En el ⊿ AHC: $\cos 37° = \frac{HC}{AC} = \frac{HC}{5\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{HC}{5\sqrt{3}} \Rightarrow HC = 4\sqrt{3}$

De la figura: BC = BH+HC ➡ $\therefore$ $BC = 3+4\sqrt{3}$ **Rpta. A**

Ejercicio **11** : De la figura mostrada, hallar "x"



A) 29 B) 31 C) 33
D) 35 E) 37

Resolución:

- En el $\triangle$ DBE:

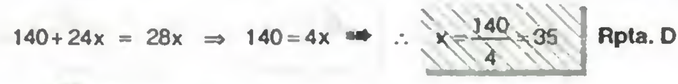
$$tg\ 16° = \frac{EB}{DB} = \frac{x}{DB} \Rightarrow \frac{7}{24} = \frac{x}{DB}$$

$$\therefore\quad DB = \frac{24x}{7}$$

- En el $\triangle$ ABC:

$$tg\ 37° = \frac{AB}{CB}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3x}{\left(20+\frac{24x}{7}\right)} \Rightarrow 3\left(20+\frac{24x}{7}\right) = 12x \Rightarrow 20+\frac{24x}{7} = 4x$$



$$140+24x = 28x \Rightarrow 140 = 4x \Rightarrow \therefore\ x = \frac{140}{4} = 35$$ **Rpta. D**

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS ESPECIALES O NOTABLES TIPO I.B.M.

NIVEL I

Ejercicio 1: Hallar: "M"; Si: a = 15°.

$$\sqrt{3}\ Sec\ 2a = 8 + 4\ sec\ 4a - 2M$$

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

Ejercicio 2: Si: $tg\ \alpha = Sen^2\ 45° + Cos\ 60°$, Hallar: "Sen α" ("α" es ángulo agudo).

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{3}{5}$

Ejercicio 3: Cuál es la incorrecta:

A) $Sen\ 30° = Sen^2\ 45°$
B) $Sec\ 45° \cdot Cos\ 60° = Cos\ 45°$
C) $Sec\ 60° \cdot Cotg\ 30° = Sen\ 30° + tg\ 45°$
D) $Sec\ 60° + Cotg\ 45° = tg^2\ 60°$
E) $Sec\ 30° = Sec^2\ 45° \cdot tg\ 30°$

Ejercicio 4: Calcular el valor de:

$$E = \frac{Sen\ 74°}{8\ Cos\ 37°} - \frac{3\ tg\ 16°}{7\ Cos\ 53°}$$

A) $\frac{-7}{120}$ **B)** $\frac{7}{120}$ **C)** $\frac{7}{20}$ **D)** $\frac{-7}{20}$ **E)** $\frac{20}{7}$

Ejercicio 5: Si: $tg\ (4x-8)^0 = \sqrt{\sqrt{3} \cdot Cotg\ 30°}$

Hallar el valor de "x":

A) 15 **B)** 16 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 20

Ejercicio 6: Si: $W_x = Sen\ (5x)^0 + Cos\ (5x)^0$, Calcular el valor de:

$$L = W_6 + W_9 - \sqrt{2} - Sen\ 30° \cdot tg\ 60°$$

A) 0 **B)** 0,1 **C)** 0,4 **D)** 0,5 **E)** 1

Ejercicio : Si: a = 30°; Calcular el valor de:

P = Sen a . Cos a + Sec a . tg a . Sen 2a

A) $5\sqrt{3}$ B) $7\sqrt{3}$ C) $\frac{7\sqrt{3}}{12}$

D) $\frac{12\sqrt{3}}{7}$ E) $\frac{12}{7}$

Ejercicio : Cuál es incorrecta:

A) Sen 30° < Sen 60° B) Cos 60° < Cos 30°
C) Sen 30° < Cos 30° D) Tg 45° < Sen 60°
E) Tg 45° < Cotg 30°

Ejercicio : Cuál es la incorrecta:

A) Sen 60° = 2 Sen 30° . Cos 30°
B) Sec 45° . Cosec 45° = 4 Sen 30°
C) Sen 30° + Sen 30° = Sen 60°
D) Tg 60° = Sen 60° + Cos 30°
E) Tg 45° + Cotg 45° = Cosec 30°

Clave de Respuestas

1. E	2. B	3. C	4. A	5. C
6. D	7. C	8. D	9. C	

NIVEL II

Ejercicio : Hallar el valor numérico de:

$$Q = \frac{\text{Sec } 53°\cdot\text{Cotg } 60° + \text{Sen } 37°\cdot\text{Sen } 60°}{\left(\text{Cosec}^2 45° - 1\right)\text{tg } 60° - \frac{1}{3}\text{ Cosec } 60°}$$

A) $\frac{11}{10}$ B) $\frac{7}{11}$ C) $\frac{7}{3}$ D) $\frac{13}{17}$ E) $\frac{7}{13}$

Ejercicio : Hallar el valor de:

$$P = (\text{tg } 45°\cdot\text{Sen } 30°)^{\text{Sen } 30°\,\text{Cotg } 45°}$$

A) 2 B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ D) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ E) 0

Ejercicio : Siendo los catetos de un triángulo rectángulo.

a = Sen 45° . tg 30° . Sen 60° y

b = Sen 37° . tg 53° . Cos 45°

Calcular el valor de la hipotenusa.

A) $\frac{\sqrt{179}}{20}$ B) $\frac{\sqrt{87}}{20}$ C) $\frac{\sqrt{178}}{20}$

D) $\frac{\sqrt{89}}{20}$ E) $\sqrt{178}$

Ejercicio : Calcular el valor de "H"; Si: α = 35° ; β = 10°

$$H = \frac{\text{Cos }(2\alpha - \beta) + \text{tg }(8\beta - \alpha)}{\text{Cos}\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) + \text{tg }(2\alpha - \beta)}$$

A) $\sqrt{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) 2

Ejercicio : ¿A qué es igual:

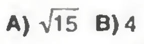
$$E = \sqrt{\text{Sec } 37° + \text{Sen}^2 45° - \text{tg } 45°}\ ?$$

A) E = tg 60° B) E = tg² 37°
C) E = Sen 60° D) E = Sen 45°
E) E = Sen² 60°

Ejercicio : Si: Cotg α = Cos 45° ("α" es agudo); entonces: "sec α"; es:

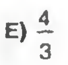
A) Sec 45° B) Cosec 30° C) Sec 30°
D) tg 30° E) tg 60°

Ejercicio 7: Hallar: "Cotg a"; a partir de la figura:

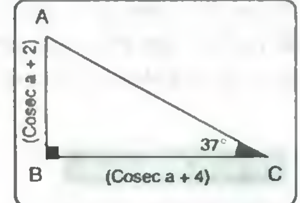


A) $\sqrt{15}$ B) 4

C) 2 D) $\frac{3}{4}$



E) $\frac{4}{3}$



Ejercicio 8: Siendo: "a" y "b" agudos, además:

$$\text{tg } 2a = \text{cotg } 20° \text{ y cotg } 3b = \text{tg } 60° ;$$

Hallar: Sec (a + b)

A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) $\sqrt{3}$ D) 3 E) 4

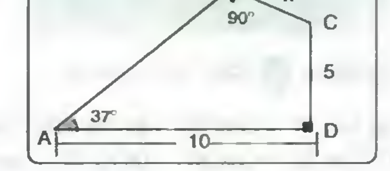
Ejercicio 9: Hallar: "Sen α" ("α" es agudo); siendo:

$$\text{Sen } (3\alpha + 20°) \,.\, \text{Sec } (2\alpha - 10°) = 1$$

A) 0,75 B) 0,6 C) 0,28 D) 0,96 E) 0,5

Ejercicio 10: Del gráfico adjunto. Calcular el valor de "x"

A) 3
B) 4
C) 5
D) 2
E) 1



Clave de Respuestas

1. A	2. B	3. C	4. C	5. C
6. E	7. A	8. A	9. C	10. D

NIVEL III

Ejercicio 1: Siendo:

$$A_N = \text{tg } (N \,.\, 15)° + \text{Cotg } (N \,.\, 15)°$$

Hallar: $S = A_2 + A_3 - A_4$

A) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$ D) 4 E) 2

Ejercicio 2: Hallar el valor de: y = 70 K; siendo:

$$K = \frac{3\text{ Cos}^2 30° - \text{Sen}^2 60°}{4\text{ tg}^2 30° \cdot \text{Sec } 60° - 1} - \frac{2\text{ Cos}^2 45°}{3 - 2\text{ Cotg}^2 60°}$$

A) $\frac{33}{70}$ B) $\frac{70}{33}$ C) $\frac{33}{1}$ D) $\frac{1}{33}$ E) 66

Ejercicio 3: ¿Cuál o cuáles son correctas?

I. Si: 30° < 45° ⇒ Sen 30° < Sen 45°
II. Si: 45° < 60° ⇒ Cos 45° < Cos 60°
III. Si: 37° < 53° ⇒ Cotg 37° < Cotg 53°

A) I B) II C) III D) I y II E) II y III

Ejercicio 4: Para "α" y "θ" ángulos agudos se cumple que:

$$3\text{ Sen } \alpha = \sqrt{1 + \text{tg } 45°}$$

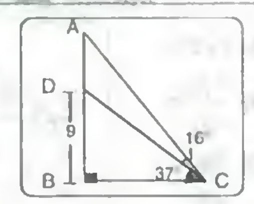
$$4\text{ Cos } \theta = \sqrt{4\text{ Cos}60° + 4\text{ Sen}20°\text{ Cosec}20°}$$

Hallar el valor de: $M = 2\sqrt{7}\text{ tg } \alpha \cdot \text{Sen } \theta$

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{7}$

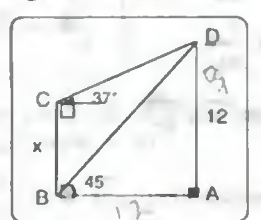
Ejercicio 5: De la figura mostrada; Hallar: AD.

A) 7
B) 8
C) 9
D) 10
E) 11



Ejercicio : De la figura mostrada; Hallar: "x"

A) 1
B) 1,5
C) 2
D) 2,5
E) 3



Ejercicio : Si: $tg(3\alpha + 45°) \cdot tg(2\alpha + 20°) = 1$. Calcular el valor de:

$$M = Sen\,6\alpha \cdot Cos\,9\alpha \cdot tg\,12\alpha$$

A) $\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $3\sqrt{6}$ D) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{6}}{4}$

Ejercicio Si: $x = \sqrt{2}$; $y = \sqrt{3}$; $z = \sqrt{6}$ ¿Cuál es incorrecta?

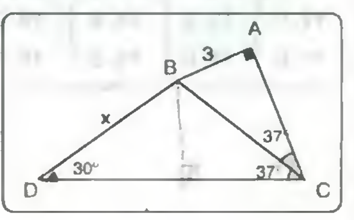
A) $Sen\ 45° = \frac{1}{x}$ B) $tg\ 60° = \frac{z}{x}$

C) $Sen\ 45° = \frac{z}{y}$ D) $Sen\ 60° = \frac{y}{x^2}$

E) $tg\ 37° = \frac{y^2}{x^4}$

Ejercicio : De la figura mostrada; Hallar "x".

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6



Ejercicio : Si: "α" y "θ" son ángulos agudos y se cumple que:

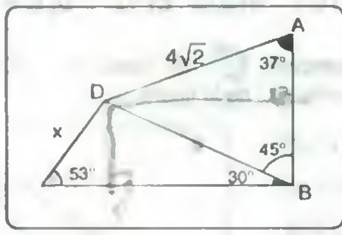
$$Sen(3\alpha + 20°) = Cos(60° - \theta) \text{ y}$$
$$tg\,3\theta \cdot tg(5\alpha - 20°) = 1$$

Calcular: $tg\left(2\theta + \frac{\alpha}{2}\right)$

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{7}{24}$ D) 1 E) $\sqrt{3}$

Ejercicio : De la figura mostrada: Hallar: "x"

A) 1
B) $\sqrt{2}$
C) 2
D) 3
E) 4



Ejercicio : Si: "α" y "β" son ángulos agudos y se cumple:

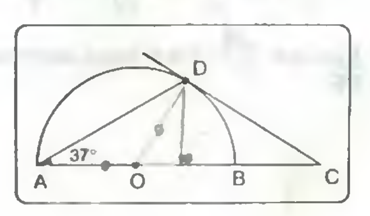
$$Sen(\alpha + 20°) = \sqrt{Sen\ 30°} \text{ y}$$
$$tg(\beta + 5°) = \sqrt{tg\ 45° + Sec^2\ 45°}$$

Hallar: Cosec (β – α)

A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{5}{4}$ D) 2 E) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Ejercicio : En la figura adjunta $\overline{AD} = 56$ u. "O" es centro de la semicircunferencia y "D" punto de tangencia. Hallar: $\overline{BC}$

A) 30 u
B) 40 u
C) 60 u
D) 70 u
E) 90 u



Ejercicio 14 : Calcular el valor de:

$$M = \frac{\text{Sen}^3 22°30' - \text{Cos}^3 67°30' + \text{tg } 15°}{2 \text{ Cosec } 30° + \text{Sec}^2 45° - 5 \text{ Sen } 53° - \sqrt{3}}$$

A) $\sqrt{3}$ **B)** $\sqrt{2}$ **C)** $\sqrt{6}$ **D)** 1 **E)** $3\sqrt{3}$

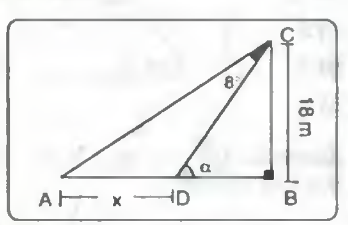
Ejercicio 15: Hallar: "Cos x" si se cumple:

$$[2 \text{ Cos } (x + 7°30')]^{\text{Sec}60°} = \sqrt{3} \cdot \text{Sec } 30° - \text{tg } 22°30' - 1$$

A) 0,8 **B)** 0,64 **C)** 0,5 **D)** 0,75 **E)** 0,4

Ejercicio 16: Si: Cosec $\alpha = \sqrt{\text{Cosec } 30°}$; Hallar: "x" de la figura:

A) 5 m
B) 7 m
C) 6 m
D) 10 m
E) 8 m



Ejercicio 17 : Si:

$$\text{Cotg}\left(\frac{180}{K+2}\right)^{\circ} = \left(\sqrt{1 + \text{Sen } 30°}\right)(\text{Sec } 45°)$$

Nota: "K" es un número entero. Calcular:

$$P = \text{Sen } (15 \text{ k})^{\circ} \cdot \text{Cos}\left(\frac{180}{K+2}\right)^{\circ}$$

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B)** $\frac{\sqrt{6}}{2}$ **C)** $\frac{4}{\sqrt{3}}$ **D)** $\frac{3}{4}$ **E)** $\frac{\sqrt{6}}{3}$

Ejercicio 18 : De la figura mostrada, Hallar: DE

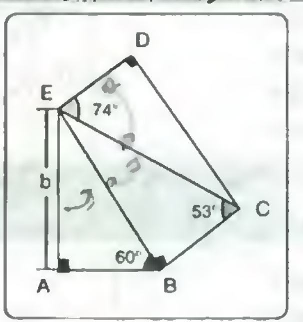
A) $7\sqrt{3}b$

B) $\frac{7\sqrt{3}}{30}b$

C) $\sqrt{3}b$

D) $\frac{\sqrt{3}}{30}b$

E) $\frac{7}{30}b$



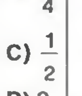
Ejercicio 19 : Si: Sen ϕ = Sen 45° . tg 30° ($\phi \Rightarrow$ ángulo agudo).

Calcular el valor de: Cotg $\left(\frac{\phi}{2}\right)$

A) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ **B)** $\sqrt{6}+\sqrt{5}$ **C)** $\sqrt{6}+\sqrt{3}$
D) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ **E)** $\sqrt{5}+1$

Ejercicio 20 De la figura mostrada; Hallar: "tg θ"; si: AC = CD.

A) 4
B) $\frac{1}{4}$
C) $\frac{1}{2}$
D) 2
E) 1



B
37° 37° θ
A C D

Clave de Respuestas

1. E	2. C	3. E	4. D	5. A
6. E	7. E	8. C	9. E	10. D
11. D	12. E	13. E	14. D	15. C
16. C	17. D	18. B	19. B	20. B

Capítulo 4 Identidades Trigonométricas

4.1 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Este capitulo por ser amplio e importante y que va a servir como base para capítulos posteriores, está considerado como clave dentro de esta asignatura, por supuesto que tendremos que demostrar las razones por las cuales se les considera como tal el estudio de este capítulo lo haremos con la definición.

DEFINICIÓN: Se le define como una igualdad de términos de razones trigonométricas que a diferencia de la igualdad algebraica, se satisface con casi la totalidad de los valores angulares, veamos:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Variable Angular

Comprobamos para algunos valores del ángulo "α":

Para: $\alpha = 45° \Rightarrow \underbrace{\text{sen}^2 45°}+\underbrace{\cos^2 45°} = 1$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{2}{4}+\frac{2}{4}=1 \Rightarrow \frac{2+2}{4}=1 \Rightarrow \therefore\ 1=1$$

Para: $\alpha = 30° \Rightarrow \underbrace{\text{sen}^2 30°}+\underbrace{\cos^2 30°} = 1$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1 \Rightarrow \frac{1+3}{4}=1 \Rightarrow \therefore\ 1=1$$

Observaciones:

- *La igualdad: $(x-3)(x+3)=0$, es cierta si y solamente si, cuando:* $x=3$ *ó* $x=-3$
  - *Este tipo de igualdad se denominan* ***"Ecuaciones Condicionales"***
- *En cambio la igualdad: $(x+3)(x-3) \equiv x^2-9$, se cumple para todo valor de "x"*
  - *Este tipo de igualdad se denomina* ***"identidades"***
- *Para indicar una identidad usaremos el símbolo "≡" que se lee:* ***"idéntico a"***
- *Recuerde que no existe la división entre cero porque toda expresión matemática entre cero No existe (∄)*

CLASIFICACIÓN: Para clasificarlos tomaremos como base su definición es decir las particularidades que se presentan en las igualdades

A continuación desarrollaremos un cuadro.

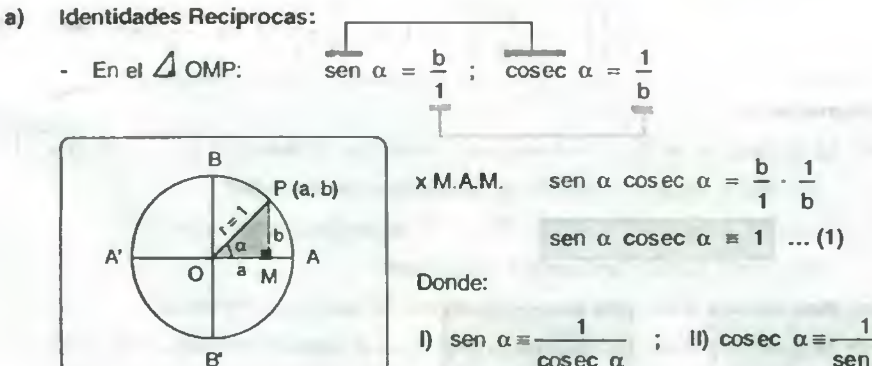
IDENTIDADES

- **I. FUNDAMENTALES**
  - *a) Recíprocas*
  - *b) Por división*
  - *c) Pitagóricas*
- **II. ÁNGULOS COMPUESTOS**
  - *a) Suma de arcos*
  - *b) Diferencia de arcos*
- **III. ÁNGULOS MÚLTIPLES**
  - *a) Arco mitad*
  - *b) Arco doble*
  - *c) Arco triple*
- **IV. FACTORIZACIÓN TRIGONOMÉTRICA**
  - *a) Transformación de suma y diferencia a producto*
  - *b) Transformación de productos a suma o diferencia*
- **V. ECUACIONES**
  - *a) Aplicación de identidades antes mencionadas*
  - *b) Soluciones principales y generales*

4.1.1 IDENTIDADES FUNDAMENTALES:

Para obtener dichas identidades, hacemos uso de la circunferencia trigonométrica.

a) Identidades Recíprocas:



- En el $\triangle$ OMP: $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{b}{1}$; $\text{cosec}\ \alpha = \dfrac{1}{b}$

x M.A.M. $\text{sen}\ \alpha\ \text{cosec}\ \alpha = \dfrac{b}{1}\cdot\dfrac{1}{b}$

$$\text{sen}\ \alpha\ \text{cosec}\ \alpha \equiv 1 \quad \dots (1)$$

Donde:

I) $\text{sen}\ \alpha \equiv \dfrac{1}{\text{cosec}\ \alpha}$; II) $\text{cosec}\ \alpha \equiv \dfrac{1}{\text{sen}\ \alpha}$

- En el mismo $\triangle$ OMP: $\cos\alpha = \dfrac{a}{1}$; $\sec\alpha = \dfrac{1}{a}$

x M.A.M: $\cos\alpha \sec\alpha = \dfrac{a}{1}\cdot\dfrac{1}{a} \Rightarrow \therefore \cos\alpha \sec\alpha \equiv 1$ ...(II)

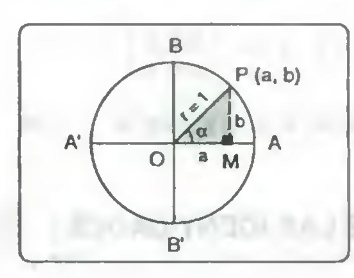
Donde: I) $\cos\alpha \equiv \dfrac{1}{\sec\alpha}$; II) $\sec\alpha \equiv \dfrac{1}{\cos\alpha}$

- En el mismo $\triangle$ OMP: $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{b}{a}$; $\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{a}{b}$

x M.A.M.: $\text{tg}\,\alpha\,\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{b} \Rightarrow \therefore \text{tg}\,\alpha\,\text{cotg}\,\alpha \equiv 1$ ... (III)

Donde: I) $\text{tg}\,\alpha \equiv \dfrac{1}{\text{cotg}\,\alpha}$; II) $\text{cotg}\,\alpha \equiv \dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha}$

b) Identidades por División:



- En el $\triangle$ OMP:

$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{b}{1}$; $\cos\alpha = \dfrac{a}{1}$

÷ M.A.M.:

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \equiv \text{tg}\,\alpha \quad ...(IV)$$

Ahora, tomamos la inversa a cada miembro de esta última expresión (IV), obteniendo:

$$\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha} \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} \equiv \text{cotg}\,\alpha \quad ...(V)$$

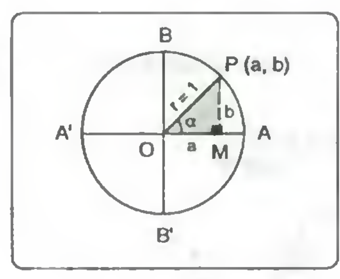
> *Nota:*
> *x M.A.M. Significa multiplicar miembro a miembro*
> *: M.A.M. Significa dividir miembro a miembro*

c) Identidades Pitagóricas:

- En el $\triangle$ OMP: Por el teorema de Pitágoras:

$(\text{Hipotenusa})^2 = (\text{cateto }1)^2 + (\text{cateto }2)^2$

$$1^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad 1 = a^2 + b^2 \quad \ldots(w)$$



Por razones trigonométricas en el ⊿OMP, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } \alpha = \dfrac{b}{1} \Rightarrow \text{sen } \alpha = b \\ \cos \alpha = \dfrac{a}{1} \Rightarrow \cos \alpha = a \end{array}\right\} \ldots (\phi)$$

Reemplazamos los valores de (ϕ) en (w)

$$1 = \cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha \Rightarrow \therefore\ 1 \equiv \text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha \quad \ldots(\text{VI})$$

Dividimos "$\cos^2\alpha$" a ambos miembros de la expresión (VI)

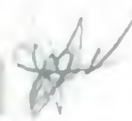
$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} \equiv \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \left(\frac{1}{\cos \alpha}\right)^2 \equiv \left(\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}\right)^2 + 1$$

$$(\sec \alpha)^2 \equiv (\text{tg } \alpha)^2 + 1 \Rightarrow \therefore\ \sec^2 \alpha \equiv \text{tg}^2 \alpha + 1 \quad \ldots (\text{VII})$$

De igual manera; dividimos a ambos miembros de la expresión (VI) entre "$\text{sen}^2 \alpha$"

$$\frac{1}{\text{sen}^2 \alpha} \equiv \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha} \Rightarrow \left(\frac{1}{\text{sen } \alpha}\right)^2 \equiv 1 + \left(\frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha}\right)^2$$

$$(\text{cosec } \alpha)^2 \equiv 1 + (\text{cotg } \alpha)^2 \Rightarrow \therefore\ \text{cosec}^2 \alpha \equiv 1 + \text{cotg}^2 \alpha \quad \ldots (\text{VIII})$$



CUADRO DE RESUMEN DE LAS IDENTIDADES

Identidades Recíprocas	Identidades por división
1. $\text{sen } \alpha \text{ cosec } \alpha \equiv 1$; $\alpha \neq \left\{(2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right\}$	**4.** $\text{tg } \alpha \equiv \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$; $\alpha \neq \left\{(2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right\}$
2. $\cos \alpha \sec \alpha \equiv 1$; $\alpha \neq \{n\pi\}$	
3. $\text{tg } \alpha \text{ cotg } \alpha \equiv 1$; $\alpha \neq \left\{(2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right\} \cup \{n\pi\}$	**5.** $\text{cotg } \alpha \equiv \dfrac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha}$; $\alpha \neq \{n\pi\}$

Identidades Pitagóricas

6. $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha \equiv 1 \quad ; \forall \alpha \in \mathbb{R}$

7. $1 + \text{tg}^2 \alpha \equiv \sec^2 \alpha \; ; \; \alpha \neq \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$

8. $1 + \text{cotg}^2 \alpha \equiv \text{cosec}^2 \alpha \; ; \; \alpha \neq \{n\pi\}$

Identidades Auxiliares

9. $\text{sen}^4 \alpha + \cos^4 \alpha \equiv 1 - 2\,\text{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha$

10. $\text{sen}^6 \alpha + \cos^6 \alpha \equiv 1 - 3\,\text{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha$

11. $\text{tg}\, \alpha + \text{cotg}\, \alpha \equiv \sec \alpha \,\text{cosec}\, \alpha$

12. $\sec^2 \alpha + \text{cosec}^2 \alpha \equiv \sec^2 \alpha \,\text{cosec}^2 \alpha$

Recomendaciones: Los ejercicios sobre identidades son de 4 tipos:

a) ***Demostraciones:***
Para demostrar una identidad, implica que el primer miembro se pueda reducir al segundo miembro o viceversa o que cada miembro por separado se pueda reducir a una misma forma.

La verificación de identidades se efectúa usando las diferentes transformaciones tanto algebraicas o trigonométricas.

No existe desgraciadamente una regla única que sirva como norma para verificar identidades. Por lo general de los dos miembros se procura reducir del más complicado al más simple; al efecto, el estudiante debe tener presente la expresión a la que pretende llegar, pensar en todas las relaciones fundamentales (identidades) y seleccionar aquellas que le permitan obtener la expresión deseada.

Algunas veces es útil escribir la identidad en términos de senos y cosenos. A continuación veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1 : Demostrar que: $\sec\theta - \text{tg}\,\theta\,\text{sen}\,\theta \equiv \cos\theta$

Demostración: Un método muy eficiente en la demostración de identidades es el de expresar el primer miembro de la identidad en función de seno y coseno, así:

$$\sec\theta - \text{tg}\,\theta\;\text{sen}\,\theta \equiv \cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos\theta} - \left(\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}\right)\text{sen}\,\theta \equiv \cos\theta$$

Por quebrados homogéneos, en el primer miembro obtenemos:

$$\frac{1-\text{sen}^2\theta}{\cos\theta} \equiv \cos\theta \; ; \text{ Por identidad}: \; 1-\text{sen}^2\theta = \cos^2\theta$$

$$\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta} \equiv \cos\theta \Rightarrow \quad \therefore \quad \cos\theta \equiv \cos\theta \qquad \textit{l.q.q.d.}$$

Ejemplo 2 : Verifique la identidad: $\dfrac{\cos A}{1+\operatorname{sen} A}+\dfrac{\cos A}{1-\operatorname{sen} A}\equiv 2\sec A$

Demostración: Damos común denominador, en el primer miembro, obteniendo: ➡ $\dfrac{\cos A\,(1-\operatorname{sen} A)+\cos A\,(1+\operatorname{sen} A)}{\underbrace{(1+\operatorname{sen} A)\,(1-\operatorname{sen} A)}}\equiv 2\sec A$

El denominador, tiene la forma: $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ *(Diferencia de cuadrados)*

Luego: $\dfrac{\cos A\,(1-\operatorname{sen} A)+\cos A\,(1+\operatorname{sen} A)}{1^2-\operatorname{sen}^2 A}\equiv 2\sec A$

$$\frac{\cos A-\cancel{\cos A}\operatorname{sen} A+\cos A+\cancel{\cos A}\operatorname{sen} A}{1-\operatorname{sen}^2 A}\equiv 2\sec A$$

$\dfrac{2\cos A}{1-\operatorname{sen}^2 A}\equiv 2\sec A$ **Por identidad:** $1-\operatorname{sen}^2 A\equiv\cos^2 A$

$$\frac{2\cos A}{\cos^2 A}\equiv 2\sec A$$

$\dfrac{2}{\cos A}\equiv 2\sec A$; La expresión del primer miembro, se puede escribir así:

$2\left(\dfrac{1}{\cos A}\right)\equiv 2\sec A$ ➡ $\therefore\ 2\sec A\equiv 2\sec A$ *L.q.q.d.*

Ejemplo 3 : Demostrar que: $\left(1-\cos^2\theta\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\theta\right)\equiv\operatorname{tg}^2\theta$

Demostración: De acuerdo a las identidades fundamentales, podemos afirmar que:

I) $\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta\equiv 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta\equiv 1-\cos^2\theta$

II) $1+\operatorname{tg}^2\theta\equiv\sec^2\theta$

Lo que nos permite afirmar que:

$$\underbrace{\left(1-\cos^2\theta\right)}\underbrace{\left(1+\operatorname{tg}^2\theta\right)}\equiv\operatorname{tg}^2\theta\Rightarrow\underbrace{\operatorname{sen}^2\theta}\ \underbrace{\sec^2\theta}\equiv\operatorname{tg}^2\theta$$

$\underbrace{\operatorname{sen}^2\theta\left(\dfrac{1}{\cos^2\theta}\right)}\equiv\operatorname{tg}^2\theta\Rightarrow\underbrace{\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}}\equiv\operatorname{tg}^2\theta$ ➡ $\therefore\ \operatorname{tg}^2\theta\equiv\operatorname{tg}^2\theta$ *L.q.q.d.*

Ejemplo 4 : Demostrar que: $(\text{tg }\theta+\sec\theta)^2 \equiv \dfrac{1+\text{sen }\theta}{1-\text{sen }\theta}$

Demostración: Expresando el primer miembro en función de seno y coseno, se logra lo siguiente:

$$\left(\frac{\text{sen }\theta}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos\theta}\right)^2 \equiv \frac{1+\text{sen }\theta}{1-\text{sen }\theta} \Rightarrow \left(\frac{\text{sen }\theta+1}{\cos\theta}\right)^2 \equiv \frac{1+\text{sen }\theta}{1-\text{sen }\theta}$$

: Por ley de Exponentes: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Por identidad:

$$\frac{(\text{sen }\theta+1)^2}{(\cos\theta)^2} \equiv \frac{1+\text{sen }\theta}{1-\text{sen }\theta} \Rightarrow \frac{(\text{sen }\theta+1)^2}{\cos^2\theta} \equiv \frac{1+\text{sen }\theta}{1-\text{sen }\theta}$$

$\cos^2\theta \equiv 1-\text{sen}^2\theta$

$\cos^2\theta \equiv (1+\text{sen }\theta)(1-\text{sen }\theta)$

$$\frac{(\text{sen }\theta+1)^2}{(1+\text{sen }\theta)(1-\text{sen }\theta)} \equiv \frac{1+\text{sen }\theta}{1-\text{sen }\theta}$$

$$\frac{\text{sen }\theta+1}{1-\text{sen }\theta} \equiv \frac{1+\text{sen }\theta}{1-\text{sen }\theta} \quad \therefore \quad \frac{\text{sen }\theta+1}{1-\text{sen }\theta} \equiv \frac{1+\text{sen }\theta}{1-\text{sen }\theta}$$

L.q.q.d.

Ejemplo 5 : Demostrar que: $(\text{sen }x-\text{tg }x)^2+(\cos x-1)^2 \equiv (1-\sec x)^2$

Demostración: Partimos del primer miembro para así demostrar la identidad, veamos:

$$\left(\text{sen }x-\frac{\text{sen }x}{\cos x}\right)^2+(\cos x-1)^2 \equiv (1-\sec x)^2$$

$$\left(\frac{\text{sen }x\cdot\cos x-\text{sen }x}{\cos x}\right)^2+(\cos x-1)^2 \equiv (1-\sec x)^2$$

$$\left[\frac{\text{sen }x\,(\cos x-1)}{\cos x}\right]^2+(\cos x-1)^2 \equiv (1-\sec x)^2$$

$$\frac{\text{sen}^2x\,(\cos x-1)^2}{\cos^2x}+(\cos x-1)^2 \equiv (1-\sec x)^2$$

Factorizamos $(\cos x - 1)^2$, obteniendo:

$$(\cos x-1)^2\left[\frac{\text{sen}^2x}{\cos^2x}+1\right] \equiv (1-\sec x)^2$$

$$(\cos x-1)^2\left[\frac{\text{sen}^2x+\cos^2x}{\cos^2x}\right] \equiv (1-\sec x)^2 \Rightarrow \frac{(\cos x-1)^2}{(\cos x)^2} \equiv (1-\sec x)^2$$

$$\left[\frac{(\cos x-1)}{(\cos x)}\right]^2 \equiv (1-\sec x)^2 \quad ; \textbf{Propiedad: } \frac{a-b}{c} = \frac{a}{c}-\frac{b}{c}$$

$$\left(1-\frac{1}{\cos x}\right)^2 \equiv (1-\sec x)^2 \Rightarrow (1-\sec x)^2 \equiv (1-\sec x)^2 \quad \textit{L.q.q.d.}$$

Ejemplo 6 : Demostrar que: $\left[\left(\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}\right)+\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha}\right)\right]^2 \equiv 2\,(1+\cos\alpha)$

Demostración: Aplicando la identidad algebraica : $(A+B)^2 \equiv A^2+2AB+B^2$; obtenemos:

$$\left[\left(\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}\right)\right]^2+2\left[\left(\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}\right)\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha}\right)\right]+\left[\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha}\right)\right]^2 \equiv 2\,(1+\cos\alpha)$$

$$(1-\cancel{\operatorname{sen}\alpha})+2\sqrt{(1-\operatorname{sen}\alpha)(1+\operatorname{sen}\alpha)}+(1+\cancel{\operatorname{sen}\alpha}) \equiv 2\,(1+\cos\alpha)$$

$$2+2\sqrt{\left(1^2-\operatorname{sen}^2\alpha\right)} \equiv 2\,(1+\cos\alpha) \Rightarrow 2+2\sqrt{\left(1-\operatorname{sen}^2\alpha\right)} \equiv 2\,(1+\cos\alpha)$$

$$2+2\sqrt{\left(\cos^2\alpha\right)} \equiv 2\,(1+\cos\alpha) \Rightarrow 2+2\cos\alpha \equiv 2\,(1+\cos\alpha)$$

$$\therefore \quad 2\,(1+\cos\alpha) \equiv 2\,(1+\cos\alpha) \quad \textit{L.q.q.d.}$$

Ejemplo 7 : Demostrar que: $\operatorname{sen}^2x\ \operatorname{tg}^2x+\cos^2x\ \operatorname{cotg}^2x \equiv \operatorname{tg}^2x+\operatorname{cotg}^2x-1$

Demostración: Por identidad: $\cos^2x \equiv 1-\operatorname{sen}^2x$

Luego:

$$\operatorname{sen}^2x\ \operatorname{tg}^2x+\left(1-\operatorname{sen}^2x\right)\operatorname{cotg}^2x \equiv \operatorname{tg}^2x+\operatorname{cotg}^2x-1$$

$$\underbrace{\operatorname{sen}^2x\ \operatorname{tg}^2x}+\operatorname{cotg}^2x\underbrace{-\operatorname{sen}^2x\ \operatorname{cotg}^2x} \equiv \operatorname{tg}^2x+\operatorname{cotg}^2x-1$$

En el primer miembro, factorizamos "$\operatorname{sen}^2 x$"

$$\operatorname{sen}^2x\underbrace{\left(\operatorname{tg}^2x-\operatorname{cotg}^2x\right)}+\operatorname{cotg}^2x \equiv \operatorname{tg}^2x+\operatorname{cotg}^2x-1$$

$$\operatorname{sen}^2x\underbrace{\left[\frac{\operatorname{sen}^2x}{\cos^2x}-\frac{\cos^2x}{\operatorname{sen}^2x}\right]}+\operatorname{cotg}^2x \equiv \operatorname{tg}^2x+\operatorname{cotg}^2x-1$$

$$\operatorname{sen}^2x\left[\frac{\operatorname{sen}^4x-\cos^4x}{\cos^2x\ \operatorname{sen}^2x}\right]+\operatorname{cotg}^2x \equiv \operatorname{tg}^2x+\operatorname{cotg}^2x-1$$

Por diferencia de cuadrados: $\operatorname{sen}^4 x-\cos^4 x \equiv \left(\operatorname{sen}^2 x\right)^2-\left(\cos^2 x\right)^2$

$$\operatorname{sen}^4 x-\cos^4 x \equiv \left(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x\right)\left(\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x\right)$$

$$\operatorname{sen}^2 x\left[\frac{\left(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x\right)\left(\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x\right)}{\cos^2 x\ \operatorname{sen}^2 x}\right]+\operatorname{cotg}^2 x \equiv \operatorname{tg}^2 x+\operatorname{cotg}^2 x-1$$

Por identidad: $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x \equiv 1$

$$\cancel{\operatorname{sen}^2} x\left[\frac{(1)\left(\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x\right)}{\cos^2 x\ \cancel{\operatorname{sen}^2} x}\right]+\operatorname{cotg}^2 x \equiv \operatorname{tg}^2 x+\operatorname{cotg}^2 x-1$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x}{\cos^2 x}+\operatorname{cotg}^2 x \equiv \operatorname{tg}^2 x+\operatorname{cotg}^2 x-1$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}-\frac{\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^2 x}}+\operatorname{cotg}^2 x \equiv \operatorname{tg}^2 x+\operatorname{cotg}^2 x-1$$

$$\operatorname{tg}^2 x-1+\operatorname{cotg}^2 x \equiv \operatorname{tg}^2 x+\operatorname{cotg}^2 x-1$$

$$\therefore \quad \operatorname{tg}^2 x+\operatorname{cotg}^2 x-1 \equiv \operatorname{tg}^2 x+\operatorname{cotg}^2 x-1 \qquad \textit{l.q.q.d.}$$

Ejemplo 8: Demostrar que: $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{cotg}^2 x} \equiv \left[\dfrac{1-\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{cotg} x}\right]^2$

Demostración: Partimos del primer miembro para llegar al segundo miembro, para eso transformamos todo el primer miembro en función del seno y coseno, veamos:

$$\frac{\left(1+\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right)}{\left(1+\dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\right)} \equiv \left[\frac{1-\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{cotg} x}\right]^2 \quad \Rightarrow$$

damos común denominador tanto en el numerador y denominador del primer miembro.

$$\frac{\left(\dfrac{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right)}{\left(\dfrac{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\right)} \equiv \left[\frac{1-\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{cotg} x}\right]^2 \quad \Rightarrow$$

Por identidad: $\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x \equiv 1$

$$\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\text{sen}^2 x}} \equiv \left[\frac{1-\text{tg } x}{1-\text{cotg } x}\right]^2 \Rightarrow \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} \equiv \left[\frac{1-\text{tg } x}{1-\text{cotg } x}\right]^2$$

$$\left[\frac{\text{sen } x}{\cos x}\right]^2 \equiv \left[\frac{1-\text{tg } x}{1-\text{cotg } x}\right]^2 \Rightarrow$$

Por artificio, multiplicamos el numerador y denominador por:

(cos x - sen x)

$$\left[\frac{\text{sen } x\ (\cos x - \text{sen } x)}{\cos x\ (\cos x - \text{sen } x)}\right]^2 \equiv \left[\frac{1-\text{tg } x}{1-\text{cotg } x}\right]^2 \Rightarrow$$

La expresión del primer miembro se puede escribir así:

$$\left[\frac{\left(\frac{\cos x - \text{sen } x}{\cos x}\right)}{\left(\frac{\cos x - \text{sen } x}{\text{sen } x}\right)}\right]^2 \equiv \left[\frac{1-\text{tg } x}{1-\text{cotg } x}\right]^2 \Rightarrow$$

Separamos fracciones en el numerador y denominador

$$\left[\frac{\left(\frac{\cos x}{\cos x} - \frac{\text{sen } x}{\cos x}\right)}{\left(\frac{\cos x}{\text{sen } x} - \frac{\text{sen } x}{\text{sen } x}\right)}\right]^2 \equiv \left[\frac{1-\text{tg } x}{1-\text{cotg } x}\right]^2 \Rightarrow \left[\frac{1-\text{tg } x}{\text{cotg } x - 1}\right]^2 \equiv \left[\frac{1-\text{tg } x}{1-\text{cotg } x}\right]^2$$

Por propiedad: $(a - b)^2 = (b - a)^2$ También: $\left(\frac{1-a}{b-1}\right)^2 \equiv \left(\frac{1-a}{1-b}\right)^2$

$$\left[\frac{1-\text{tg } x}{1-\text{cotg } x}\right]^2 \equiv \left[\frac{1-\text{tg } x}{1-\text{cotg } x}\right]^2 \quad \textit{L.q.q.d.}$$

Ejemplo 9 : Demostrar que: $\frac{1-\cos x}{\text{sen } x} \equiv \frac{\text{sen } x}{1+\cos x}$

Demostración: Haciendo producto de extremos y medios, obtenemos:

$$(1-\cos x)\ (1+\cos x) \equiv \text{sen } x\ \text{sen } x$$

$$1-\cos^2 x \equiv \text{sen}^2 x \Rightarrow 1 \equiv \text{sen}^2 x + \cos^2 x \Rightarrow \therefore\ 1 \equiv 1 \quad \textit{L.q.q.d.}$$

b) Simplificaciones

Se buscará una expresión reducida de la planteada con ayuda de las identidades fundamentales y/o auxiliares con transformaciones algebraicas. A continuación veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1 : Simplificar: $R = (2\,\text{sen}^2\theta - 1)^2 + 4\,\text{sen}^2\theta\cos^2\theta$

Resolución:

Aplicamos: $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$, obteniendo:

$$R = \left(2\,\text{sen}^2\theta\right)^2 - 2\left(2\,\text{sen}^2\theta\right)(1) + (1)^2 + 4\,\text{sen}^2\theta\cos^2\theta$$

$$R = \underbrace{4\,\text{sen}^4\theta} - 4\,\text{sen}^2\theta + 1 + \underbrace{4\,\text{sen}^2\theta\cos^2\theta}$$

En las expresiones remarcadas; factorizamos "$4\,\text{sen}^2\theta$", obteniendo:

$$R = 4\,\text{sen}^2\theta\underbrace{\left(\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta\right)}_{1} - 4\,\text{sen}^2\theta + 1$$

$$R = 4\,\text{sen}^2\theta - 4\,\text{sen}^2\theta + 1 \Rightarrow \therefore\ R = 1 \quad \textit{Rpta.}$$

Ejemplo 2 : Simplificar: $A = (1 - \text{sen}\,x)(\sec x + \text{tg}\,x)$

Resolución:

Transformamos la expresión dada a seno y coseno, veamos:

$$A = (1 - \text{sen}\,x)\left(\frac{1}{\cos x} + \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}\right)$$

$$A = (1 - \text{sen}\,x)\left(\frac{1 + \text{sen}\,x}{\cos x}\right) = \frac{(1 - \text{sen}\,x)(1 + \text{sen}\,x)}{\cos x}$$

$$A = \frac{1 - \text{sen}^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x}{\cos x} = \cos x \Rightarrow \therefore\ A = \cos x \quad \textit{Rpta.}$$

Ejemplo 3 : Reducir: $M = \text{tg}\,x\,(1 - \text{cotg}^2 x) + \text{cotg}x\,(1 - \text{tg}^2 x)$

Resolución:

Efectuando los productos indicados, obtenemos:

$$M = \text{tg}\,x - \text{tg}\,x\,\underbrace{\text{cotg}^2 x} + \text{cotg}\,x - \text{cotg}\,x\,\underbrace{\text{tg}^2 x}$$

$$M = \text{tg}\,x - \underbrace{(\text{tg}\,x\,\text{cotg}\,x)}_{1}\text{cotg}\,x + \text{cotg}\,x - \underbrace{(\text{cotg}\,x\,\text{tg}\,x)}_{1}\text{tgx}$$

$$M = \text{tg}\,x - \text{cotg}\,x + \text{cotg}\,x - \text{tg}\,x \Rightarrow \therefore\ M = 0 \quad \textit{Rpta.}$$

Ejemplo 4 : Simplificar: $S = \dfrac{\text{tg } x}{(1-\text{tg } x)} + \dfrac{\text{cotg } x}{(1-\text{cotg } x)}$

Resolución:

Por identidad: $\text{cotg } x = \dfrac{1}{\text{tg } x}$; obtenemos:

$$S = \frac{\text{tg } x}{(1-\text{tg } x)} + \frac{\left(\dfrac{1}{\text{tg } x}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{\text{tg } x}\right)} \Rightarrow S = \frac{\text{tg } x}{(1-\text{tg } x)} + \frac{\left(\dfrac{1}{\cancel{\text{tg } x}}\right)}{\left(\dfrac{\text{tg } x-1}{\cancel{\text{tg } x}}\right)}$$

$$S = \frac{\text{tg } x}{(1-\text{tg } x)} + \frac{1}{(\text{tg } x-1)}$$

Hacemos cambio de signos, veamos:

$$S = \frac{\text{tg } x}{(1-\text{tg } x)} + \frac{1}{(\text{tg } x-1)} = \frac{\text{tg } x}{(1-\text{tg } x)} - \frac{1}{(1-\text{tg } x)}$$

$$S = \frac{\text{tg } x-1}{(1-\text{tg } x)} = \frac{-\cancel{(1-\text{tg } x)}}{\cancel{(1-\text{tg } x)}} = -1 \Rightarrow \quad \therefore \quad S=-1 \qquad \textit{Rpta.}$$

Ejemplo 5 : Simplificar: $P = (\sec\alpha \text{ cotg}\alpha + \cos\alpha \text{ cosec}\alpha)(\sec\alpha \text{ cotg}\alpha - \cos\alpha \text{ cosec}\alpha)$

Resolución:

Llevamos dicha expresión en términos de seno y coseno, veamos:

$$P = \left(\frac{1}{\cancel{\cos\alpha}}\cdot\frac{\cancel{\cos\alpha}}{\text{sen }\alpha} + \cos\alpha\cdot\frac{1}{\text{sen }\alpha}\right)\cdot\left(\frac{1}{\cancel{\cos\alpha}}\cdot\frac{\cancel{\cos\alpha}}{\text{sen }\alpha} - \cos\alpha\cdot\frac{1}{\text{sen }\alpha}\right)$$

$$P = \left(\frac{1}{\text{sen }\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\text{sen }\alpha}\right)\cdot\left(\frac{1}{\text{sen }\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\text{sen }\alpha}\right)$$

$$P = \left(\frac{1+\cos\alpha}{\text{sen }\alpha}\right)\cdot\left(\frac{1-\cos\alpha}{\text{sen }\alpha}\right) = \frac{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}{\text{sen}^2\alpha}$$

$$P = \frac{1-\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} = \frac{\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} = 1 \Rightarrow \quad \therefore \quad P=1 \qquad \textit{Rpta.}$$

c) **Condicionales:**

Si la condición es complicada debemos simplificarla y así llegar a una expresión que puede ser la pedida o que nos permita hallar fácilmente la que nos piden. Si la condición es simple inmediatamente se procede a encontrar la expresión pedida. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1 : Si: sen θ + cosec θ = a. Calcular el valor de: $E = sen^2\theta + cosec^2\theta$

Resolución:

De la condición: sen θ + cosec θ = a; elevamos al cuadrado ambos miembros

$$(sen\ \theta + cosec\ \theta)^2 = a^2$$

$$(sen\ \theta)^2 + 2\ sen\ \theta\ cosec\ \theta + (cosec\ \theta)^2 = a^2$$

$$\left(sen^2\theta\right) + 2\ \cancel{sen\ \theta} \times \frac{1}{\cancel{sen\ \theta}} + cosec^2\theta = a^2$$

$$\underbrace{sen^2\theta + cosec^2\theta}_{E} = a^2 - 2 \Rightarrow \therefore\ E = a^2 - 2 \quad \textit{Rpta.}$$

Ejemplo 2 : Si: sen x + cos x = b. Hallar el valor de: R = 2 sen x cos x + 1

Resolución:

De la condición: sen x + cos x = b, elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$(sen\ x + cos\ x)^2 = b^2$$

$$\underbrace{sen^2 x} + 2\ sen\ x\ cos\ x + \underbrace{cos^2 x} = b^2$$

$$\underbrace{\left(sen^2 x + cos^2 x\right)} + 2\ sen\ x\ cos\ x = b^2$$

$$\rightarrow 1 + 2\ sen\ x\ cos\ x = b^2 \Rightarrow 2\ sen\ x\ cos\ x = b^2 - 1 \quad ...(1)$$

Reemplazamos (1) en la expresión "R": $R = \underbrace{2\ sen\ x\ cos\ x}_{b^2-1} + 1$

$$R = b^2 - 1 + 1 = b^2 \Rightarrow \therefore\ R = b^2 \quad \textit{Rpta.}$$

Recomendación: *Estimado alumno, cuando te encuentres con la expresión:*

"$E = sen\,x \pm cos\,x$" y te piden "sen x . cos x" vas a elevar al cuadrado ambos miembros, obteniendo:

$$E^2 = (sen\,x \pm cos\,x)^2$$

$$E^2 = \underbrace{sen^2 x + cos^2 x}_{1} \pm 2\,sen\,x\,cos\,x$$

$$E^2 = 1 \pm 2\,\underbrace{sen\,x\,cos\,x}_{\text{Lo que piden}}$$

Ejemplo 3 : Si: $\cos\theta + \sec\theta = p$. Calcular el valor de: $E = \cos^3\theta + \sec^3\theta$

Resolución:

Por suma de cubos: $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$; se obtiene:

$$E = \cos^3\theta + \sec^3\theta = \underbrace{(\cos\theta + \sec\theta)}_{p}\left(\cos^2\theta - \underbrace{\cos\theta\,\sec\theta}_{1} + \sec^2\theta\right)$$

$$E = (p)\left(\cos^2\theta + \sec^2\theta - 1\right) \quad ...(I)$$

De la condición: $\cos\theta + \sec\theta = p$; elevamos al cuadrado ambos miembros

$$(\cos\theta + \sec\theta)^2 = p^2 \Rightarrow \cos^2\theta + \underbrace{2\cos\theta\,\sec\theta}_{2} + \sec^2\theta = p^2$$

$$\cos^2\theta + \sec^2\theta = p^2 - 2 \quad ...(II)$$

Reemplazamos (II) en (I): $E = (p)\left(p^2 - 2 - 1\right)$ ➡ $\therefore$ $E = p\left(p^2 - 3\right)$ ***Rpta.***

d) Eliminación del Ángulo

Estos ejercicios consisten en que a partir de ciertas relaciones trigonométricas debemos encontrar relaciones algebraicas en donde no aparezca el ángulo. Por lo general para eliminar el ángulo se utilizan las siguientes identidades.

$$tg\,x\,cotg\,x \equiv 1 \quad ; \quad sec^2 x - tg^2 x \equiv 1$$

$$sen^2 x + cos^2 x \equiv 1 \quad ; \quad cosec^2 x - cotg^2 x \equiv 1$$

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1 : Si: $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{a+1}$ ... (1) $\cos\theta = \sqrt{b+1}$ ... (2) Eliminar "θ"

Resolución:

Aplicando la propiedad: $A = \sqrt[n]{B} \Rightarrow A^n = B$; obtenemos:

De la expresión (1): $\operatorname{sen}^2\theta = a + 1$ ... (I) De la expresión (2): $\cos^2\theta = b + 1$ ...(II)

Sumamos miembro a miembro (I) y (II):

$$\underbrace{\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta}_{1} = a+b+2 \Rightarrow 1 = a+b+2 \Rightarrow \therefore\ a+b+1=0 \quad \textit{Rpta.}$$

Ejemplo 2 : Eliminar "α" de: $\sec\alpha = m + n$ ... (1) $\operatorname{tg}\alpha = m - n$ ... (2)

Resolución:

Elevamos al cuadrado ambos miembros las expresiones (1) y (2)

De la expresión (1): $(\sec\alpha)^2 = (m+n)^2 \Rightarrow \sec^2\alpha = m^2 + 2mn + n^2$ ...(I)

De la expresión (2): $(\operatorname{tg}\alpha)^2 = (m-n)^2 \Rightarrow \operatorname{tg}^2\alpha = m^2 - 2mn + n^2$ ...(II)

Restamos miembro a miembro (I) y (II): $\underbrace{\sec^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}_{1} = 4\ mn$

$$1 = 4\ mn \Rightarrow \therefore\ 4\ mn = 1 \quad \textit{Rpta.}$$

Ejemplo 3 : Eliminar "θ" $a\cos\theta + b\operatorname{sen}\theta = k\operatorname{cosec}\theta$ ...(1)

$a\operatorname{sen}\theta - b\cos\theta = \operatorname{cosec}\theta\operatorname{tg}\theta$ ...(2)

Resolución:

De la expresión (1): $a\cos\theta+b\operatorname{sen}\theta = k\cdot\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$

$$a\cos\theta\operatorname{sen}\theta+b\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta = k \Rightarrow a\operatorname{sen}\theta\cos\theta+b\operatorname{sen}^2\theta = k \quad \text{...(I)}$$

De la expresión (2): $a\operatorname{sen}\theta-b\cos\theta = \dfrac{1}{\cancel{\operatorname{sen}\theta}}\cdot\dfrac{\cancel{\operatorname{sen}\theta}}{\cos\theta}$

$$a\operatorname{sen}\theta\cos\theta-b\cos\theta\cos\theta = 1 \Rightarrow a\operatorname{sen}\theta\cos\theta-b\cos^2\theta = 1 \quad \text{...(II)}$$

Restamos miembro a miembro (I) y (II):

$$(\cancel{a\operatorname{sen}\theta\cos\theta} + b\operatorname{sen}^2\theta)-(\cancel{a\operatorname{sen}\theta\cos\theta}-b\cos^2\theta) = k-1$$

$$b\operatorname{sen}^2\theta+b\cos^2\theta = k-1 \Rightarrow b\,(\underbrace{\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta}_{1}) = k-1$$

$$\therefore\ b = k-1 \Rightarrow \therefore\ k=b+1 \quad \textit{Rpta.}$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 9

A : Demostrar las siguientes identidades:

1. $(\sec x + \operatorname{tg} x)^2 \equiv \dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}$

Demostración:

$$\left(\frac{1}{\cos x}+\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)^2 \equiv \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}$$

$$\left(\frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)^2 \equiv \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}$$

$$\frac{(1+\operatorname{sen} x)(1+\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \equiv \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}$$

$$\frac{(1+\operatorname{sen} x)(1+\operatorname{sen} x)}{1+\operatorname{sen}^2 x} \equiv \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}$$

$$\frac{(1+\operatorname{sen} x)(1+\operatorname{sen} x)}{(1+\operatorname{sen} x)(1-\operatorname{sen} x)} \equiv \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}$$

$$\therefore \boxed{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} \equiv \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}} \quad \textit{L.q.q.d}$$

3. $\dfrac{1}{\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotg} x} + \operatorname{cotg} x \equiv \operatorname{cosec} x$

Demostración:

2. $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos x} - \dfrac{\cos^2 x}{1+\operatorname{sen} x} \equiv \operatorname{sen} x - \cos x$

Demostración:

4. $(1+\operatorname{sen} x+\cos x)^2 \equiv 2(1+\operatorname{sen} x)(1+\cos x)$

Demostración:

5. $\dfrac{(3-\text{sen } x)}{\text{tg } x} \equiv 3 \text{ cotg } x - \cos x$

Demostración:

La fracción del 1er. miembro, se puede escribir de la manera siguiente:

$$\frac{3}{\text{tg } x} - \frac{\text{sen } x}{\text{tg } x} \equiv 3 \text{ cotg } x - \cos x$$

$$3\left(\frac{1}{\text{tg } x}\right) - \frac{\cancel{\text{sen } x}}{\left(\frac{\cancel{\text{sen } x}}{\cos x}\right)} \equiv 3 \text{ cotg } x - \cos x$$

$$\therefore \boxed{3 \text{ cotg } x - \cos x \equiv 3 \text{ cotg } x - \cos x}$$

L.q.q.d

7. $\text{sen}^4 \theta - \cos^4 \theta \equiv 1 - \dfrac{2 \text{ cotg}^2 \theta}{\text{cosec}^2 \theta}$

Demostración:

6. $(1+\cos x)(\text{cosec } x - \text{cotg } x)^2 \equiv (1-\cos x)$

Demostración:

8. $\sqrt{\dfrac{1+\cos \theta}{\text{vers } \theta}} \equiv \text{cotg } \theta + \text{cosec } \theta$

Demostración:

B : Simplificar; cada una de las siguientes expresiones:

1. $R = \dfrac{\text{sen}^3 x}{\cos x - \cos^3 x}$

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir de la manera siguiente:

$$R = \frac{\text{sen}^2 x \; \text{sen } x}{\cos x \left(1-\cos^2 x\right)}$$

$$R = \frac{\cancel{\text{sen}^2 x} \; \text{sen } x}{\cos x \left(\cancel{\text{sen}^2 x}\right)} = \text{tg } x$$

Rpta.

2. $P = \dfrac{\text{sen}^3 \theta}{1+\cos\theta} + \text{sen } \theta \cdot \cos\theta$

Resolución:

Rpta. $P = \text{sen } \theta$

3. $M = \dfrac{(\text{cosec } x + \text{cotg } x)}{1-\cos^2 x} \cdot (1-\cos x)$

Resolución:

Rpta. $M = \text{cosec } x$

4. $T = \left(1-\text{tg}^2 x\right)\cos^2 x + \left(1-\text{cotg}^2 x\right)\text{sen}^2 x$

Resolución:

Rpta. $T = 0$

C : Eliminar el ángulo en cada una de las siguientes identidades

1. $x = 3\cos\theta$ ...(1) $y = 2\,\text{sen}\,\theta$ ... (2)

Resolución:

Elevamos al cuadrado las expresiones (1) y (2):

De (1):

$$x^2 = (3\cos\theta)^2 \Rightarrow \frac{x^2}{9} = \cos^2\theta \ \dots \text{(I)}$$

De (2): $y^2 = (2\,\text{sen}\,\theta)^2 \Rightarrow y^2 = 4\,\underline{\text{sen}^2\theta}$

$$y^2 = 4\left(1 - \cos^2\theta\right) \ \dots \text{(II)}$$

Reemplazamos (I) en (II): $y^2 = 4\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)$

$$9y^2 = 4\left(9 - x^2\right)$$

$\therefore$ $\boxed{4x^2 + 9y^2 - 36 = 0}$ ***Rpta.***

3. $1 + \text{tg}\,x = n$ ...(1)

$\cos x = \sqrt{m}$ ...(2)

Resolución:

Rpta. $\boxed{m(n-1)^2 = 1 - m}$

2. $x = \text{sen}\,\beta$ ... (1) $y = \cos^2\beta - \text{sen}^2\beta$ ... (2)

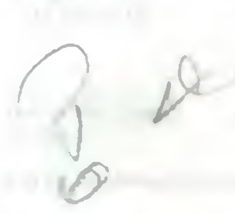
Resolución:

Rpta. $\boxed{2x^2 + y = 1}$

4. $a\,\text{sen}\,x - \cos x = 1$ ...(1)

$b\,\text{sen}\,x + \cos x = 1$ ... (2)

Resolución:



Rpta. $\boxed{ab = 1}$

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS TIPO I.B.M.

Ejercicio (1) : Si: cosec α - cos α = 1. Calcular: $T = \dfrac{sen^3\alpha}{1-\cos\alpha}$

A) 1 B) -1 C) sen α D) -sen α E) cos α

Resolución:

En la expresión "T" multiplicamos al numerador y denominador por la conjugada del denominador osea por: "(1 + cos α)".

$$T = \frac{sen^3\alpha}{(1-\cos\alpha)}\cdot\frac{(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)} = \frac{sen^3\alpha\,(1+\cos\alpha)}{(1-\cos^2\alpha)} \quad ; \text{Pero}: \quad 1-\cos^2\alpha = sen^2\alpha$$

$$T = \frac{sen^3\alpha\,(1+\cos\alpha)}{sen^2\alpha} = sen\,\alpha\,(1+\cos\alpha) \qquad \therefore\ T = sen\,\alpha\,(1+\cos\alpha)\ ...(I)$$

De la condición: cosec α - cos α = 1; obtenemos:

$$\frac{1}{sen\,\alpha} - \cos\alpha = 1 \Rightarrow 1 - sen\,\alpha\cos\alpha = sen\,\alpha$$

$$1 = sen\,\alpha + sen\,\alpha\cos\alpha \Rightarrow \therefore\ 1 = sen\,\alpha\,(1+\cos\alpha)\ ...(II)$$

Reemplazamos (II) en (I) $T = \underbrace{sen\,\alpha\,(1+\cos\alpha)}_{1}$ ➡ ∴ $T = 1$ **Rpta. A**

Ejercicio (2) : Expresar "R" en términos de "cotg α", si: $R = \dfrac{sen\,\alpha}{cosec\,\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\sec\alpha} + \dfrac{tg\,\alpha}{cotg\,\alpha}$

A) $\dfrac{\sqrt{1+cotg^2\alpha}}{cotg\,\alpha}$ B) $\dfrac{cotg\,\alpha}{\sqrt{1+cotg^2\alpha}}$ C) $\dfrac{1+cotg^2\alpha}{cotg^2\alpha}$ D) $\dfrac{2\,cotg\,\alpha}{1+cotg^2\alpha}$ E) $\dfrac{1+cotg^2\alpha}{2\,cotg\,\alpha}$

Resolución:

Sabemos que: $cosec\,\alpha = \dfrac{1}{sen\,\alpha}$; $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$; $cotg\,\alpha = \dfrac{1}{tg\,\alpha}$

Reemplazando dichos valores en la expresión "R" se tiene:

$$R = \frac{sen\,\alpha}{\left(\frac{1}{sen\,\alpha}\right)} + \frac{\cos\alpha}{\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)} + \frac{tg\,\alpha}{\left(\frac{1}{tg\,\alpha}\right)}$$

➡ Recorda que: $\dfrac{A}{\left(\frac{1}{B}\right)} = A\cdot B$

$$R = \text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\alpha + \cos\alpha \cdot \cos\alpha + \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\alpha$$

$$R = \underbrace{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}+ \text{tg}^2\alpha \quad ;\ \text{Pero}: \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$R = 1 + \text{tg}^2\alpha$$

Hacemos un artificio, multiplicando y dividiendo por $\text{cotg}^2\,\alpha$, a esta última expresión, veamos:

$$R = \left(1+\text{tg}^2\alpha\right)\frac{\text{cotg}^2\alpha}{\text{cotg}^2\alpha} = \frac{\text{cotg}^2\alpha + \text{tg}^2\alpha\ \text{cotg}^2\alpha}{\text{cotg}^2\alpha}$$

$$R = \frac{\text{cotg}^2\alpha + (\text{tg}\,\alpha\ \text{cotg}\,\alpha)^2}{\text{cotg}^2\alpha} \qquad \text{Pero}: \text{tg}\,\alpha \cdot \text{cotg}\,\alpha = 1$$

$$R = \frac{\text{cotg}^2\alpha + (1)^2}{\text{cotg}^2\alpha} = \frac{\text{cotg}^2\alpha + (1)}{\text{cotg}^2\alpha} \Rightarrow \therefore\ R = \frac{1+\text{cotg}^2\alpha}{\text{cotg}^2\alpha}$$ **Rpta. C**

Ejercicio 3: Eliminar "θ" a partir de: $p = \text{sen}\,\theta + \cos\theta \ldots (1)$ $\qquad q = \text{sen}\,\theta - \cos\theta \ldots (2)$

A) $p^2 - q^2 = 2pq$ **B)** $p^2 + q^2 = 1$ **C)** $p^2 + q^2 = 2$ **D)** $p^2 - q^2 = 1$ **E)** $\left(p^2 - q^2\right)^2 = 2pq$

Resolución:

Elevamos al cuadrado ambos miembros tanto de la expresión (1) como (2). Así:

$$p^2 = (\text{sen}\,\theta + \cos\theta)^2 \Rightarrow \quad p^2 = \text{sen}^2\theta + \cancel{2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta} + \cos^2\theta \ \ldots(3)$$

$$q^2 = (\text{sen}\,\theta - \cos\theta)^2 \Rightarrow \quad q^2 = \text{sen}^2\theta - \cancel{2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta} + \cos^2\theta \ \ldots(4)$$

$$\sum \text{M.A.M:}\ p^2 + q^2 = 2\,\text{sen}^2\theta + 2\cos^2\theta$$

$$p^2 + q^2 = 2\underbrace{\left(\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta\right)}_{1} \Rightarrow \therefore\ p^2 + q^2 = 2$$ **Rpta. C**

Ejercicio 4: Si se cumple la identidad: $\text{cotg}^2 x - \cos^2 x = \text{cotg}^m x \cdot \cos^n x$. Evaluar: $\frac{m}{n} + mn$

A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

Resolución:

El primer miembro de la expresión dada se puede escribir así: $\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} - \cos^2 x = \operatorname{cotg}^m x \cdot \cos^n x$

$$\cos^2 x\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right) - \cos^2 x = \operatorname{cotg}^m x \cdot \cos^n x$$

➡ *En el primer miembro factorizamos "$\cos^2 x$"*

$$\cos^2 x\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - 1\right) = \operatorname{cotg}^m x \cdot \cos^n x$$

$$\cos^2 x\left(\frac{1-\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\right) = \operatorname{cotg}^m x \cdot \cos^n x$$

➡ Pero : $1-\operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x$

$$\cos^2 x\left(\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\right) = \operatorname{cotg}^m x \cdot \cos^n x$$

➡ Pero : $\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{cotg}^2 x$

$$\cos^2 x \cdot \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cotg}^m x \cdot \cos^n x$$

$$\operatorname{cotg}^2 x \cdot \cos^2 x = \operatorname{cotg}^m x \cdot \cos^n x$$

➡ *Por comparación de términos en ambos miembros, obtenemos:*

$\boxed{m = 2}$; $\boxed{n = 2}$

Luego: $\frac{m}{n} + mn = \frac{2}{2} + 2 \cdot 2 = 1 + 4 = 5$ ➡ $\therefore \boxed{\frac{m}{n} + mn = 5}$ **Rpta. C**

Ejercicio 5 : Reducir: $Z = tg^3 x + 3\,tg\,x + ctg^3 x + 3\,ctg\,x$

A) 3 sec x cosec x
B) sec x + cosec x
C) 3 sec x + 3 cosec x
D) $\sec^3 x \operatorname{cosec}^3 x$
E) $\sec^3 x \operatorname{cosec}^3 x$

Resolución:

Ordenando los términos de la expresión, se tiene que:

$$Z = \underbrace{\left(tg^3 x + \operatorname{cotg}^3 x\right)} + \underbrace{(3\ tg\ x + 3\ \operatorname{cotg}\ x)}$$

Pero: $A^3 + B^3 = (A+B)\left(A^2 - AB + B^2\right)$

$$Z = (tg\ x + \operatorname{cotg}\ x)\left(tg^2 x - tg\ x\ \operatorname{cotg}\ x + \operatorname{cotg}^2 x\right) + 3\ (tg\ x + \operatorname{cotg}\ x)$$

Factorizamos: (tg x + cotg x)

$$Z = (\text{tg } x + \text{cotg } x)\left[\text{tg}^2 x - \text{tg } x \text{ cotg } x + \text{cotg}^2 x + 3\right] \quad \text{pero: } \text{tg } x \text{ cotg } x = 1$$

$$Z = (\text{tg } x + \text{cotg } x)\left[\text{tg}^2 x - 1 + \text{cotg}^2 x + 3\right]$$

$$Z = (\text{tg } x + \text{cotg } x)\left[2 + \text{tg}^2 x + \text{cotg}^2 x\right] \quad \Rightarrow \quad \text{pero: } 2 = 1 + 1$$

$$Z = (\text{tg } x + \text{cotg } x)\left[1 + 1 + \text{tg}^2 x + \text{cotg}^2 x\right]$$

Pero: $1 + \text{tg}^2 x = \sec^2 x$

$1 + \text{cotg}^2 x = \text{cosec}^2 x$

$$Z = (\text{tg } x + \text{cotg } x)\left[(1 + \text{tg}^2 x) + (1 + \text{cotg}^2 x)\right]$$

$$Z = (\text{tg } x + \text{cotg } x)\left[\sec^2 x + \text{cosec}^2 x\right] \quad \Rightarrow$$

Lo llevamos en función de seno y coseno.

$$Z = \left(\frac{\text{sen } x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\text{sen } x}\right)\left[\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\text{sen}^2 x}\right]$$

$$Z = \left(\frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x \text{ sen } x}\right)\left[\frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \text{ sen}^2 x}\right] \quad \text{pero: } \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$Z = \left(\frac{1}{\cos x \text{ sen } x}\right)\left[\frac{1}{\cos^2 x \text{ sen}^2 x}\right] = \frac{1}{\cos^3 x} \cdot \frac{1}{\text{sen}^3 x} = \sec^3 x \cdot \text{cosec}^3 x$$

$$\therefore \quad Z = \sec^3 x \text{ cosec}^3 x$$

Rpta. D

Ejercicio 6 : Si: Vers θ + cov θ = m. Entonces: (vers θ) . (cov θ) es igual a:

A) $\frac{m^2+1}{2}$ B) $\frac{m^2-1}{2}$ C) $\frac{(m+1)^2}{4}$ D) $\frac{(m-1)^2}{2}$ E) $\frac{m^2-1}{4}$

Resolución:

Sabemos que: $\text{vers}\,\theta = 1 - \cos\theta$ y $\text{cov}\,\theta = 1 - \text{sen}\,\theta$

Luego: $(1 - \cos\theta) + (1 - \text{sen}\,\theta) = m \Rightarrow 2 - m = \text{sen}\,\theta + \cos\theta$ ... (I)

Elevamos al cuadrado, ambos miembros de esta última expresión:

$$(2-m)^2 = (\text{sen}\,\theta + \cos\theta)^2$$

$$(2-m)^2 = \underbrace{\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta}_{1} + 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta \Rightarrow (2-m)^2 - 1 = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$$

$$\frac{(2-m)^2 - 1^2}{2} = \text{sen}\,\theta\cos\theta \quad \text{pero: } A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$$

$$\frac{(2-m+1)(2-m-1)}{2} = \text{sen}\,\theta\cos\theta \Rightarrow \frac{(3-m)(1-m)}{2} = \text{sen}\,\theta\cos\theta \quad \text{... (II)}$$

De la expresión: $\text{Vers}\,\theta \cdot \text{cov}\,\theta$; obtenemos:

$$\text{Vers}\,\theta \cdot \text{cov}\,\theta = (1-\cos\theta)(1-\text{sen}\,\theta)$$

$$\text{Vers}\,\theta \cdot \text{cov}\,\theta = 1 - \text{sen}\,\theta - \cos\theta + \text{sen}\,\theta \cdot \cos\theta$$

$$\text{Vers}\,\theta \cdot \text{cov}\,\theta = 1 - (\text{sen}\,\theta + \cos\theta) + \text{sen}\,\theta \cdot \cos\theta \quad \text{... (III)}$$

Reemplazamos las expresiones (I) y (II) en (III):

$$\text{Vers}\,\theta \cdot \text{cov}\,\theta = 1 - (2-m) + \frac{(3-m)(1-m)}{2}$$

$$\text{Vers}\,\theta \cdot \text{cov}\,\theta = (m-1) + \frac{(3-m)(1-m)}{2}$$

Por propiedad:

$(3 - m)(1 - m) = (m - 3)(m - 1)$

$$\text{Vers}\,\theta \cdot \text{cov}\,\theta = (m-1) + \frac{(m-3)(m-1)}{2}$$

$$\text{Vers}\,\theta \cdot \text{cov}\,\theta = \frac{2(m-1) + (m-3)(m-1)}{2}$$

Factorizamos: "(m - 1)"

$$\text{Vers}\,\theta \cdot \text{cov}\,\theta = \frac{(m-1)[2 + (m-3)]}{2} = \frac{(m-1)(m-1)}{2} = \frac{(m-1)^2}{2}$$

$$\therefore \; \text{Vers}\,\theta \cdot \text{cov}\,\theta = \frac{(m-1)^2}{2}$$

Rpta. D

Ejercicio 7: Dada la igualdad: 3 cos x - sen x = 1. Calcular el valor de: $\dfrac{\text{sen } x + \cos x - 1}{1 - \text{sen } x}$

A) 4 B) -3 C) 2 D) 1 E) -1

Resolución:

La expresión: $\dfrac{\text{sen } x + \cos x - 1}{1 - \text{sen } x}$; se puede escribir de la manera siguiente:

$$\frac{\text{sen } x + \cos x - 1}{1 - \text{sen } x} = \frac{\cos x - (1 - \text{sen } x)}{(1 - \text{sen } x)}$$

Recuerda que: $\dfrac{A \pm B}{C} = \dfrac{A}{C} \pm \dfrac{B}{C}$

$$\frac{\text{sen } x + \cos x - 1}{1 - \text{sen } x} = \frac{\cos x}{(1 - \text{sen } x)} - \frac{\cancel{(1 - \text{sen } x)}}{\cancel{(1 - \text{sen } x)}}$$

$$\frac{\text{sen } x + \cos x - 1}{1 - \text{sen } x} = \frac{\cos x}{(1 - \text{sen } x)} - 1$$

multiplicamos numerador y denominador por la conjugada de (1 - sen x) osea por (1 + sen x)

$$\frac{\text{sen } x + \cos x - 1}{1 - \text{sen } x} = \frac{\cos x\,(1 + \text{sen } x)}{(1 - \text{sen } x)\,(1 + \text{sen } x)} - 1$$

$$\frac{\text{sen } x + \cos x - 1}{1 - \text{sen } x} = \frac{\cos x\,(1 + \text{sen } x)}{1 - \text{sen}^2 x} - 1$$

$$\frac{\text{sen } x + \cos x - 1}{1 - \text{sen } x} = \frac{\cancel{\cos x}\,(1 + \text{sen } x)}{\cancel{\cos^2 x}} - 1 \Rightarrow \frac{\text{sen } x + \cos x - 1}{1 - \text{sen } x} = \frac{1 + \text{sen } x}{\cos x} - 1 \quad \ldots(I)$$

- De la expresión: $3 \cos x - \text{sen } x = 1$; obtenemos que: $3 \cos x = 1 + \text{sen } x$ ...(II)

Reemplazamos (II) en (I): $\dfrac{\text{sen } x + \cos x - 1}{1 - \text{sen } x} = \dfrac{3 \cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}} - 1 = 2$ **Rpta. C**

Ejercicio 8 : Hallar: "M" para que la siguiente expresión sea una identidad:

$$\frac{\text{tg}^3 \theta}{1 + \text{tg}^2 \theta} + \frac{\text{cotg}^3 \theta}{1 + \text{cotg}^2 \theta} + 2\,M = \sec \theta \, \text{cosec}\, \theta$$

A) $-\text{sen}^2 \theta$ B) $\cos^2 \theta$ C) $\text{sen } \theta \cdot \cos \theta$ D) $-\text{sen } \theta \cdot \cos \theta$ E) $-\sec \theta \cdot \text{cosec } \theta$

Resolución:

Sabemos que: $1 + \text{tg}^2\theta = \sec^2 \theta$; $1 + \text{cotg}^2\theta = \text{cosec}^2 \theta$

Luego: $\dfrac{tg^3\theta}{sec^2\theta}+\dfrac{cotg^3\theta}{cosec^2\theta}+2\ M = sec\ \theta \cdot cosec\ \theta$

$$\frac{\left(\frac{sen^3\theta}{cos^3\theta}\right)}{\left(\frac{1}{cos^2\theta}\right)}+\frac{\left(\frac{cos^3\theta}{sen^3\theta}\right)}{\left(\frac{1}{sen^2\theta}\right)}+2\ M = sec\ \theta \cdot cosec\ \theta \Rightarrow \frac{sen^3\theta}{cos\ \theta}+\frac{cos^3\theta}{sen\ \theta}+2\ M = sec\ \theta \cdot cosec\ \theta$$

$$\frac{sen^4\theta+cos^4\theta}{sen\ \theta\ cos\ \theta}+2\ M = sec\ \theta \cdot cosec\ \theta$$

Recuerda que:

$$sen^4\theta+cos^4\theta=1-2\ sen^2\theta\ cos^2\theta$$

$$\frac{1-2\ sen^2\theta cos^2\theta}{sen\ \theta\ cos\ \theta}+2\ M = sec\ \theta \cdot cosec\ \theta$$

$$\frac{1}{sen\ \theta\ cos\ \theta}-\frac{2\ sen^2\theta\ cos^2\theta}{sen\ \theta\ cos\ \theta}+2\ M = sec\ \theta \cdot cosec\ \theta$$

$$\frac{1}{sen\ \theta}\cdot\frac{1}{cos\ \theta}-2\ sen\ \theta\ cos\ \theta+2\ M = sec\ \theta \cdot cosec\ \theta$$

$$\cancel{cosec\ \theta \cdot sec\ \theta}-2\ sen\ \theta\ cos\ \theta+2\ M = \cancel{sec\ \theta \cdot cosec\ \theta}$$

$$\cancel{2}\ sen\ \theta\ cos\ \theta = \cancel{2}\ M \quad \Rightarrow \quad \therefore\ \boxed{M = sen\theta\ cos\theta}$$ **Rpta. C**

Ejercicio 9 : Eliminar: "θ" a partir de: $sen\ \theta+cos\ \theta=\sqrt{b+1}$ ... (I) ; $tg\ \theta+cotg\ \theta=\dfrac{1}{a}$ ...(II)

A) a + b = 2 **B)** 2b = a + 1 **C)** 2a = b + 1 **D)** 2a = b **E)** a = 3b - 1

Resolución:

Elevamos al cuadrado ambos miembros de la expresión (I): $(sen\ \theta+cos\ \theta)^2 = \left(\sqrt{b+1}\right)^2$

$$\underbrace{sen^2\theta+cos^2\theta}_{1}+2\ sen\ \theta\ cos\ \theta = b+1$$

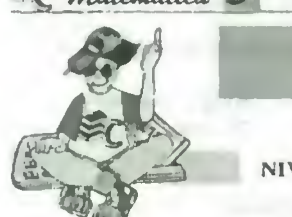
$$\cancel{1}+2\ sen\ \theta\ cos\ \theta = b+\cancel{1} \Rightarrow sen\ \theta\ cos\ \theta=b/2\ \text{... (I)}$$

De la expresión (II); obtenemos: $\dfrac{sen\ \theta}{cos\ \theta}+\dfrac{cos\ \theta}{sen\ \theta} = \dfrac{1}{a}$

$$\frac{sen^2\theta+cos^2\theta}{sen\ \theta\ cos\ \theta} = \frac{1}{a}\ ;\ \text{pero : } sen^2\theta+cos^2\theta=1$$

$$\frac{1}{sen\ \theta\ cos\ \theta} = \frac{1}{a} \Rightarrow a=sen\ \theta\ cos\ \theta\ \text{...(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I): $a = \dfrac{b}{2}$ ➡ $\therefore\ \boxed{2a=b}$ **Rpta. D**



EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

NIVEL I

Ejercicio 1: Reducir: $Q=\dfrac{\text{sen }\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{1+\cos\theta}{\text{sen }\theta}$

A) sen θ B) cosec θ C) 2 cos θ
D) 2 cosec θ E) 2 tg θ

Ejercicio 2: Reducir:

$$R=\frac{2\cos^2\alpha-1}{1-2\,\text{sen}^2\alpha}+\frac{1+\text{tg}^2\alpha}{1+\text{cotg}^2\alpha}$$

A) 0 B) $\sec^2\alpha$ C) 1 D) $\text{cosec}^2\alpha$ E) 2

Ejercicio 3: Simplificar:

$$S=\frac{1+\text{sen}^2\theta}{1+\text{cosec}^2\theta}+\frac{1+\cos^2\theta}{1+\sec^2\theta}+\frac{1+\text{tg}^2\theta}{1+\text{cotg}^2\theta}$$

A) 2 B) $\text{tg}^2\,\theta$ C) $\sec^2\theta$
D) $\text{cosec}^2\theta$ E) $\text{cotg}^2\,\theta$

Ejercicio 4: Señale cuáles son identidades:

I) $\dfrac{\text{sen }\theta}{1-\cos\theta}+\dfrac{1-\cos\theta}{\text{sen }\theta}=2\text{ cosec }\theta$

II) $\dfrac{\text{sen }\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{1+\cos\theta}{\text{sen }\theta}=2\text{ cosec }\theta$

III) $\dfrac{\text{sen }\theta}{1+\cos\theta}-\dfrac{1+\cos\theta}{\text{sen }\theta}=2\text{ cotg }\theta$

A) I, II B) II C) II, III D) todas E) Ninguna

Ejercicio 5: Simplificar la expresión:

$$E=\frac{\text{sen}^4\theta+\text{sen}^2\theta\cdot\cos^2\theta+\cos^4\theta}{\text{sen}^6\theta+2\,\text{sen}^2\theta\,\cos^2\theta+\cos^6\theta}$$

A) -1 B) 0 C) 1 D) tg θ E) cotg θ

Ejercicio 6: Dado: $\dfrac{a}{\text{tg }x}=\dfrac{b}{\text{cotg }x}$; Hallar:

$$T=\frac{\text{tg}^2x-\text{cotg}^2x}{\sec^2x+\text{cosec}^2x}$$

A) $\dfrac{a}{b}$ B) $\dfrac{b}{a}$ C) $\dfrac{a+b}{a-b}$ D) $\dfrac{a-b}{a+b}$ E) $1+\dfrac{a}{b}$

Ejercicio 7: Simplificar la expresión:

$$E=\frac{\text{sen}^2x-\text{tg}^2x}{\cos^2x-\text{cotg}^2x}$$

A) tg^2x B) $\text{cotg}^2\,x$ C) tg^4x D) cotg^4x E) tg^6x

Ejercicio 8: Reducir la expresión:

$$M=\cos^2x\cdot\left(\frac{\text{sen}^4x-\text{sen}^6x}{\cos^4x-\cos^6x}+1\right)$$

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Ejercicio 9: Reducir la expresión:

$$K=\sqrt[3]{\frac{\cos x-\sec x}{\text{sen }x-\text{cosec }x}}$$

A) sen x B) cos x C) tg x
D) cotg x E) sen x . cosec x

Ejercicio 10: Simplificar la expresión:

$$R=\frac{\text{sen }x\cdot\text{tg }x+\cos x\text{ cotg }x}{\sec x+\text{cosec }x}+\frac{1}{\text{tg }x+\text{cotg }x}$$

A) sen x B) cos x C) tg x
D) cotg x E) tg x cotg x

Clave de Respuestas

1. B	2. B	3. C	4. A	5. C
6. D	7. E	8. D	9. C	10. E

NIVEL II

Ejercicio : Simplificar la expresión:

$$R=\frac{2\ \text{cosec}\ x-3\ \text{cotg}^2 x-2}{3\ \text{cosec}\ x+1}+\text{cosec}\ x$$

A) -1 **B)** 0 **C)** 1 **D)** cotg x **E)** cosec x

Ejercicio : Simplificar la expresión:

$$Q=\frac{\text{sen}\ x}{1-\cos x}+\frac{\cos x}{1-\text{sen}\ x}-\text{cosec}\ x\ (1+\sec x)$$

A) sen x **B)** cos x **C)** tg x
D) sec x **E)** cosec x

Ejercicio : Si: $\text{tg}^2 x+\text{cotg}^2 x=7$. Calcular el valor de: $P=\text{tg}^3 x+\text{cotg}^3 x$

A) 15 **B)** 18 **C)** 21 **D)** 24 **E)** 28

Ejercicio : Si:

$F=(\text{tg}\,\alpha+\text{tg}\,\theta)\,(1-\text{cotg}\,\alpha\,.\,\text{cotg}\,\theta)$
$G=(\text{cotg}\,\alpha+\text{cotg}\,\theta)\,(1-\text{tg}\,\alpha\,.\,\text{tg}\,\theta)$.
Calcular: "F + G"

A) 0 **B)** 1 **C)** $\text{tg}\,\alpha$ **D)** $\text{tg}\,\theta$ **E)** $\text{tg}\,\alpha\,.\,\text{tg}\,\theta$

Ejercicio : Reducir la expresión:

$$R=\frac{(1+\text{sen}\ x+\cos x)^2}{(\text{tg}\ x+\text{sen}\ x)\ (\text{cotg}\ x+\cos x)}$$

A) 1/2 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

Ejercicio : Si: $\text{sen}\,\theta+\cos\theta=n$.

Hallar: $E=\text{tg}\,\theta+\text{cotg}\,\theta+\sec\theta+\text{cosec}\,\theta$

A) 1 - n **B)** 1 + n **C)** $\dfrac{2}{(1-n)}$

D) $\dfrac{1}{(1+n)}$ **E)** $\dfrac{2}{(n-1)}$

Ejercicio : Simplificar:

$$S=\left(\text{Sen}\ x\ \sqrt{\text{tg}\ x}+\cos x\ \sqrt{\text{cotg}\ x}\right)^2$$

A) sec x . cosec x **B)** tg x . cotg x
C) sen x . cos x **D)** cosec x . cotg x
E) sec x . tg x

Ejercicio : Simplificar:

$$E=\text{tg}\ x\ (1-\text{cotg}^2 x)+\text{cotg}\ x\ (1-\text{tg}^2 x)$$

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 4 **E)** 6

Ejercicio : Simplificar:

$$M=\cos^3 x+\sqrt{1+\text{sen}^2 x-\text{sen}^4 x-\text{sen}^6 x}$$

A) 2 sec x **B)** 4 cotg x **C)** 2 cos x
D) 3 tg x **E)** 4 sen x

Ejercicio 10 : Reducir:

$$Q=\frac{\sec x-\text{tg}x}{\sec x+\text{tg}x}(1+\text{sen}x)^2-\frac{\text{cosec}^2 x-1}{\text{cosec}^2 x\left(1+\text{cotg}^2 x\right)}$$

A) $\text{sen}^4 x$ **B)** 0 **C)** 1
D) $\cos^4 x$ **E)** $\text{sen}^2 x$

Ejercicio 11 : Calcular: "M + N"; si:

$M=(\sec x\,.\,\text{cosec}\ x)^2-(\text{tg}^2 x+\text{cotg}^2 x)$
$N=2+2\sec^2\theta\,.\,\text{tg}^2\theta-\text{tg}^4\theta-\sec^4\theta$

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

Ejercicio 12 : Simplificar:

$$E=\text{sen}\ x\ (1+\text{tg}\ x)+\cos x\ (1+\text{cotg}\ x)$$

A) cos x + sec x **B)** sen x + cosec x
C) sen x + cos x **D)** sec x + cosec x
E) tg x + cotg x

Ejercicio :Sabiendo que: $A_n=\text{sen}^n\theta+\cos^n\theta$; a que es igual: $6A_6-9A_4+10A_2-1$

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 0

Ejercicio 14: Si: $a = \cos\alpha$; $b = \text{cotg}\,\alpha$. Encontrar el valor de: $R = (1 - a^2)(1 + b^2)$

A) 1 B) -1 C) 2 D) 3 E) 4

Ejercicio 15: Si: $\dfrac{\sec x - \text{tg}\,x}{\text{cosec}\,x + \text{cotg}\,x} = 2$

Calcular el valor de: $E = \dfrac{\sec x + \text{tg}\,x}{\text{cosec}\,x - \text{cotg}\,x}$

A) 0 B) 1 C) 1/2 D) 2 E) 3/4

Clave de Respuestas

1. C	2. D	3. B	4. A	5. C
6. E	7. A	8. A	9. C	10. D
11. A	12. D	13. D	14. A	15. C

NIVEL III

Ejercicio 1: Calcular el valor de:

$$P = \frac{(\text{sen}\,\theta + \cos\theta)^2 + (\text{sen}\,\theta - \cos\theta)^2}{(\text{tg}\,\theta + \text{cotg}\,\theta)^2 - (\text{tg}\,\theta - \text{cotg}\,\theta)^2}$$

A) 0 B) 1 C) 1/2 D) 2 E) 1/4

Ejercicio 2: Reducir:

$$R = \frac{(1 + \text{sen}\,x + \cos x)(\cos x - 1)}{(1 - \text{sen}\,x - \cos x)(\text{sen}\,x + 1)}$$

A) sen x B) cos x C) tg x
D) cotg x E) sec x . cosec x

Ejercicio 3: Calcular el valor de "n" si:

$$\frac{3\,\text{tg}\,\beta - 2\sec^2\beta + 1}{2\,\text{tg}\,\beta \cdot \sec\beta - \sec\beta} = \cos\beta + n$$

A) -sen β B) -cos β C) tg β
D) cotg β E) cos β

Ejercicio 4: Si:

$$\frac{\sec x}{1 + \text{cosec}\,x} + \frac{\text{cosec}\,x}{1 + \sec x} = \frac{\text{Vers}\,x}{A} + \frac{\text{cov}\,x}{B}$$

Hallar: $\dfrac{B}{A}$

A) 1 B) cotg x C) cotg^2x
D) cotg^3x E) cotg^4x

Ejercicio 5: Si: $\cos^2x - \text{sen}^2 x = a$; Hallar:
$K = 4(\cos^6x - \text{sen}^6x) + 3(\text{sen}^2x - \cos^2 x)$

A) $4a^2$ B) a^3 C) $3a^3$ D) $3a^2$ E) 2a

Ejercicio 6: Reducir:

$$P = \sqrt{1 + 2\,\text{sen}\,x \cdot \cos x} + \sqrt{1 - 2\,\text{sen}\,x \cdot \cos x}$$

A) 2 sen x B) 4 cos x C) 6 sen x
D) 4 sen x E) 7 cos x

Ejercicio 7: Calcular: "cos x"; si:

$\sec x + \text{tg}\,x = a$

A) $\dfrac{a}{a^2+1}$ B) $\dfrac{a^2+1}{a}$ C) $\dfrac{2a}{a^2+1}$
D) $\dfrac{a^2+1}{2a}$ E) $\dfrac{a^2}{a+1}$

Ejercicio 8: Siendo: $A = \dfrac{\cos x}{1 - \text{sen}x}$, $B = \dfrac{\text{sen}x}{1 - \cos x}$;

Hallar: $K = (A + B)\left(A^{-1} + B^{-1}\right)$

A) sen x . cos x B) 2 sen x . cos x
C) sec x . cosec x D) 2 sec x . cosec x
E) N.A.

Ejercicio 9: Si: $P_{(n+1)} = \sec^n x - \text{tg}^n x$;

Hallar: $E = \dfrac{P_{(5)} - P_{(3)}}{P_{(5)} + P_{(3)}}$

A) $\text{cosec}^2 x$ B) $\text{sen}^2 x$ C) $\cos^2 x$
D) $\sec^2 x$ E) $\text{tg}^2 x$

Ejercicio 10 : Si:

$$\frac{\text{sen}\ \theta \cdot \cos\theta}{\text{sen}\ \theta + \cos\theta - 1} = x\ \text{sen}\ \theta + y\ \cos\theta + z$$

es una identidad, calcular el valor de:

$$M = \frac{x+y}{y+z} + \frac{y+z}{x+z} + \frac{x+z}{x+y}$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) N.A.

Ejercicio 11 : Si: $a\ \text{sen}\ x + b\cos x = a$. Hallar:

$$E = a\cos x - b\ \text{sen}\ x\ ;\ x \in IQ$$

A) a B) b C) ab

D) $\dfrac{b\left(a^2 - b^2\right)}{a^2 + b^2}$ E) $\dfrac{b\left(a^2 + b^2\right)}{a^2 - b^2}$

Ejercicio : Eliminar "θ":

$a(1 - \text{sen}\ \theta) = b\ \text{sen}\ \theta$ ...(I)

$a(1 - \cos\theta) = b\cos\theta$ ...(II)

A) $a^2 = b^2$ B) $a^2 - b^2 = 1$
C) $a^2 - b^2 = 2ab$ D) $a^2 + b^2 = 1$
E) $a^2 = b^2 + 2$

Ejercicio 13 : Eliminar "x" en:

$\text{tg}\ x - \text{cotg}\ x = a$ ...(I)

$\text{sen}\ x - \cos x = b\ \text{sen}\ x \cdot \cos x$ ...(II)

A) $a^2 + b^2 = \sqrt{2b^2 + a^2}$

B) $a^2 - b^2 = \sqrt{2b^2 - a^2}$

C) $a^2 + b^2 = 2\sqrt{2b^2 + a^2}$

D) $a^2 - b^2 = 2\left(\sqrt{2b^2 - a^2}\right)$

E) $a^2 - b^2 = 2\sqrt{a^2 + 4}$

Ejercicio 14 : Si: P; Q; R; son constantes que satisfacen la siguiente relación:

$$\frac{1}{(1 + \text{sen}\ x)} + \frac{1}{(\text{cosec}\ x - 1)} = P + Q\text{tg}^R x$$

Calcular: "P . Q . R"

A) 6 B) 2 C) 4 D) 8 E) 5

Ejercicio 15 : Si: $\text{Vers}\ x + \text{cov}\ x = \dfrac{5}{2}$

Hallar: $P = (\text{Vers}\ x - \text{cov}\ x)^2$

A) 1/4 B) 2/3 C) 1/3 D) 5/4 E) 7/4

Ejercicio 16 : Eliminar "θ" a partir de:

$$\frac{\text{sen}\ \theta}{a} + \frac{\cos\theta}{b} = \frac{1}{ab} \quad ...(1)$$

$$y\ \text{cotg}\ \theta = b/a \quad ...(2)$$

A) $a^2 + b^2 = a^2b^2$ B) $a^2 + b^2 = 2a^2b^2$
C) $a^2 + b^2 = 3a^2b^2$ D) $a^2 + b^2 = 4a^2b^2$
E) $a^2 + b^2 = ab$

Ejercicio 17 : Si: $A = \left(1 - \sec^2\theta\right)^{2n}$;

$B = \left(1 - \text{cosec}^2\theta\right)^{2n+1}$; $C = \left(\dfrac{\sec\theta - \cos\theta}{\text{cosec}\ \theta - \text{sen}\ \theta}\right)$

Encontrar: "A . B . C"

A) sec x B) tg x C) $-\text{tg}^2 x$
D) cos x E) - tgx

Ejercicio 18 : De las siguientes relaciones eliminar "α":

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha = a \qquad ...(1)$$

$$\operatorname{sen}^6\alpha + \cos^6\alpha = b \qquad ...(2)$$

A) $3a(a + b) = 1$ **B)** $b(a - 1) = 2$
C) $a(b - 1) = 2$ **D)** $b^2(1 - a) = 3$
E) $a^2(1 - b) = 3$

Ejercicio 19 : Hallar: $\frac{M}{N}$; en la identidad:

$$\frac{\operatorname{cosec}\alpha - (\sec\alpha + \operatorname{tg}\alpha - 1)\operatorname{cotg}^2\alpha}{\operatorname{cosec}^2\alpha - \sec\alpha\operatorname{cotg}^2\alpha} = N - M$$

A) $\operatorname{tg}\alpha$ **B)** $\operatorname{cotg}\alpha$ **C)** $\operatorname{sen}\alpha$ **D)** $\cos\alpha$ **E)** $\sec\alpha$

Ejercicio 20 : Si:

$$n = \frac{(\operatorname{cosec}\alpha + \operatorname{cosec}\beta)(\operatorname{cosec}\beta - \operatorname{cosec}\alpha)}{(\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\beta)(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta)}$$

Hallar: $\sec^{2n}\theta + \operatorname{cosec}^{2n}\theta$

A) 2 **B)** 1,5 **C)** 1 **D)** 0,8 **E)** 0,5

Ejercicio 21 : Si: $\operatorname{cotg} K\theta = K \operatorname{cotg}\theta$; Hallar: "(A - B)" en la igualdad:

$$\frac{\cos^2 K\theta}{\cos^2\theta} = \frac{A}{1 + B\cos^2\theta}$$

A) K **B)** K^2 **C)** 1 **D)** -1 **E)** $1 - 2K^2$

Ejercicio 22 : Si: sen a + cos a = 1/3; Hallar: tg a + cotg a

A) $\frac{-4}{9}$ **B)** $\frac{-2}{9}$ **C)** - 9 **D)** $\frac{-9}{2}$ **E)** $\frac{-9}{4}$

Ejercicio 23 : En la siguiente igualdad. Hallar: "m + n + p".

$$\operatorname{sen}^6\alpha + \cos^6\alpha + \operatorname{sen}^4\alpha + \cos^4\alpha + 5\operatorname{sen}^2\alpha - 7 = m\cos^2\alpha\,.\,(n + p\cos^2\alpha)$$

A) 4 **B)** 8 **C)** -8 **D)** -4 **E)** -5

Ejercicio 24 : Hallar el equivalente de:

$$M = \operatorname{sen}\theta\,.\,\operatorname{tg}^2\theta + \operatorname{sen}\theta - \operatorname{tg}^2\theta - 1$$

A) Vers θ . $\sec^2\theta$ **B)** -Vers θ . $\sec^2\theta$
C) cov θ . $\sec^2\theta$ **D)** -cov θ . $\sec^2\theta$
E) vers θ . cov θ

Ejercicio 25 : Eliminar ϕ:

$$\operatorname{cotg}\phi + \operatorname{tg}\phi = x \qquad ...(1)$$

y $$\operatorname{Vers}^2\phi + \operatorname{cov}^2\phi = y \qquad ...(2)$$

A) $(x + 2)(x - 3)y = 4$ **B)** $x^2 + y^2 = 16$
C) $x(y - 3)^2 = 4$ **D)** $x(y - 1)(y - 5) = 8$
E) $x(y - 2)(y - 3) = 16$

Clave de Respuestas

1. B	2. C	3. A	4. E	5. B
6. A	7. C	8. D	9. B	10. D
11. B	12. C	13. D	14. C	15. E
16. D	17. E	18. E	19. B	20. C
21. C	22. E	23. D	24. D	25. D

EJERCICIOS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Organizados por las Academias:
César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

PROBLEMA 1 : En la identidad: $(1 + \text{Sen}\theta + \text{Cos}\theta)^2 = K(1 + \text{Sen}\theta)(1 + \text{Cos}\theta)$. Hallar el valor de "K"

A) 3 B) 2 C) -1
D) 4 E) 6

Resolución:

Aplicando: $(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$; obtenemos:

$$1 + \underbrace{\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta}_{1} + 2\,\text{Sen}\theta + 2\,\text{Cos}\theta + 2\,\text{Sen}\theta\,\text{Cos}\theta = K(1 + \text{Sen}\theta)(1 + \text{Cos}\theta)$$

$$2 + 2(\text{Sen}\theta + \text{Cos}\theta) + 2\,\text{Sen}\theta\,\text{Cos}\theta = K(1 + \text{Sen}\theta)(1 + \text{Cos}\theta)$$

$$2\,[\cancel{1 + \text{Sen}\theta + \text{Cos}\theta + \text{Sen}\theta\,\text{Cos}\theta}] = K\,[\cancel{1 + \text{Sen}\theta + \text{Cos}\theta + \text{Sen}\theta\,\text{Cos}\theta}]$$

$$\Rightarrow \quad \therefore \quad \boxed{K = 2}$$ **Rpta. B**

PROBLEMA 2 : Encontrar el valor de "K" para que se verifique la identidad:

$$\text{Sen}^6\alpha + \text{Cos}^6\alpha = 1 - K\text{Sen}^2\alpha \, . \, \text{Cos}^2\alpha$$

A) 4/3 B) 3 C) 2/3
D) 3/4 E) 1

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir de la manera siguiente:

$$(\text{Sen}^2\alpha)^3 + (\text{Cos}^2\alpha)^3 = 1 - K\,\text{Sen}^2\alpha \cdot \text{Cos}^2\alpha$$

$$\underbrace{(\text{Sen}^2\alpha + \text{Cos}^2\alpha)}_{1}\left[(\text{Sen}^2\alpha)^2 + (\text{Cos}^2\alpha)^2 - \text{Sen}^2\alpha \cdot \text{Cos}^2\alpha\right] = 1 - K\,\text{Sen}^2\alpha \cdot \text{Cos}^2\alpha$$

$$(\text{Sen}^4\alpha + \text{Cos}^4\alpha - \underbrace{\text{Sen}^2\alpha \cdot \text{Cos}^2\alpha}) = 1 - K\,\text{Sen}^2\alpha \cdot \text{Cos}^2\alpha$$

$$(\underbrace{\text{Sen}^4\alpha + \text{Cos}^4\alpha + 2\text{Sen}^2\alpha \cdot \text{Cos}^2\alpha} - 3\text{Sen}^2\alpha \cdot \text{Cos}^2\alpha) = 1 - K\,\text{Sen}^2\alpha \cdot \text{Cos}^2\alpha$$

$$\underbrace{(\text{Sen}^2\alpha + \text{Cos}^2\alpha)}_{1}^2 - 3\,\text{Sen}^2\alpha\,\text{Cos}^2\alpha = 1 - K\,\text{Sen}^2\alpha\,\text{Cos}^2\alpha$$

$$1 - 3\text{Sen}^2\alpha \cdot \text{Cos}^2\alpha = 1 - K\,\text{Sen}^2\alpha \cdot \text{Cos}^2\alpha$$

Por comparación de términos: $\Rightarrow \boxed{K = 3}$ **Rpta. B**

PROBLEMA 3 : Reducir: $K=\dfrac{(\text{Senx}+\text{tgx})^2\ \text{Cosx}}{\text{Secx}+\text{Cosx}+2}$

A) Sen^2x B) Cos^2x C) $\text{tg}^2\,x$
D) 1 E) $\text{Cosec}^2\,x$

Resolución:

Aplicando: $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$; obtenemos:

$$K=\frac{(\text{Sen}^2x+2\ \text{Senx}\cdot\text{tgx}+\text{tg}^2x)\ \text{Cosx}}{\text{Secx}+\text{Cosx}+2}=\frac{\left(\text{Sen}^2x+2\ \text{Senx}\cdot\dfrac{\text{Senx}}{\text{Cosx}}+\dfrac{\text{Sen}^2x}{\text{Cos}^2x}\right)\cdot\text{Cosx}}{\left(\dfrac{1}{\text{Cosx}}+\text{Cosx}+2\right)}$$

$$K=\frac{\left(\dfrac{\text{Sen}^2x\cdot\text{Cos}^2x+2\ \text{Sen}^2x\cdot\text{Cosx}+\text{Sen}^2x}{\text{Cos}^2x}\right)\cdot\text{Cosx}}{\left(\dfrac{1+\text{Cos}^2x+2\ \text{Cosx}}{\text{Cosx}}\right)}$$

$$K=\frac{\text{Sen}^2x\ (\text{Cos}^2x+2\ \text{Cosx}+1)}{(1+\text{Cos}^2x+2\ \text{Cosx})\cdot\text{Cosx}}\cdot\text{Cosx}=\text{Sen}^2x \Rightarrow \therefore\ \boxed{K=\text{Sen}^2x}$$

Rpta. A

PROBLEMA 4 : ¿Para qué valor de "m" la siguiente expresión es una identidad?

A) 1 B) -2 C) 3
D) -3 E) 2

$(\text{Sen}\,x+\text{Secx})^2+1+\text{Cos}^2\,x=2+(1+\text{tg}\,x)^m$. Hallar "K"

Resolución:

Aplicando: $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$; obtenemos:

$$\underbrace{\text{Sen}^2x}+2\ \text{Senx}\cdot\text{Secx}+\text{Sec}^2x+1+\underbrace{\text{Cos}^2x}=2+(1+\text{tg}\,x)^m$$

(Sen²x + Cos²x = 1)

$$2+2\ \text{Sen}\,x\cdot\text{Sec}\,x+\text{Sec}^2x=2+(1+\text{tg}\,x)^m$$

$$2\text{Sen}x\cdot\frac{1}{\text{Cosx}}+\text{Sec}^2x=(1+\text{tg}\,x)^m$$

$$2\left(\frac{\text{Senx}}{\text{Cosx}}\right)+(1+\text{tg}^2x)=(1+\text{tg}\,x)^m$$

$$2\,\text{tg}\,x+1+\text{tg}^2x=(1+\text{tg}\,x)^m$$

$$1+2\text{tg}\,x+\text{tg}^2x=(1+\text{tg}\,x)^m \Rightarrow (1+\text{tg}\,x)^2=(1+\text{tg}\,x)^m\quad\therefore\ \boxed{m=2}$$

Rpta. E

Recordemos que:

- $\dfrac{\text{Senx}}{\text{Cosx}}=\text{tg}\,x$
- $\text{Sec}^2x=1+\text{tg}^2x$

PROBLEMA 5 : Si: $Sen^2x + Cos^4x = m$. Hallar: $K = Sen^4x + Cos^4x$

A) 2m B) 2m + 1 C) 2 (m + 1)
D) 2m - 1 E) 1 - m

Resolución:

Por identidad auxiliar: $\boxed{Sen^4x + Cos^4x = 1 - 2Sen^2x\,Cos^2x}$ $K = 1 - 2Sen^2x \cdot Cos^2x$ ...(I)

- De la condición: $Sen^2x + \underbrace{Cos^4x} = m$

$Sen^2x + \underbrace{(Cos^2x)^2} = m$; pero: $\boxed{Cos^2x = 1 - Sen^2x}$

$Sen^2x + (1 - Sen^2x)^2 = m$

$Sen^2x + (1 - 2Sen^2x + Sen^4x) = m \Rightarrow Sen^4x - Sen^2x = m - 1$ ...(II)

- De la expresión (I): $K = 1 - 2Sen^2x \cdot \underbrace{Cos^2x}$

$K = 1 - 2Sen^2x \cdot (1 - Sen^2x) = 1 - 2(Sen^2x - Sen^4x)$

$K = 1 + 2(Sen^4x - Sen^2x)$ ...(III)

Reemplazamos (II) en (III): $K = 1 + 2(m - 1)$ ➠ $\therefore$ $\boxed{K = 2m - 1}$ **Rpta. D**

PROBLEMA 6 : Reducir la expresión:

$$E = Cosec\,x - \sqrt{Cotg^2x - Cos^2x}$$

A) Cos x B) 1/2 Sen x C) 1/2 Cos x
D) Sen x E) tg x

Resolución:

$$E = \frac{1}{Senx} - \sqrt{\frac{Cos^2x}{Sen^2x} - Cos^2x} = \frac{1}{Senx} - \sqrt{Cos^2x\left(\frac{1}{Sen^2x} - 1\right)}$$

$$E = \frac{1}{Senx} - \sqrt{Cos^2x\left(\frac{1 - Sen^2x}{Sen^2x}\right)} \text{ ; pero: } \boxed{1 - Sen^2x = Cos^2x}$$

$$E = \frac{1}{Senx} - \sqrt{Cos^2x\left(\frac{Cos^2x}{Sen^2x}\right)} = \frac{1}{Senx} - \frac{Cosx \cdot Cosx}{Senx}$$

$$E = \frac{1 - Cos^2x}{Senx} = \frac{Sen^2x}{Senx} = Senx$$ ➠ $\therefore$ $\boxed{E = Senx}$ **Rpta. D**

PROBLEMA 7 : Dado: $Secx - tgx = \frac{2}{3}$. Calcular el valor de: $E = Secx \cdot tgx$

A) $\frac{15}{64}$ B) $\frac{25}{81}$ C) $\frac{35}{49}$ D) $\frac{65}{108}$ E) $\frac{65}{144}$

Resolución:

• De la condición: $\underbrace{\text{Secx}} - \underbrace{\text{tg}x} = \dfrac{2}{3}$; obtenemos: $\dfrac{1}{\text{Cosx}} - \dfrac{\text{Senx}}{\text{Cosx}} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{1-\text{Senx}}{\text{Cosx}} = \dfrac{2}{3}$

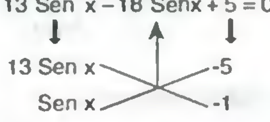
Elevamos al cuadrado a ambos miembros de esta última expresión:

$$\left(\frac{1-\text{Senx}}{\text{Cosx}}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow \frac{(1-\text{Senx})^2}{\text{Cos}^2x} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{1-2\ \text{Senx}+\text{Sen}^2x}{1-\text{Sen}^2x} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9-18\ \text{Senx}+9\ \text{Sen}^2x = 4-4\ \text{Sen}^2x$$

$$13\ \text{Sen}^2x - 18\ \text{Senx} + 5 = 0$$

Factorizamos por el Método del Aspa:



Donde: (13 Sen x - 5) . (Sen x - 1) = 0

i) 13 Sen x - 5 = 0 $\Rightarrow$ **Sen x = 5/13** ii) Sen x - 1 = 0 $\Rightarrow$ **Sen x = 1**

• El valor de Senx = 5/13, lo llevamos a un triángulo rectángulo:

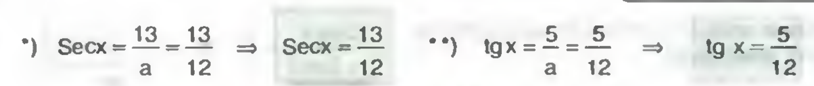
$$\text{Senx} = \frac{5}{13} \begin{array}{l}\rightarrow \textit{Cateto opuesto} \\ \rightarrow \textit{Hipotenusa}\end{array}$$

x
13
a
5

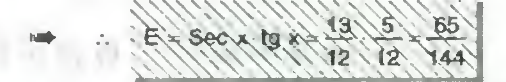
• Calculamos el valor de "a", aplicando el Teorema de Pitágoras:

$13^2 = a^2 + 5^2 \Rightarrow 169 - 25 = a^2 \Rightarrow \therefore$ **a = 12**

Luego:



*) $\text{Secx} = \dfrac{13}{a} = \dfrac{13}{12} \Rightarrow$ $\boxed{\text{Secx} = \dfrac{13}{12}}$ **) $\text{tg}x = \dfrac{5}{a} = \dfrac{5}{12} \Rightarrow$ $\boxed{\text{tg}\ x = \dfrac{5}{12}}$



$\therefore\ \boxed{E = \text{Sec}\,x \cdot \text{tg}\,x = \dfrac{13}{12} \cdot \dfrac{5}{12} = \dfrac{65}{144}}$ **Rpta. E**

Problema 8 : Reducir la expresión:

$$K = \frac{2\text{Cos}x}{\text{Sen}x+\text{Cos}x-1} - \frac{\text{Sen}x}{1-\text{Cos}x}$$

A) Sec x B) Cosec x C) Sen x
D) Cos x E) 1

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir de la manera siguiente: $K = \dfrac{2\ \text{Cos}x}{[(\text{Sen}x+\text{Cos}x)-1]} - \dfrac{\text{Sen}x}{(1-\text{Cos}x)}$

$$K = \frac{2\cos x\,[(\operatorname{Sen} x + \cos x) + 1]}{[(\operatorname{Sen} x + \cos x) - 1]\,[(\operatorname{Sen} x + \cos x) + 1} - \frac{\operatorname{Sen} x\,(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$$

$$K = \frac{2\cos x\,(\operatorname{Sen} x + \cos x + 1)}{(\operatorname{Sen} x + \cos x)^2 - 1} - \frac{\operatorname{Sen} x\,(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x}$$

$$K = \frac{2\cos x\,(\operatorname{Sen} x + \cos x + 1)}{\underbrace{\operatorname{Sen}^2 x + \cos^2 x}_{1} + 2\operatorname{Sen} x \cos x - 1} - \frac{\operatorname{Sen} x\,(1 + \cos x)}{\operatorname{Sen}^2 x}$$

$$K = \frac{2\cos x\,(\operatorname{Sen} x + \cos x + 1)}{2\operatorname{Sen} x \cos x} - \frac{(1 + \cos x)}{\operatorname{Sen} x}$$

$$K = \frac{\operatorname{Sen} x + \cos x + 1 - 1 - \cos x}{\operatorname{Sen} x} \Rightarrow \therefore\ K = 1$$ **Rpta. E**

PROBLEMA 9 : Dada la expresión:

$5\cos x + \operatorname{Sen} x = 1$. Calcular: $E = \dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{Sen} x}$

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

Resolución:

- De la condición: $5\cos x + \operatorname{Sen} x = 1 \Rightarrow 5\cos x = (1 - \operatorname{Sen} x) \Rightarrow \dfrac{\cos x}{(1 - \operatorname{Sen} x)} = \dfrac{1}{5}$

- El denominador del primer miembro, racionalizamos por su conjugada osea por: "(1 + Sen x)"; veamos:

$$\frac{\cos x(1 + \operatorname{Sen} x)}{(1 - \operatorname{Sen} x)(1 + \operatorname{Sen} x)} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{\cos x(1 + \operatorname{Sen} x)}{1 - \operatorname{Sen}^2 x} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{\cos x(1 + \operatorname{Sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1 + \operatorname{Sen} x}{\cos x} = \frac{1}{5}$$

Invertimos ambos miembros de esta última expresión; obteniendo:

$$\frac{\cos x}{1 + \operatorname{Sen} x} = \frac{5}{1} \Rightarrow \therefore\ E = 5$$ **Rpta. C**

PROBLEMA 10 : Simplificar:

$$R = \sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{1 + \cos x}$$

A) $\sqrt{2\ (1 + \operatorname{Sen} x)}$ B) $\sqrt{2\ (1 - \operatorname{Sen} x)}$

C) $\sqrt{2\ + \operatorname{Sen} x}$ D) $\sqrt{2\ - \operatorname{Sen} x}$

E) $\sqrt{2\ + \operatorname{Sen} x}$

Resolución:

- Elevamos al cuadrado ambos miembros de la expresión "R":

$$R^2 = \left(\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{1 + \cos x}\right)^2$$

$$R^2 = \left(\sqrt{1 - \cos x}\right)^2 + \left(\sqrt{1 + \cos x}\right)^2 + 2\sqrt{1 - \cos x} \cdot \sqrt{1 + \cos x}$$

$$R^2 = 1 - \cancel{Cos\,x} + 1 + \cancel{Cos\,x} - 2\sqrt{(1-Cos\,x)(1+Cos\,x)}$$

$$R^2 = 2 - 2\sqrt{1-Cos^2x}$$; pero: $1 - Cos^2 x = Sen^2 x$

$$R^2 = 2 - 2\sqrt{Sen^2x} \Rightarrow R^2 = 2 - 2\,Sen\,x \implies \therefore \boxed{R = \sqrt{2(1-Sen\,x)}}$$ **Rpta. B**

PROBLEMA 11 : Simplificar:

$$P = \frac{Vers^2x + Cov^2x - 1}{Vers\,x - Sen\,x}$$

A) 1 B) 2 C) -1
D) -2 E) Vers x

Resolución:

Aplicando: $Versx = 1 - Cosx$ $\wedge$ $Covx = 1 - Senx$

Obtenemos: $$P = \frac{(1-Cos\,x)^2 + (1-Sen\,x)^2 - 1}{\underbrace{(1-Cos\,x) - Sen\,x}_{①}} = \frac{(1-2Cos\,x+Cos^2x)+(1-2Sen\,x+Sen^2x)-1}{1-Cos\,x-Sen\,x}$$

$$P = \frac{1-2Cos\,x+Sen^2x+Cos^2x-2Sen\,x}{1-Cos\,x-Sen\,x} = \frac{2-2Cos\,x-2Sen\,x}{1-Cos\,x-Sen\,x}$$

$$P = \frac{2\cancel{(1-Cos\,x-Sen\,x)}}{\cancel{(1-Cos\,x-Sen\,x)}} \implies \therefore \boxed{P=2}$$ **Rpta. B**

PROBLEMA 12 : Eliminar "θ" de:

$a\,Sen\,\theta = b\,Sen\,\theta + Cos\,\theta$ ...(I)

$b\,Cos\,\theta = Sen\,\theta - a\,Cos\,\theta$ ...(II)

A) ab = 1 B) a - b = 1 C) a + b = 1
D) $a^2 + b^2 = 1$ E) $a^2 - b^2 = 1$

Resolución:

• De la expresión (I):

$$a\,Sen\theta = b\,Sen\theta + Cos\theta$$
$$a\,Sen\theta - b\,Sen\theta = Cos\theta$$
$$(a-b)\,Sen\theta = Cos\theta$$
$$\underbrace{\frac{Sen\theta}{Cos\theta}} = \frac{1}{(a-b)}$$
$$tg\theta = \frac{1}{(a-b)} \quad ...(1)$$

• De la expresión (II):

$$b\,Cos\theta = Sen\theta - a\,Cos\theta$$
$$b\,Cos\theta + a\,Cos\theta = Sen\theta$$
$$(a+b)\,Cos\theta = Sen\theta$$
$$\underbrace{a+b} = \frac{Sen\theta}{Cos\theta}$$
$$(a+b) = tg\theta \quad ...(2)$$

Igualando las ecuaciones (1) y (2); obtenemos:

$$\frac{1}{a-b} = a+b \Rightarrow 1 = (a+b)(a-b) \implies \therefore \boxed{1 = a^2 - b^2}$$ **Rpta. E**

¿SABÍAS QUE...

... uno de los primeros intereses científicos del hombre fue el estudio de la Astronomía?

Egipcios y *babilonios* hicieron grandes contribuciones a esta ciencia, muchos siglos antes de Cristo, que luego ampliaron los *griegos*.

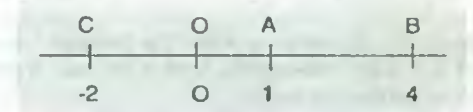
Los estudios de astronomía exigieron conocimientos relativos a triángulos. Dicha rama de la Matemática pasó a denominarse **TRIGONOMETRÍA** *(tri = tres; gono = ángulo y metría = medida).* Ya en época de Euclides (siglo III AC) aparecen propiedades y fórmulas utilizadas en Trigonometría.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO DE CUALQUIER MAGNITUD

5.1 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO DE CUALQUIER MAGNITUD

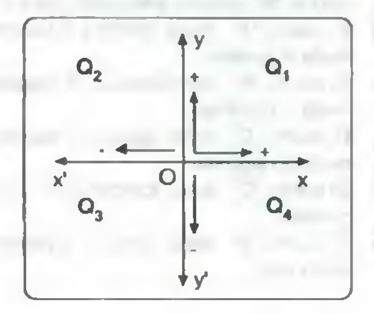
- **ESCALA NUMÉRICA:** Una recta dirigida es una recta en la que se han señalado dos sentidos; uno positivo y otro negativo. El sentido se indica con una flecha.

  Se determina una **escala numérica** cuando se escogen un punto O (véase la figura), llamado origen, y una unidad de medida OA = 1, en una recta dirigida. En esta escala "B" esta situado a 4 unidades a la derecha de O (esto es en el sentido positivo a partir de O) y "C" esta a dos unidades a la izquierda de O (esto es, en la sentido negativo a partir de O).



  La distancia dirigida OB = + 4 y la distancia dirigida OC = -2. Es importante observar que puesto que la recta está dirigida, $OB \neq BO$ y $OC \neq CO$. La distancia dirigida BO = -4, porque se mide en sentido contrario al que se ha tomado como positivo y la distancia dirigida CO = + 2. Entonces. CB = CO + OB = 2 + 4 = 6 y BC = BO + OC = (-4) + (-2) = -6.

- **SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES (S.C.R.) :** Es un plano que se forma al cortarse perpendicularmente dos rectas, una de las rectas se designa como eje "x" y la otra como "y". veamos la figura.



Ejes de Coordenadas:

x'x : Es el eje de las abscisas o eje de las "x"
yy' : Es el eje de las ordenadas o eje de las "y"
O : Es el origen de coordenadas

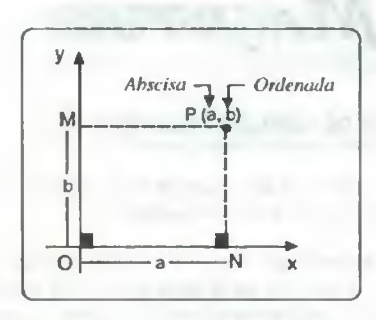
Semi Ejes

Ox : Es el semieje (+) de las abscisas
Ox' : Es el semieje (-) de las abscisas
Oy : Es el semieje (+) de las ordenadas
Oy' : Es el semieje (-) de las ordenadas

Cuadrantes: El primer cuadrante es xOy : (Q_1) El segundo cuadrante es yOx' : (Q_2)
El tercer cuadrante es x'Oy' : (Q_3) El cuarto cuadrante es xOy' : (Q_4)

Posición de un Punto o Coordenadas de un Punto.

Se llama asi, a la localización de un punto en el plano cartesiano. Así:



Abscisa de un Punto.

Es la distancia de un punto al eje de las ordenadas.

De la figura: MP = ON ⇒ **Abscisa**

Ordenada de un Punto:

Es la distancia de un punto al eje de las abscisas.

De la figura: OM = NP ⇒ **Ordenada**

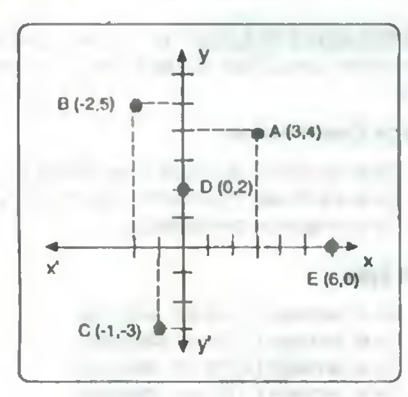
Analíticamente un punto se representa así:

P (a, b) donde "a" es la abscisa y "b" la ordenada del punto.

Observación: Al punto P (a, b), también se llama "Par Ordenado" de números, es un par en el cual el orden es importante. Así, el par ordenado (-2, 5) no es igual que el par ordenado (5, -2). Además a, b pertenecen al campo de los números reales.

Determinación de un Punto por sus Coordenadas

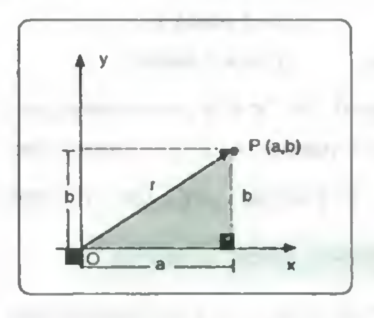
Localice los puntos: A (3, 4) ; B (-2, 5) ; C (-1, 3) ; D (0, 2) y E (6, 0)



- En primer lugar, se trazan dos reclas dirigidas, perpendiculares entre si.
- En segundo lugar marcamos sobre ellas, unidades de tamaño adecuado, (vea la figura)
- El punto "A", tiene abscisa 3 positiva y ordenada 4 positiva.
- El punto "B", tiene abscisa 2 negativa y ordenada 5 positiva.
- El punto "C", tiene abscisa 1 negativa y ordenada 3 negativa.
- El punto "D", tiene abscisa cero y ordenada 2 positiva.
- El punto "E", tiene abscisa 6 positiva y ordenada cero.

Radio Vector (r): Es el segmento dirigido que va del origen al punto P (a, b) y se representa por "r" y es siempre positiva, su valor está dado por la fórmula.: $|r| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Demostración:



- Ubicamos el punto P (a, b), en el plano cartesiano.
- Por el teorema de Pitágoras, calculamos "r".

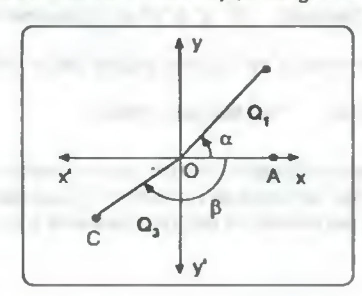
$$r^2 = a^2 + b^2$$

Donde: $$|r| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Siendo: a = abscisa; b = ordenada; r = radio vector, (r > O)

5.1.1 ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL

Un ángulo está en posición normal si su vértice está en el origen y su lado inicial coincide con el semieje positivo de las abscisas y su lado final en cualquier parte del plano. Si el lado final coincide con un eje, el ángulo es múltiplo de 90°.

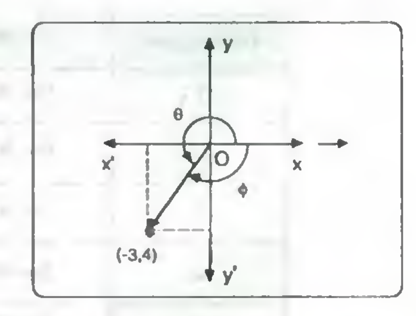


α	:	ángulo en posición normal (+)
β	:	ángulo en posición normal (-)
OA	:	coincide con el eje (+) Ox
α	:	ángulo de Q_1 ***(Primer cuadrante)***
β	:	ángulo de Q_3 ***(tercer cuadrante)***

Ejemplo: Trace en posición normal un ángulo cuyo lado terminal pasa por el punto (-3, -4).

Resolución:

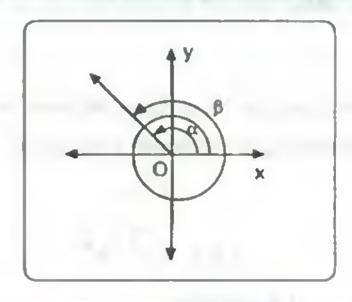
Según la figura "θ" es un ángulo positivo y "ϕ" es un ángulo negativo. Donde los dos ángulos cumplen con la condición del problema.



5.1.2 ÁNGULOS COTERMINALES.

Dos o más ángulos en posición normal son coterminales cuando sus lados finales coinciden, si dos ángulos son coterminales, su diferencia debe dar; un número entero de vueltas o revoluciones.

- **ÁNGULOS COTERMINALES QUE TIENEN ORIENTACIÓN POSITIVA**



- En la figura α y β son coterminales, además se observa que:

$$\beta = 1 \text{ vuelta} + \alpha$$

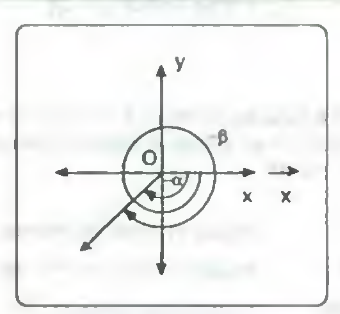
Donde: $\beta - \alpha = 1$ vuelta

En general: si: "x" é "y" son coterminales

x - y = n vueltas ó x - y = n revoluciones

Luego: $x - y = n$ rev. $= 2n\pi$ rad. $= n \times 360°$

- **ÁNGULOS COTERMINALES QUE TIENEN ORIENTACIÓN NEGATIVA**



- En la ligura: -α y -β, son coterminales, a demás se observa que:

$$-\beta = -\alpha - 360°$$

Donde: $360° = \beta - \alpha$

En General: Si: "x" é "y" son coterminales

Entonces: $x - y = n$ rev. $= 2n\pi$ rad. $= n \times 360°$

Siendo: **"n" número entero**

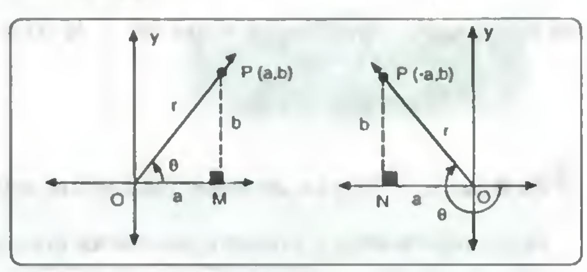
- **ÁNGULOS CUADRANTALES** : Un ángulo en posición normal, es cuadrantal, cuando su lado final coincide con cualquiera de los semiejes de un sistema de coordenadas rectangulares. Los ángulos cuadrantes no pertenecen a ningún cuadrante y son de la forma: $n \times 90°$ ó $n \times \frac{\pi}{2}$rad. ($\forall\ n \in Z$)

n (# entero)	$n \times 90°$ ó $n\frac{\pi}{2}$rad	Angulo
–1	$(-1) \times 90° = (-1) \times \frac{\pi}{2}$rad	$-90° = -\frac{\pi}{2}$rad
0	$0 \times 90° = 0 \times \frac{\pi}{2}$rad	$0° = 0$rad
1	$1 \times 90° = 1 \times \frac{\pi}{2}$rad	$90° = \frac{\pi}{2}$rad
2	$2 \times 90° = 2 \times \frac{\pi}{2}$rad	$180° = \pi$ rad
3	$3 \times 90° = 3 \times \frac{\pi}{2}$rad	$270° = \frac{3\pi}{2}$rad
4	$4 \times 90° = 4 \times \frac{\pi}{2}$rad	$360° = 2\pi$ rad

5.1.3 Razones Trigonométricas de un Ángulo en Posición Normal

Las razones trigonométricas del ángulo "θ" se definen como se muestra en la tabla: en las definiciones que siguen, se va a establecer el dominio y el recorrido de las razones trigonométricas aunque deberían ser evidentes.

Sea "θ" un ángulo en posición normal y sea "P" un punto cualquiera (distinto de O) en el lado terminal de "θ".



TABLA

RAZON. TRIGON.	REGLA DE CORRESPONDENCIA	DOMINIO	RECORRIDO
sen θ =	$\frac{\text{Ordenada de P}}{\text{Radio vector de P}} = \frac{b}{r}$	Todos los ángulos	-1 ≤ todos los números reales ≤ 1
cos θ =	$\frac{\text{Abscisa de P}}{\text{Radio vector de P}} = \frac{a}{r}$	Todos los ángulos	-1 ≤ todos los números reales ≤ 1
tg θ =	$\frac{\text{Ordenada de P}}{\text{Abscisa de P}} = \frac{b}{a}$	Todos los ángulos para los cuales $a \neq 0$	Todos los números reales
cotg θ =	$\frac{\text{Abscisa de P}}{\text{Ordenada de P}} = \frac{a}{b}$	Todos los ángulos para los cuales $b \neq 0$	Todos los números reales
sec θ =	$\frac{\text{Radio vector de P}}{\text{Abscisa de P}} = \frac{r}{a}$	Todos los ángulos para los cuales $a \neq 0$	Todos los números reales ≤ -1 ó ≥ 1
cosec θ =	$\frac{\text{Radio vector de P}}{\text{Ordenada de P}} = \frac{r}{b}$	Todos los ángulos para los cuales $b \neq 0$	Todos los números reales ≤ -1 ó ≥ 1

Propiedad Fundamental: *Las razones trigonométricas de dos o más ángulos coterminales, son iguales, veamos algunos ejemplos:*

Ejemplo 1 : Sen 400° = ?

Resolución:

$$\text{sen}(400°) = \text{sen}(\overbrace{360°}^{\text{1 vuelta}} + 40°) = \text{sen } 40° \Rightarrow \therefore \text{sen } 400° = \text{sen } 40°$$

Ejemplo 2 : cos 730° = ?

Resolución:

$$\cos(730°) = \cos(\overbrace{2\times 360°}^{2\text{ vueltas}}+10°) = \cos 10°$$

$\therefore$ **cos 730° = cos 10°**

Ejemplo 3 : tg 1120° = ?

Resolución:

$$tg(1120°) = tg(\overbrace{3\times 360°}^{3\text{ vueltas}}+40°) = tg\ 40°$$

$\therefore$ **tg 1120° = tg 40°**

EN GENERAL: Si: α y θ son coterminales (α > θ), entonces:

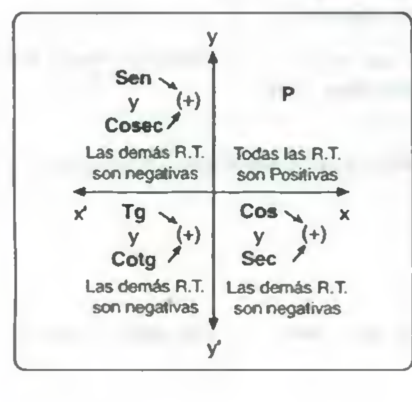
Razón trigonométrica α = Razón trigonométrica (n x vueltas + θ) = R.T. (θ)

R.T. (α) = R. T. (n x Rev. + θ) = R.T (θ)

SIGNOS DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

En el presente cuadro se ofrece el signo de cada razón trigonométrica para cada cuadrante.

Razón Trigonométrica	Q1 (1° cuadrante)	Q2 (2° cuadrante)	Q3 (3° cuadrante)	Q4 (4° cuadrante)
sen	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tg	+	-	+	-
cotg	+	-	+	-
sec	+	-	-	+
cosec	+	+	-	-



Siendo:

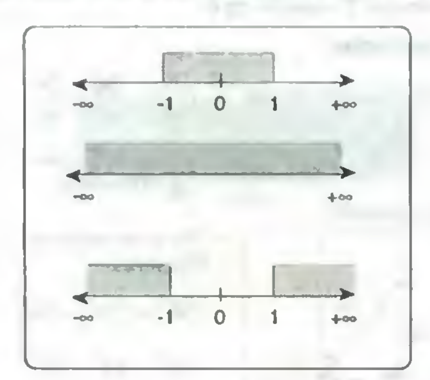
P : Primer cuadrante
S : Segundo cuadrante
T : Tercer cuadrante
C : Cuarto cuadrante
R.T. : Razón trigonométrica

VALORES QUE PUEDEN TOMAR LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

I. $-1 \le$ sen (ángulo), cos (ángulo) ≤ 1 ➡

II. $-\infty <$ tg (ángulo), cotg (ángulo) $< +\infty$ ➡

III. sec (ángulo), cosec (ángulo) ≥ 1 v sec (ángulo), cosec (ángulo) ≤ -1 ➡



TALLER DE EJERCICIOS Nº 10

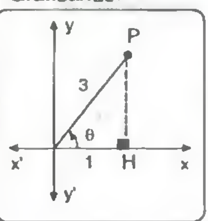
Ejercicio 1: Siendo: $\cos\theta = 0,\widehat{3}$; ($\theta \in Q_1$);
Calcular: "tg θ"

Resolución:

- De la condición: $\cos\theta = 0,\widehat{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$\therefore \cos\theta = \frac{1}{3}$ → *Cateto Adyacente* / → *Hipotenusa*

- Graficando:



- Por el teorema de Pitágoras:

$\overline{OP}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{OH}^2$

$3^2 = \overline{PH}^2 + 1^2$

$8 = \overline{PH}^2 \Rightarrow \sqrt{8} = \overline{PH}$

$\therefore 2\sqrt{2} = \overline{PH}$

Luego:

$\text{tg}\,\theta = \frac{\overline{PH}}{\overline{OH}} = \frac{2\sqrt{2}}{1}$ ➡ $\therefore$ $\text{tg}\,\theta = 2\sqrt{2}$

Rpta.

Ejercicio 2: Siendo: $\sec\alpha = 1,\widehat{6}$; ($\alpha \in Q_1$);
Calcular: "sen α"

Resolución:

Rpta. sen α = 4/5

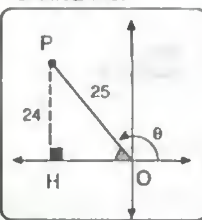
Ejercicio 3 ; Siendo: sen θ = 0,96 ; ($\theta \in Q_2$);
Calcular: E = sec θ - tg θ

Resolución:

• De la condición: $\text{sen }\theta = 0{,}96 = \frac{96}{100} = \frac{24}{25}$

$\therefore\ \text{sen }\theta = \frac{24}{25}$ → *Cateto Opuesto* / → *Hipotenusa*

• Graficando:



• Por el teorema de Pitágoras:

$\overline{OP}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{OH}^2$

$25^2 = 24^2 + \overline{OH}^2$

$\therefore\ -7 = \overline{OH}$

Luego:

$E = \sec\theta - \text{tg }\theta$

$E = \frac{\overline{OP}}{\overline{OH}} - \frac{\overline{PH}}{\overline{OH}} = \frac{25}{-7} - \frac{24}{-7}$ ➡ $\therefore\ E = \frac{-1}{7}$

Rpta.

Ejercicio 4 ; Siendo: tg α = -0,75 ; ($\alpha \in Q_4$);
Calcular: M = cos α - sen α

Resolución:

Rpta. M = 7/5

TALLER DE EJERCICIOS Nº 11

Ejercicio 1 : Hallar el equivalente de:
sen 1 470°:

Resolución:

• En primer lugar realizamos la siguiente operación:

1470°	360°
1440°	4
30°	

➡ $1470° = 4 \times 360° + 30°$ (*4 vueltas*)

Luego: $\text{sen } 1470° = \text{sen }(4 \times 360° + 30°)$ (*4 vueltas*)

$\therefore\ \text{sen } 1470° = \text{sen } 30° = 1/2$ ***Rpta.***

Ejercicio 2 : Hallar el equivalente de:
tg 2 580°

Resolución:

Rpta. $\text{tg } 2580° = \sqrt{3}$

Ejercicio 3 : Hallar el equivalente de: cosec 3 256°:

Resolución:

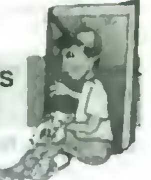
Rpta. cosec 3 256° = 25/7

Ejercicio 4 : Hallar el equivalente de: ctg 4 365°

Resolución:

Rpta. ctg 4 365° = 1

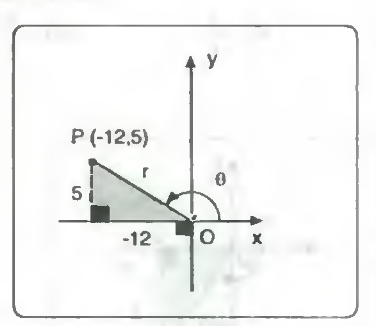
EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO DE CUALQUIER MAGNITUD TIPO I.B.M.



Ejercicio 1 : Si el punto P (-12, 5), pertenecen al lado final del ángulo en posición normal "θ", ($\theta \in Q_2$). Hallar: "Cos θ"

A) $-\frac{12}{13}$ B) $-\frac{5}{12}$ C) $-\frac{12}{5}$ D) $-\frac{13}{12}$ E) $\frac{13}{5}$

Resolución:



Ubicamos el punto P (-12, 5), en el plano cartesiano, veamos la figura:

Por el teorema de Pitágoras, calculamos "r"

$$r^2 = (5)^2 + (-12)^2$$

$$r^2 = 25 + 144 = 169$$

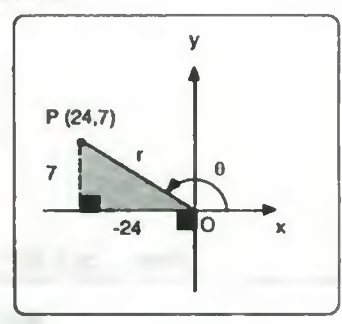
$$r = \sqrt{169} \Rightarrow \therefore r = 13$$

Luego: $\cos\theta = \frac{\text{Abscisa}}{\text{Radio Vector}} = \frac{-12}{13} \Rightarrow \therefore \boxed{\cos\theta = \frac{-12}{13}}$ **Rpta. A**

Ejercicio 2 : Si el punto P (-24, 7), es un punto que pertenece al lado final del ángulo en posición normal θ Calcular: "cosec θ - cotg θ"

A) $\frac{1}{7}$ B) 7 C) $-\frac{1}{7}$ D) $-\frac{24}{7}$ E) $\frac{24}{7}$

Resolución:



Ubicamos el punto P (-24, 7); en el plano cartesiano, veamos:

Por el teorema de Pitágoras, calculamos "r"

$$r^2 = (-24)^2 + (7)^2$$

$$r^2 = 576 + 49 = 625$$

$$r = \sqrt{625} \Rightarrow \therefore \boxed{R = 25}$$

Luego: $\text{cosec}\ \theta = \dfrac{\text{Radio Vector}}{\text{Ordenada}} = \dfrac{25}{7} \Rightarrow \text{cotg}\ \theta = \dfrac{\text{Abscisa}}{\text{Ordenada}} = \dfrac{-24}{7}$

Los valores hallados, lo reemplazamos en la expresión incógnita:

$$\text{cosec}\ \theta - \text{cotg}\ \theta = \frac{25}{7} - \frac{-24}{7} \Rightarrow \text{cosec}\ \theta - \text{cotg}\ \theta = \frac{25+24}{7} = \frac{49}{7} = 7$$

$$\therefore \boxed{\text{cosec}\ \theta - \text{cotg}\ \theta = 7}$$ **Rpta. B**

Ejercicio 3: Si: $\text{cotg}\ \alpha = -\frac{3}{4}$; y cumpliéndose que: $\alpha \in Q_4$, hallar el valor de: $R = \text{sen}\ \alpha + \cos\alpha$

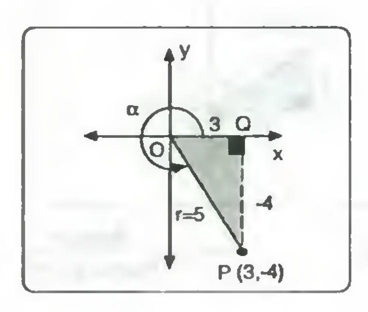
A) $\frac{1}{5}$ B) $-\frac{1}{5}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $-\frac{3}{5}$ E) $-\frac{4}{5}$

Resolución:

Sabemos que:

$$\text{cotg}\ \alpha = -\frac{3}{4} = \frac{3}{-4}$$

(3 ← Abscisa; −4 ← Ordenada)



- Por el teorema de Pitágoras, calculamos OP

$$\overline{OP}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{QP}^2$$

$$\overline{OP}^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$\overline{OP} = \sqrt{25} \Rightarrow \therefore \overline{OP} = 5$$

Luego: $R = \text{sen}\,\alpha + \cos\alpha$

$$R = \frac{\text{Ordenada}}{\text{Radio Vector}} + \frac{\text{Abscisa}}{\text{Radio Vector}}$$

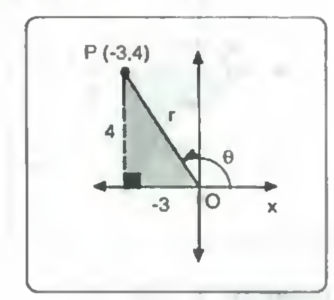
$$R = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{-4+3}{5} = \frac{-1}{5} \Rightarrow \therefore R = -\frac{1}{5}$$

Rpta. B

Ejercicio 4: Si el punto P (-3, 4) es un punto que pertenece al lado final del ánguo "θ" en posición normal. Calcular: $R = \sqrt{\text{sen}\,\theta \cdot \cos\theta \cdot \text{tg}\,\theta}$

A) 3/4 **B)** 4/5 **C)** 3/5 **D)** - 3/5 **E)** N.A.

Resolución:



Ubicamos el punto P (-3, 4), en el plano cartesiano, veamos:

Por eí teorema de Pitágoras calculamos "r"

$$r^2 = 4^2 + (-3)^2$$

$$r^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow r = \sqrt{25} \Rightarrow \therefore r = 5$$

Luego: $\text{sen}\,\theta = \dfrac{\text{Ordenada}}{\text{Radio Vector}} = \dfrac{4}{5}$

$$\cos\theta = \frac{\text{Abscisa}}{\text{Radio Vector}} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5} \;;\; \text{tg}\,\theta = \frac{\text{Ordenada}}{\text{Abscisa}} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$$

Reemplazamos los valores hallados en la expresión "R".

$$R = \sqrt{\text{sen}\,\theta \cdot \cos\theta \cdot \text{tg}\,\theta} \Rightarrow R = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \therefore R = \frac{4}{5}$$

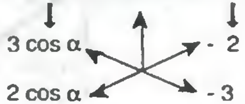
Rpta. B

Ejercicio 5: Siendo: $6\cos^2\alpha - 13\cos\alpha + 6 = 0$; ($\alpha \in Q_4$). Calcular el valor de: $E = \text{sen}\,\alpha \,.\, \text{tg}\,\alpha$

A) $\frac{6}{5}$ **B)** $-\frac{5}{6}$ **C)** $\frac{5}{6}$ **D)** $-\frac{3}{5}$ **E)** N.A.

Resolución:

De la expresión: $6\cos^2\alpha - 13\cos\alpha + 6 = 0$; Factorizamos por el método del Aspa



Donde: $(3 \cos \alpha - 2)(2 \cos \alpha - 3) = 0$; Ahora cada factor lo igualamos a cero:

I) $3 \cos \alpha - 2 = 0$

$$3 \cos \alpha = 2 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{3}$$

Como "α" ∈ Q_4, este valor para el cos α, si cumple ya que el coseno en el Q_4 es positivo.

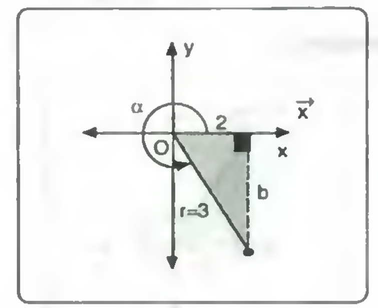
II) $2 \cos \alpha - 3 = 0$

$$2 \cos \alpha = 3 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{2}$$

Es absurdo; pues la descartamos ya que el valor de coseno tiene que ser menor que 1.

Luego, graficamos el valor de: $\cos \alpha = \frac{2}{3}$, en el cuarto cuadrante, veamos:

Sabemos que: $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ ← Abscisa (numerador), ← Ordenada (denominador)



Por el teorema de Pitágoras, calculamos "b"

$$b^2 + 2^2 = 3^2$$

$$b^2 + 4 = 9 \Rightarrow b^2 = 5 \Rightarrow \therefore\ b = \sqrt{5}$$

Luego: $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{Ordenada}}{\text{Radio Vector}} = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{Ordenada}}{\text{Abscisa}} = \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

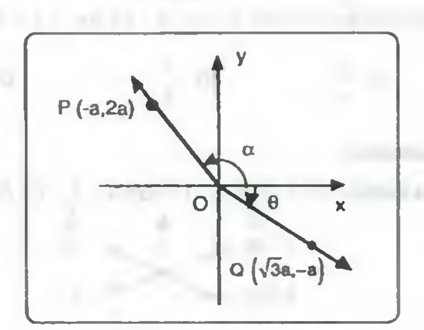
Reemplazamos los valores hallados en la expresión "E".

$$E = \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$E = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5 \cdot 5}}{6} = \frac{\sqrt{25}}{6} = \frac{5}{6} \Rightarrow \therefore\ E = \frac{5}{6}$$ **Rpta. C**

Ejercicio 6 : De la figura calcular:

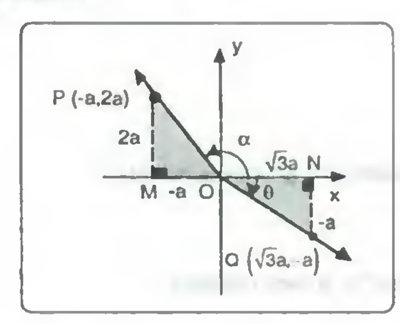
$$E = \frac{\operatorname{sen} \alpha - 3 \cos \alpha}{\operatorname{sen} \theta - \sqrt{3} \cos \theta}$$



A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ C) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) N.A.

Resolución:



- En el 2° cuadrante: calculamos OP por medio del teorema de Pitágoras:

$$OP^2 = PM^2 + MO^2$$

$$OP^2 = (2a)^2 + (-a)^2 = 4a^2 + a^2$$

$$OP^2 = 5a^2 \Rightarrow OP = \sqrt{5a^2}$$

$$OP = \sqrt{5}\,\sqrt{a^2} \Rightarrow \therefore\ OP = \sqrt{5}a$$

- En el $\triangle$ OMP: $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{\text{Ordenada}}{\text{Radio Vector}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}a} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos\alpha = \dfrac{\text{Abscisa}}{\text{Radio Vector}} = \dfrac{-a}{\sqrt{5}a} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

- En el 4° cuadrante calculamos $\overline{OQ}$ por medio del teorema de pitágoras

$$\overline{OQ}^2 = ON^2 + NQ^2$$

$$\overline{OQ}^2 = \left(\sqrt{3}\ a\right)^2 + (-a)^2 = 3\ a^2 + a^2 = 4\ a^2 \Rightarrow \overline{OQ} = \sqrt{4\ a^2}$$

$$\overline{OQ} = \sqrt{4}\ \sqrt{a^2} \Rightarrow \therefore\ \overline{OQ} = 2a$$

Luego: $\text{sen}\ \theta = \dfrac{\text{Ordenada}}{\text{Radio Vector}} = \dfrac{-a}{2a} = -\dfrac{1}{2}$; $\cos\theta = \dfrac{\text{Abscisa}}{\text{Radio Vector}} = \dfrac{\sqrt{3}a}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Reemplazamos los valores hallados en la expresión "E".

$$E = \frac{\text{sen}\ \alpha - 3\cos\alpha}{\text{sen}\ \theta - \sqrt{3}\cos\theta} = \frac{\dfrac{2}{\sqrt{5}} - 3\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)}{\left(-\dfrac{1}{2}\right) - \sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\dfrac{5}{\sqrt{5}}}{-\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}}$$

$$E = \frac{\dfrac{5}{\sqrt{5}}}{\dfrac{-4}{2}} = \frac{\dfrac{5}{\sqrt{5}}}{-2} = \frac{-5}{2\sqrt{5}} = \frac{-5\sqrt{5}}{2(5)} = -\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \therefore$$

Rpta. B

Ejercicio 7: Entre que valores debe estar "n" para que se cumpla que: $\cos x = \dfrac{2n-1}{3}$

A) $-1 \le n \le 1$ B) $-1 < n \le -2$ C) $-1 \le n \le 2$ D) $0 \le n \le 2$ E) N.A.

Resolución:

Sabemos que: "cos x" toma valores desde -1 hasta 1

Luego: $-1 \leq \cos x \leq 1$

$-1 \leq \dfrac{2n-1}{3} \leq 1$; multiplicamos " $\times 3$ " a cada miembro

$-3 \leq 2n - 1 \leq 3$; sumamos "1" a cada miembro

$-3 + 1 \leq 2n - 1 + 1 \leq 3 + 1$

$-2 \leq 2n \leq 4$; dividimos " : 2" a cada miembro

$\dfrac{-2}{2} \leq \dfrac{2n}{2} \leq \dfrac{4}{2}$ ➡ $\therefore$ $-1 \leq n \leq 2$ **Rpta. C**

Ejercicio (8) : Si "β" pertenece al Q_2 (segundo cuadrante), para que se pueda cumplir que: $\text{sen}\,\beta = \dfrac{2n+1}{3}$, los límites de "n" deben ser:

A) $-2 < n < 1$ **B)** $-\dfrac{1}{2} < n < 1$ **C)** $-\dfrac{1}{2} \leq n \leq 1$ **D)** $-1 < n < \dfrac{1}{2}$ **E)** N.A.

Resolución:

Sabemos que: "sen β" toma valores desde -1 hasta 1; pero como "β", está en el segundo cuadrante el "sen β" debe tomar valores desde 0 hasta 1, veamos:

$0 \leq \text{sen}\, b \leq 1$

$0 \leq \dfrac{2n+1}{3} \leq 1$; multiplicamos "x 3" cada miembro

$0 \leq 2n + 1 \leq 3$; restamos "1" a cada miembro

$0 - 1 \leq 2n + 1 - 1 \leq 3 - 1$

$-1 \leq 2n \leq 2$; dividimos " :2" a cada miembro

$-\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{2n}{2} \leq \dfrac{2}{2}$ ➡ $\therefore$ $-\dfrac{1}{2} \leq n \leq 1$ **Rpta. C**

Ejercicio 9 : Hallar el signo del producto:

I. sen 160° . cos 200° **II.** cos 260° . sec 300° **III.** tg 210° . cotg 310°

A) (+) (+) (+) **B)** (+) (+) (-) **C)** (-) (-) (+) **D)** (-) (-) (-) **E)** (-) (+) (-)

Resolución:

Sabemos que:

I) sen 160° ⇒ seno en el 2° cuadrante es (+)
$\in$ al Q_2

II) cos 200° ⇒ coseno en el 3° cuadrante es (-)
$\in$ al Q_3

I. sen 160° . cos 200° = (+) (-) = (-)

III) cos 260° ⇒ coseno en el 3° cuadrante es (-)
$\in$ al Q_3

IV) sec 300° ⇒ secante en el 4° cuadrante es (+)
$\in$ al Q_4

II. cos 260° . sec 300° = (-) (+) = (-)

V) tg 210° ⇒ tangente en el 3° cuadrante es (+)
$\in$ al Q_3

VI) cotg 310° ⇒ cotangente en el 4° cuadrante es (-)
$\in$ al Q_4

III. tg 210° . cotg 310° = (+) (-) = (-)

Luego, los signos de cada producto son:

Rpta. D

Ejercicio 10 : ¿Cuáles ángulos son coterminales?

I. $\frac{823\ \pi}{3}$ rad. **II.** $\frac{775\ \pi}{3}$ rad. **III.** $\frac{677\ \pi}{3}$ rad.

A) Ninguno **B)** Todos **C)** I y II **D)** II y III **E)** I y III

Resolución:

Dos ángulos serán coterminales cuando su diferencia sea de la forma: 2n π rad. siendo "n" un número entero.

De (I) y (II):

$$\frac{823\ \pi}{3}-\frac{775\ \pi}{3}=2n\ \pi$$

$$\frac{823\ \pi-775\ \pi}{3}=2n\ \pi\ \Rightarrow\ \frac{48\ \pi}{3}=2n$$

$$\frac{48}{6}=n\ \Rightarrow\ n=8$$

- Como "n" ha resultado ser un número entero, esto quiere decir que I y II; si son coterminales.

De (I) y (III):

$$\frac{823\ \pi}{3}-\frac{677\ \pi}{3}=2n\ \pi$$

$$\frac{823\ \pi-677\ \pi}{3}=2n\ \pi\ \Rightarrow\ \frac{146\ \pi}{3}=2n\ \pi$$

$$\frac{146}{6}=n\ \Rightarrow\ \therefore\ n=24,3$$

- Como "n" ha resultado no ser un número entero, esto quiere decir que I y III, no son coterminales.

De (II) y (III):

$$\frac{775\ \pi}{3}-\frac{677\ \pi}{3}=2n\ \pi$$

$$\frac{775\ \pi-677\ \pi}{3}=2n\ \pi\ \Rightarrow\ \frac{98\ \pi}{3}=2n\ \pi$$

$$\frac{98}{6}=n\ \Rightarrow\ \therefore\ n=16,3$$

- Como "n" ha resultado no ser un número entero, esto quiere decir que II y III no son coterminales.

$\therefore$ Son coterminales I y II **Rpta. C**

Ejercicio 11: ¿Cuáles son cuadrantales?

I. $\frac{636\ \pi}{8}$ II. $\frac{648\ \pi}{8}$ III. $\frac{1\ 827\ \pi}{6}$

A) Todos **B)** Ninguno **C)** I y II **D)** I y III **E)** II y III

Resolución:

Para que dichos ángulos sean cuadrantales deben tomar la siguiente forma: $\frac{n\ \pi}{2}$ siendo "n" un número entero.

I. $\frac{n\ \pi}{2}=\frac{636\ \pi}{8}\ \Rightarrow\ n=\frac{636}{4}\ \Rightarrow\ n=159$

- Como "n", ha resultado ser un número entero, quiere decir que: $\frac{636\ \pi}{8}$ **si es cuadrantal.**

II. $\frac{n\ \pi}{2}=\frac{648\ \pi}{8}\ \Rightarrow\ n=\frac{648}{4}\ \Rightarrow\ n=162$

- Como "n" ha resultado ser un número entero, quiere decir que: $\frac{648\ \pi}{8}$ **si es cuadrantal.**

III. $\frac{n\ \pi}{2}=\frac{1\ 827\ \pi}{6}\ \Rightarrow\ n=\frac{1\ 827}{3}$

$n = 609$

$\therefore$ Todos son cuadrantes **Rpta. A**

Ejercicio 12 : ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas? Coloca una **V** dentro del paréntesis? ¿Cuáles son falsas? coloca una **F** dentro del paréntesis?

A) En el Q_3 la tangente es negativa y la cosecante positiva ( )
B) En el Q_2 y Q_3 el coseno y la secante, son negativos ( )
C) En el Q_4 el seno es negativo y cotangente positivo ( )
D) En el Q_2 la cotangente y la secante son negativos ( )

Resolución:

A) En el Q_3 la tangente es negativa y la cosecante positiva (F)
Lo verdadero es que en el Q_3 la "tg" es positiva y la cosecante negativa.

B) En el Q_2 y Q_3 el coseno y la secante, son negativos (V)

C) En el Q_4 el seno es negativo y cotangente positivo (F)
Lo verdadero es que en el Q_4 el seno es negativo y cotangente negativo.

D) En el Q_2 la cotangente y la secante son negativos (V)

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO DE CUALQUIER MAGNITUD

NIVEL I

Ejercicio 1 : Si el punto P (-1; 2); pertenece al lado final del ángulo en posición normal "θ". ($\theta \in Q_2$) Hallar: $E = \sqrt{5}\sec\theta - \text{tg}\,\theta$

A) 1 B) 6 C) -7 D) -2 E) -3

Ejercicio 2 : Si el punto Q $\left(-\sqrt{3};-1\right)$ pertenece al lado final del ángulo en posición normal "α" . ($\alpha \in Q_3$). Hallar: sec α . cosec α

A) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{3}$

D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Ejercicio 3 : Si: sen θ = 1/3; $\theta \in Q_2$ Calcular: "cotg θ . sec θ"

A) $-2\sqrt{2}$ B) -3 C) 3 D) $2\sqrt{2}$ E) 1/3

Ejercicio 4 : Siendo: tg β = -0,75; $\beta \in Q_2$; Calcular: K = cosec β + cotg β

A) 1 B) -1 C) -3 D) -1/3 E) 1/3

Ejercicio 5 : Siendo P (-3; 1) un punto del lado final del ángulo "θ" en posición normal. Hallar el valor de:

$$E = \text{cotg}\,\theta + \text{cosec}^2\,\theta - 3\,\text{tg}\,\theta$$

A) 9 B) 8 C) 10 D) 12 E) 11

Ejercicio 6 : Los cuadrantes en que el cos θ y tg θ; tienen el mismo signo son:

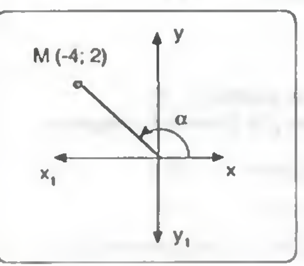
A) I y II B) I y III C) II y III
D) III y IV E) I y IV

Ejercicio 7 : Si: $\alpha \in Q_2$; $\theta \in Q_3$ señala el signo de:

$$R = \frac{\text{sen } \alpha \cdot \text{tg } \theta}{\cos \alpha \quad \sec \theta} - \frac{\cos \theta}{\text{sen } \alpha}$$

A) (+) B) (-) C) (+) ó (-)
D) (+) y (-) E) no se precisa

Ejercicio : Del gráfico, Hallar: "$\sec^2 \alpha$ + $\text{ctg } \alpha$"



A) 3/4

B) 1/2

C) -3/4

D) -4/3

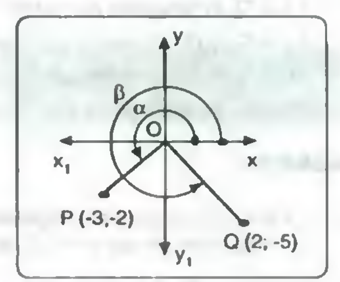
E) N.A.

Ejercicio : Si se tiene: cosec α = 2,6; (α ∈ Q_2). Determinar el valor de: R = sec α . cosec α

A) 1 B) -1 C) $\frac{60}{169}$ D) $-\frac{169}{60}$ E) 2

Ejercicio : Del gráfico; Hallar:

$$\sqrt{29}\ \cos \beta - \sqrt{13}\ \cos \alpha$$



A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

E) 8

Clave de Respuestas

1. E	2. D	3. C	4. E	5. B
6. A	7. A	8. C	9. D	10. C

NIVEL II

Ejercicio : Si el punto P (-5, 2) es un punto que pertenece al lado final del ángulo en posición normal "α". Calcular:

$$E = \sqrt{29}\ \cos \alpha + \text{tg } \alpha$$

A) $\frac{27}{5}$ B) $-\frac{27}{5}$ C) $\frac{5}{27}$ D) $\frac{-23}{5}$ E) $\frac{21}{5}$

Ejercicio : Si el punto P (5; -3) es un punto que pertenece al lado final del ángulo "θ" en posición normal. Calcular:

$$S = \sqrt{\text{sen } \theta \cdot \cos \theta \cdot \text{tg } \theta}$$

A) $\frac{3}{\sqrt{34}}$ B) $\frac{\sqrt{34}}{3}$ C) $\frac{5}{\sqrt{34}}$

D) $\frac{-3}{\sqrt{34}}$ E) N.A.

Ejercicio : Si tg α = $\frac{-3}{2}$; y cumpliéndose que: α ∈ Q_2. Hallar el valor de:

$$R = (\text{sen } \alpha + \cos \alpha)^2$$

A) 13 B) 1/13 C) 2/13 D) 5/13 E) N.A.

Ejercicio : Si: sen α = $\frac{-15}{17}$; siendo "α" del Q_4; Hallar:

$$T = \frac{\text{tg } \alpha - \cos \alpha}{\sec \alpha - \text{cotg } \alpha}$$

A) $\frac{-8}{17}$ B) $\frac{8}{17}$ C) $\frac{-17}{15}$ D) $\frac{-5}{7}$ E) $\frac{-15}{17}$

Ejercicio : Si: θ ∈ Q_2 y α ∈ Q_4; tal que:
Cos θ = $-\frac{3}{5}$ y Tg α = $-\frac{4}{3}$. Hallar el valor de:

$$K = \text{sen } \theta \cdot \cos \alpha + \cos \theta \cdot \text{sen } \alpha$$

A) $\frac{1}{25}$ B) $\frac{24}{25}$ C) $\frac{2}{25}$ D) $\frac{4}{25}$ E) N.A.

Ejercicio 6: Sabiendo que:

$\text{sen}\,\alpha = -0,8;\ \alpha \in Q_3$; Evaluar:

$$K = 32\,\text{cotg}\,\alpha + 50\cos\alpha$$

A) -16 B) -10 C) -6 D) -8 E) N.A.

Ejercicio 7: Si: $\dfrac{1}{\sqrt{1-\sqrt{5-13\cos\beta}}} = 1$

Hallar: $M = \sec\beta - \text{tg}\,\beta;\ \beta \in \text{IV Q}$

A) 1/5 B) 5 C) -1/5 D) -5 E) 1

Ejercicio 8: En la figura mostrada; Hallar el valor de: $R = \left(\sqrt{m^2+1}\right)\cos\theta - \left(\dfrac{\sqrt{m^2+1}}{m}\right)\text{sen}\,\theta$

A) -2

B) -1

C) 0

D) 1

E) 2

Ejercicio 9: Siendo:

$$4\,\text{sen}^2\alpha - 13\,\text{sen}\,\alpha + 3 = 0;\ (\alpha \in Q_2).$$

Calcular el valor de: $M = \dfrac{1}{15}\,\text{cotg}\,\alpha \cdot \cos\alpha$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

Ejercicio 10: De la figura, Calcular el valor de: "$\text{sen}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta$"

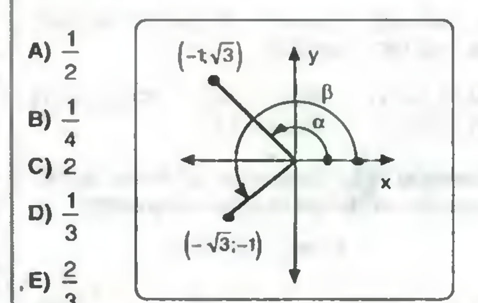
A) $\frac{1}{2}$

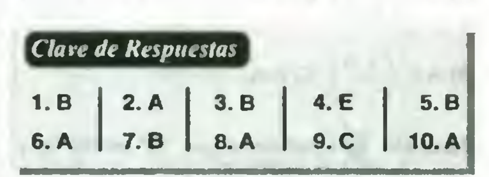
B) $\frac{1}{4}$

C) 2

D) $\frac{1}{3}$

E) $\frac{2}{3}$





Clave de Respuestas

1. B	2. A	3. B	4. E	5. B
6. A	7. B	8. A	9. C	10. A

NIVEL III

Ejercicio 1: Dado: $\text{tg}\,\phi < 0$ y $\sqrt{\text{sen}\,\phi} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Calcular: $E = \text{cosec}\,\phi - \sqrt{3}\,\text{cotg}\,\phi$

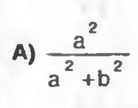
A) -1 B) 5 C) 1 D) 2 E) 3

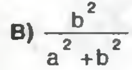
Ejercicio 2: Dado la expresión: $5^{\text{tg}\,\theta+1} = 125$;

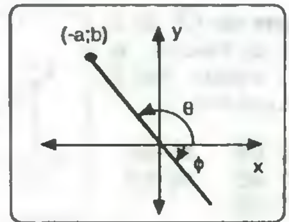
con: $\pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$. Calcular: $E = \sec\theta - \text{cosec}\,\theta$

A) $\frac{-3\sqrt{5}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C) $-\sqrt{5}$ D) $\frac{-\sqrt{5}}{2}$ E) $\frac{-\sqrt{5}}{5}$

Ejercicio 3: De la figura mostrada; Hallar: $\text{sen}\,\theta \cdot \text{sen}\,\phi$.

A)  $\dfrac{a^2}{a^2+b^2}$

B)  $\dfrac{b^2}{a^2+b^2}$



C) $\frac{-b^2}{a^2+b^2}$ D) $\frac{b^2}{a^2-b^2}$ E) N.A.

Ejercicio : Dado la expresión:

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sec^{12}\alpha}} = (\sec\alpha)^{-\cos\alpha}$$

Si: $\alpha \in Q_2$. Calcular: $R = tg\,\alpha + \sec\alpha$

A) -1 B) -2 C) -3 D) -1/2 E) 2

Ejercicio : Hallar el signo de cada producto:

I. sen 190° . cos 290° II. tg 160° . sec 200°
III. cos 120° . sec 200°

A) (-) (+) (+) B) (-) (-) (+) C) (+) (+) (+)
D) (-) (+) (-) E) (-) (-) (-)

Ejercicio : Determinar los límites de "K" para que se cumpla la siguiente igualdad.

$$4\,\text{sen}\,\alpha + 5 = 2K$$

A) $K \in \left[\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right]$ B) $K \in \left\langle\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right\rangle$ C) $K \in \left[\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right\rangle$

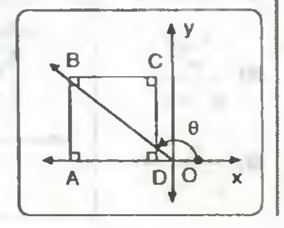
D) $K \in \left\langle\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right]$ E) N.A.

Ejercicio : Sabiendo que: "α" es del Q_2 y que: $4\cos\alpha + 3 = 5K$. ¿Cuáles son los límites de "K"?

A) $K \in \left\langle-\frac{1}{5};\frac{7}{5}\right]$ B) $K \in \left[-\frac{1}{5};\frac{7}{5}\right]$

C) $K \in \left[-\frac{1}{5};\frac{7}{5}\right\rangle$ D) $K \in \left\langle-\frac{1}{5};\frac{7}{5}\right\rangle$ E) N.A.

Ejercicio : Si: C (-2; 3). Calcular: "tg θ"; siendo: ABCD un cuadrado.



A) -1/5 B) -2/5
C) -5/2 D) -5/3
E) -3/5

Ejercicio : ¿Cuáles son ángulos coterminales?

I. $\frac{65\pi}{4}$rad. II. $\frac{25\pi}{4}$rad. III. $\frac{105\pi}{4}$rad.

A) I y II B) I y III C) II y III
D) todos E) Ninguno

Ejercicio : ¿Cuáles de los ángulos son cuadrantales?

I. $\frac{47\pi}{8}$ rad. II. $\frac{133\pi}{8}$ rad. III. $\frac{153\pi}{8}$ rad.

A) I y II B) I y III C) II y III
D) todos E) ninguno

Ejercicio : ¿Cuál es incorrecto?

A) $372° \in Q_1$ B) $9\pi/7$ rad $\in Q_3$ C) $-250° \in Q_2$
D) $-666° \in Q_1$ E) $17\pi/10$ rad. $\in Q_3$

Ejercicio : ¿Cuáles de los ángulos son cuadrantales?

I. $\frac{38\pi}{4}$ rad. II. 1 360° III. $\frac{42\pi}{4}$ rad.

A) Ninguno B) todos C) I y III
D) II y III E) I y II

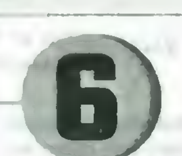
Ejercicio : ¿Cuáles de los ángulos son coterminales?

I. $\frac{80\pi}{7}$ rad II. $\frac{45\pi}{7}$ rad III. $\frac{59\pi}{7}$ rad

A) todos B) II y III C) Ninguno
D) I y III E) I y II

Clave de Respuestas

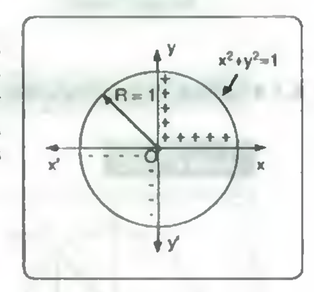
1. B	2. D	3. B	4. B	5. D
6. A	7. B	8. E	9. D	10. D
11. E	12. C	13. B		



Capítulo 6: Estudio de las Funciones Trigonométricas en la Circunferencia Trigonométrica

6.1 ESTUDIO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

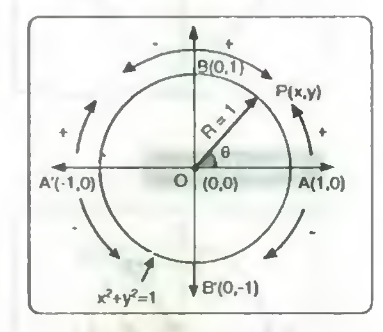
6.1.1 CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA: Es una circunferencia inscrita en un sistema de coordenadas rectangulares cuyo centro coincide con el origen de dicho sistema, esta circunferencia tiene como característica fundamental, el valor del radio que es la **UNIDAD** (R = 1). Esta circunferencia trigonométrica sirve para representar a las Líneas trigonométricas.



Nota: La ecuación "$x^2 + y^2$ = 1" es la ecuación Canónica de la circunferencia de R = 1 y centro O (0,0)

6.1.2 ELEMENTOS DE LA CIRCUNFERENCIA: Se tiene los siguientes elementos:

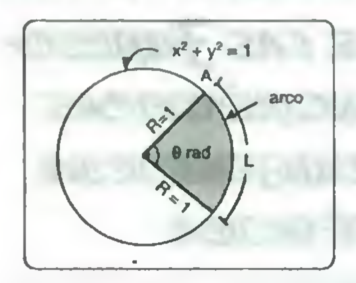
- **i)** O (o,o) : Origen de la circunferencia.
- **ii)** A (1,0) : Origen de Arcos, a partir del cual se miden los ángulos trigonométricos es decir ángulos positivos, negativos y de cualquier magnitud.
- **iii)** B (0,1) : Origen de complementos
- **iv)** A' (-1,0) : Origen de suplementos
- **v)** B' (0,-1) : Sin denominación especifica
  - P(x,y) : Punto "P" de coordenadas (x,y)



6.1.3 PROPIEDADES CONVENCIONALES

- **a)** Radio de la circunferencia igual a la UNIDAD
- **b)** Cuatro cuadrantes numerados, cada uno de los cuales mide 90°, 100 g ó π/2 rad.
- **c)** Se adoptan los signos de los ejes coordenadas o sea los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ son positivos y $\overline{OA'}$ y $\overline{OB'}$ son negativos.

Caracteristicas de la Circunferencia Trigonométrica:



Por fórmula: $\theta = \frac{L}{R}$; $R = 1$

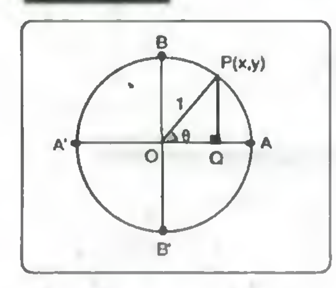
$\theta = \frac{L}{1} \Rightarrow \therefore \theta = L$ (Sólo se cumple numéricamente)

"Es decir que el número de radianes del ángulo central es igual a la longitud de arco pero sólo como arco numérico".

tg 45°	=	$\text{tg}\ \frac{\pi}{4}$ rad.	=	$\text{tg}\ \frac{\pi}{4}$	=	tg 0,785 4 = 1
Ángulo en grados Sexagesimales		*Ángulo en Radianes*		*Arco Numérico*		*Número Real (R)*

6.1.4 Líneas Trigonométricas

- Línea Seno



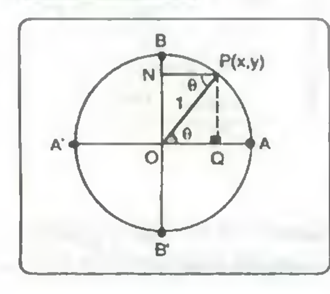
Representación:

Se representa por la perpendicular trazada desde el extremo del arco, hacia el diámetro horizontal:

- En el ⊿OQP: $\text{sen}\ \theta = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = \frac{y}{1} \Rightarrow \therefore \text{sen}\ \theta = y$

De la figura: $\text{sen}\ \widehat{AP} = \text{sen}\ \theta = \overline{PQ} = y$

- Línea Coseno



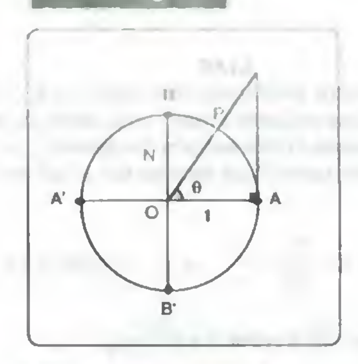
Representación:

Se representa por la perpendicular trazada desde el extremo del arco, hacia el diámetro vertical:

- En el ⊿PNO: $\cos\theta = \frac{\overline{NP}}{\overline{OP}} = \frac{x}{1} \Rightarrow \therefore \cos\theta = x$

De la figura: $\cos\widehat{AP} = \cos\theta = \overline{NP} = x$

- Línea Tangente



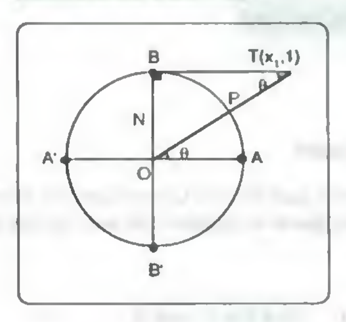
Representación:

Es una parte de la tangente geométrica trazada por el origen de arcos (A(1,0)), se empieza a medir de este origen y termina en la intersección de la tangente geométrica con el radio prolongado que pasa por el extremo del arco.

- En el ⊿ TAO: $\text{tg } \theta = \dfrac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \dfrac{y_1}{1} \Rightarrow \therefore \text{ tg } \theta = y_1$

De la figura: $\text{tg } \overset{\frown}{AP} = \text{tg } \theta = \overline{AT} = y_1$

- Línea Cotangente



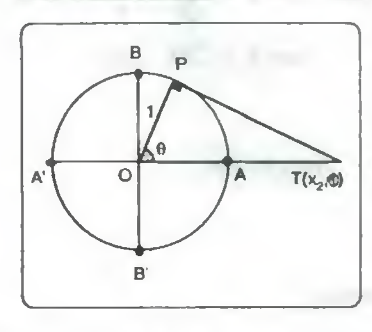
Representación:

Es una parte de la tangente que pasa por el origen de complementos B(0,1), se empieza a medir a partir de ese origen y termina en la intersección de la tangente mencionado con radio prolongado que pasa por el extremo del arco.

- En el ⊿TBO: $\text{cotg } \theta = \dfrac{\overline{BT}}{\overline{BO}} = \dfrac{x_1}{1} \Rightarrow \therefore \text{ cotg } \theta = x_1$

De la figura: $\text{cotg } \overset{\frown}{AP} = \text{cotg } \theta = \overline{BT} = x_1$

- Línea Secante



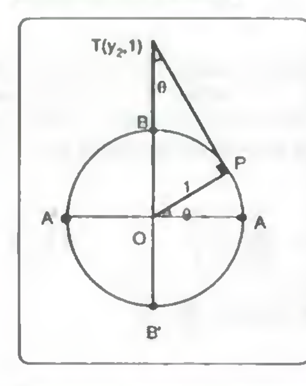
Representación:

Es una parte del diámetro prolongado que pasa por el origen del arco, se empieza a medir del centro de la circunferencia y termina en la intersección del diámetro prolongado con la tangente geométrica trazada por el extremo del arco.

- En el △OPT: $\sec \theta = \dfrac{\overline{OT}}{\overline{OP}} = \dfrac{x_2}{1} \Rightarrow \therefore \sec \theta = x_2$

De la figura: $\sec \overset{\frown}{AP} = \sec \theta = \overline{OT} = x_2$

- Línea Cosecante



Representación:

Es una parte del diámetro prolongado que pasa por el origen de complementos, se empieza a medir en el centro de la circunferencia y termina en la intersección del diámetro prolongado con la tangente geométrica trazada por el extremo del arco.

- En el $\triangle$OPT: $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{\overline{OT}}{\overline{OP}} = \dfrac{y_2}{1} \Rightarrow \therefore \operatorname{cosec}\theta = y_2$

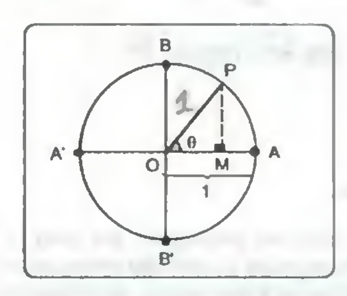
De la figura: $\operatorname{cosec}\overset{\frown}{AP} = \operatorname{cosec}\theta = \overline{OT} = y_2$

Otras Líneas Auxiliares en la Circunferencia Trigonométrica

- Línea Seno Verso o Verso (Vers)

Es lo que le falta al coseno de un arco para valer la unidad.

Es verso se empieza a medir a partir del origen de versos que viene a ser el origen de arcos (A(1,0)), y termina en el pie de la perpendicular trazada desde el extremo del arco al diámetro, horizontal. El verso es siempre positivo.



Por definición: $\text{Vers}\,\theta = 1 - \cos\theta$ ...(I)

De la figura: $\text{Vers}\,\theta = MA$

- En el $\triangle$ OMP: $\cos\theta = \dfrac{\overline{OM}}{\overline{OP}} = \dfrac{\overline{OM}}{1}$

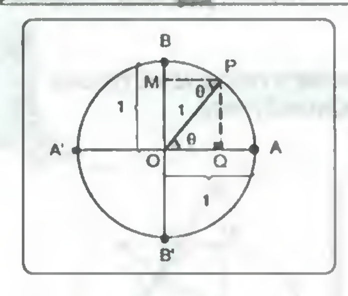
$\cos\theta = \overline{OM}$ ...(II)

Reemplazamos (II) en (I): $\text{Vers}\,\theta = 1 - \overline{OM} \Rightarrow \therefore \text{Vers}\,\theta = \overline{MA}$

- Línea Coseno Verso o Coverso (COV.):

Es lo que le falta al seno de un arco para valer la unidad.

El coverso se empieza a medir en el origen de conversos que viene a ser el origen de complemento (B(0,1)); y termina en el pie de la perpendicular trazada desde el extremo de arco al diámetro vertical de la circunferencia trigonométrica. El coverso es siempre positivo.



Por definición: $\text{cov}\,\theta = 1 - \text{sen}\,\theta$ ...(I)

De la figura: $\text{cov}\,\theta = \overline{BM}$

- En el ◸OMP: $\text{sen}\,\theta = \dfrac{\overline{MO}}{\overline{OP}} = \dfrac{\overline{MO}}{1}$

$\text{sen}\,\theta = \overline{MO}$ ...(II)

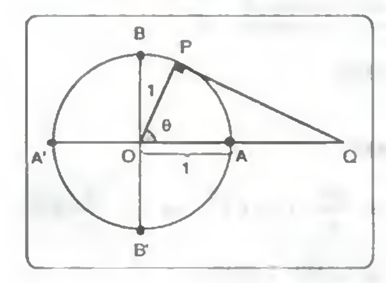
Reemplazamos (II) en (I): $\text{cov}\,\theta = 1 - \overline{MO}$ ➡ ∴ $\text{cov}\,\theta = \overline{BM}$

- Línea Ex-Secante o External (Ex-Sec):

Es el exceso de la secante respecto a la unidad.

La exsecante se mide a partir del origen de exsecantes que viene a ser el origen de arcos y termina en el punto donde termina la secante de ese arco.

Si la secante se mide hacia la derecha del origen de exsecantes es positiva y en caso contrario es negativa.



Por definición: $\text{ex-sec}\,\theta = \sec\theta - 1$ ...(I)

De la figura: $\text{ex-sec}\,\theta = \overline{AQ}$

- En el △OPQ: $\sec\theta = \dfrac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \dfrac{\overline{OQ}}{1}$

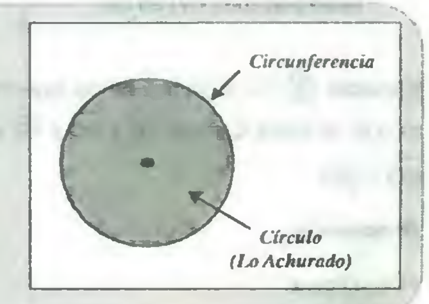
$\sec\theta = \overline{OQ}$ ...(II)

Reemplazamos (II) en (I): $\text{ex-sec}\,\theta = \overline{OQ} - 1$ ➡ ∴ $\text{ex-sec}\,\theta = \overline{AQ}$

Nota: Para la resolución de los problemas del presente capítulo hay que tener presente los siguientes conceptos:

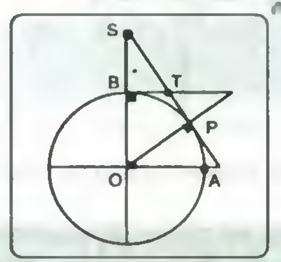
Circunferencia : Línea curva cerrada cuyos puntos están todos a igual distancia de un punto interior llamado centro.

Círculo: Superficie comprendida dentro de la circunferencia.

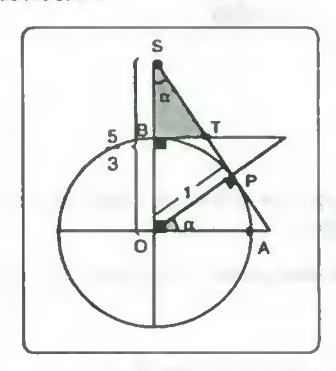


EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

Ejercicio 1: En la circunferencia trigonométrica: $\overline{OS} = 5/3$; Hallar: $\overline{BT}$.



Resolución:



- Sea el $\angle POA = \alpha$ Entonces: $\angle OST = \alpha$

*) En el ◺ SBT: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\overline{BT}}{\overline{SB}} \Rightarrow \overline{SB}\cdot\operatorname{tg}\alpha = \overline{BT}$ ...(I)

**) De la figura:

$$\overline{SB} + \overline{BO} = \overline{SO} \Rightarrow \overline{SB} + 1 = \frac{5}{3} \Rightarrow \overline{SB} = \frac{2}{3} \quad ...(II)$$

- Reemplazando (II) en (I): $\dfrac{2}{3}\cdot\operatorname{tg}\alpha = \overline{BT}$ ... (III)

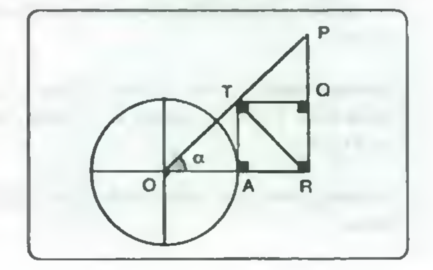
***) En el ◺ OPS: Aplicamos el Teorema de Pitágoras:

$$\overline{OS}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PS}^2 \Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^2 = 1^2 + \overline{PS}^2 \Rightarrow \frac{25}{9} - 1 = \overline{PS}^2 \Rightarrow \therefore \frac{4}{3} = \overline{PS}$$

Además: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\overline{OP}}{\overline{PS}} = \dfrac{1}{4/3} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{4}$ ... (IV)

Reemplazando (IV) en (III): $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4} = \overline{BT}$ ➡ $\therefore \overline{BT} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$ **Rpta.**

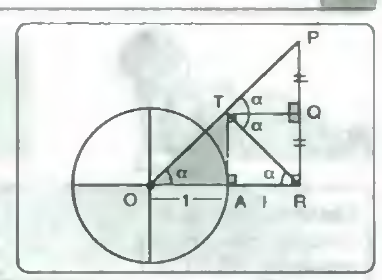
Ejercicio 2: En la circunferencia trigonométrica de la figura. Calcular: $\overline{AT} \times \overline{PQ} \times \overline{AR}$. (Si: $\overline{PQ} = \overline{QR}$)



Resolución:

- De la figura:

$\angle TOA = \angle PTQ = \alpha$; por ser $\angle$s correspondientes.



- Por propiedad: (En el Δ RTP)

  $\angle RTQ = \angle PTQ = \alpha$; por ser un Δ Isósceles.

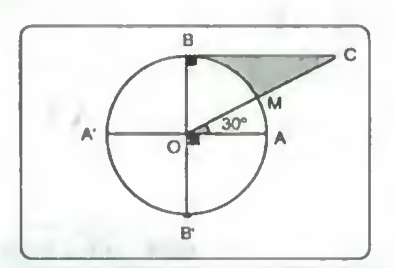
*) En el ◺ OAT: $\text{tg }\alpha = \dfrac{\overline{TA}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{TA}}{1} \Rightarrow \therefore\ \overline{TA} = \text{tg }\alpha$

- De acuerdo a la figura: $\overline{TA} = \overline{QR} = \overline{PQ} = \text{Tg }\alpha \Rightarrow \overline{PQ} = \text{tg }\alpha$

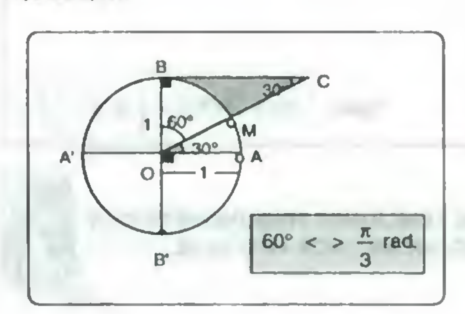
*) En el ◺ RAT : $\text{cotg }\alpha = \dfrac{\overline{AR}}{\overline{TA}} = \dfrac{\overline{AR}}{\text{tg }\alpha} \Rightarrow \text{Cotg }\alpha \cdot \text{tg }\alpha = \overline{AR} \Rightarrow \therefore\ 1 = \overline{AR}$

Luego: $\overline{AT} \times \overline{PQ} \times \overline{AR} = \text{tg }\alpha\ .\ \text{tg }\alpha\ .\ 1 = \text{tg}^2\ \alpha$ **Rpta.**

Ejercicio 3: Hallar el área de la región sombreada:



Resolución:



- Sabemos que: $\overline{OB} = \overline{OA} = 1$

*) En el ◺ OBC : $\underbrace{\text{cotg } 30°} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{OB}} = \dfrac{\overline{BC}}{1}$

$\therefore\ \sqrt{3} = \overline{BC}$

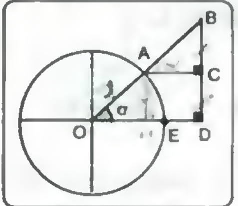
Luego: $\left(\begin{matrix}\text{área de la región}\\ \text{sombreada}\end{matrix}\right)$ = área ◺OBC - área ◸ BOM

$$= \frac{\overline{BC}\cdot\overline{OB}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\overline{OB}^2\cdot\angle BOM \Rightarrow \frac{\sqrt{3}\cdot 1}{2} - \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{3}$$

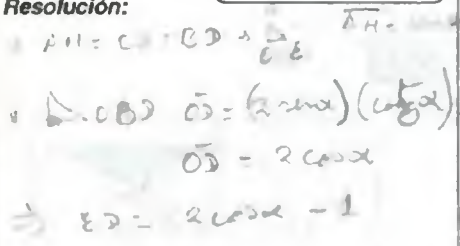
$$\therefore\ \left(\begin{matrix}\text{área de la región}\\ \text{sombreada}\end{matrix}\right) = \left(\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}\right)u^2$$ **Rpta.**

TALLER DE EJERCICIOS Nº 12

Ejercicio 1 : En la circunferencia trigonométrica: $\overline{BC} = \overline{CD}$; Hallar: $\overline{ED}$.



Resolución:

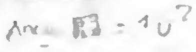


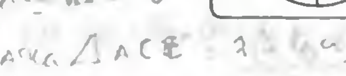
Rpta. $\overline{ED} = 2\cos\alpha - 1$

Ejercicio 2 : Hallar el área de la región sombreada.

C
B
D
A
α
O
E

Resolución:

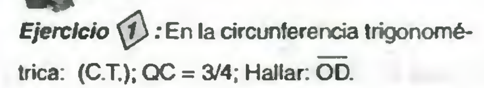




$= \frac{1}{2}(2\,tg\,\alpha - 1)\ u^2$

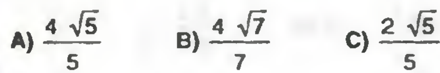
Rpta. Area $\triangle BDC = \left(tg\ \alpha - \frac{1}{2}\right) u^2$

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA TIPO I.B.M.



Ejercicio 1 **:** En la circunferencia trigonométrica: (C.T.); QC = 3/4; Hallar: $\overline{OD}$.

B
C
1
θ
A'
O
Q
A
D
B'

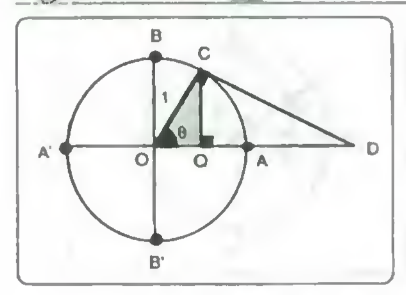


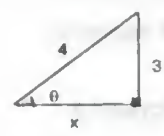
A) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ **B)** $\frac{4\sqrt{7}}{7}$ **C)** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

D) 3 **E)** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

Resolución:

En el $\triangle OQC$: $\text{sen}\ \theta = \frac{QC}{OC} = \frac{3/4}{1} = \frac{3}{4} \Rightarrow \therefore\ \text{sen}\ \theta = \frac{3}{4}$ (Este valor lo llevamos a un ◺ veamos.)





$$\text{sen } \theta = \frac{3}{4} \begin{matrix} \leftarrow \textit{Cateto Opuesto} \\ \leftarrow \textit{Hipotenusa} \end{matrix}$$

Por el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + 3^2 = 4^2 \Rightarrow x^2 + 9 = 16$$

$$x^2 = 7 \Rightarrow \therefore x = \sqrt{7}$$

Luego: $\sec\theta = \frac{4}{x} = \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$

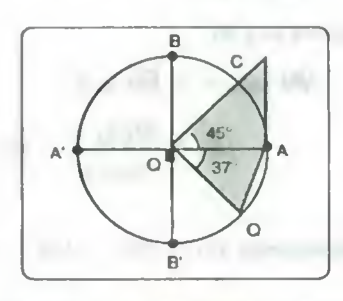
$\therefore \sec\theta = \frac{4\sqrt{7}}{7}$ ...(I)

- En el ⊿ OCD: $\sec\theta = \frac{OD}{OC} = \frac{OD}{1}$

$\therefore \sec\theta = \overline{OD}$ ...(II)

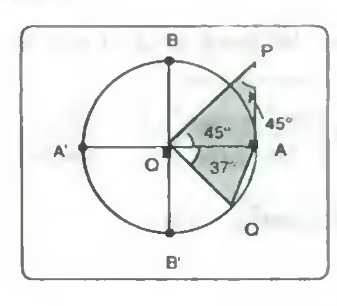
Igualando las expresiones (I) y (II); obtenemos que: $\frac{4\sqrt{7}}{7} = \overline{OD} \Rightarrow \therefore \overline{OD} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$ **Rpta. B**

Ejercicio 2: Hallar el área sombreada en el círculo trigonométrico mostrado:



A) 0,4 **B)** 0,5 **C)** 0,6
D) 0,.7 **E)** 0,8

Resolución:



- Por definición de circunferencia trigonométrica:

$$OA = 1 \quad y \quad OQ = 1$$

Como el ⊿ OAP es isósceles: $OA = AP = 1$

Luego: I) Area ⊿ OAP $= \frac{OA \times AP}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$

II) Area Δ QOA $= \left(\frac{OQ \times OA}{2}\right) \text{sen } 37° \Rightarrow$ Area ⊿ QOA $= \frac{1 \times 1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$

Ahora, calculamos el área sombreada:

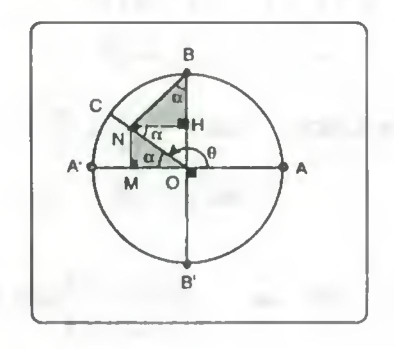
Area sombreada = Area ⊿ OAP + Area Δ QOA $= \frac{1}{2} + \frac{3}{10}$

$\therefore$ Area sombreada $= 0,5 + 0,3 = 0,8\ u^2$ **Rpta. E**

Ejercicio 3 : En la circunferencia trigonométrica. Hallar: MN.

A) sen θ **B)** 2 sen θ **C)** sen² θ
D) 1 + sen θ **E)** 1 - sen θ

Resolución:



• Sabemos que: $\overline{OB} = 1$

*) En el ◺ NMO: $\cot g\ \alpha = \dfrac{\overline{MO}}{\overline{MN}} = \dfrac{\overline{NH}}{\overline{MN}}$

$$\therefore\ \overline{MN}\cdot\cot g\ \alpha = \overline{NH} \quad ...(I)$$

**) En el ◺ NHB: $tg\ \alpha = \dfrac{\overline{NH}}{\overline{BH}}$

$$\therefore\ \overline{BH}\cdot tg\ \alpha = \overline{NH} \quad ...(II)$$

Igualamos (I) y (II):

$$\overline{MN}\cdot\cot g\ \alpha = \overline{BH}\cdot tg\ \alpha$$

$$\overline{MN} = \frac{\overline{BH}\cdot tg\ \alpha}{\cot g\ \alpha} \quad ...(III)$$

• De la figura:

$$\overline{BH} = \overline{BO} - \overline{OH} \Rightarrow BH = 1 - \overline{MN} \quad ...(IV)$$

Reemplazamos (IV) en (III): $\overline{MN} = \dfrac{(1-\overline{MN})\ tg\ \alpha}{\cot g\ \alpha} \Rightarrow \overline{MN}\ (\cot g\ \alpha + tg\ \alpha) = tg\ \alpha$

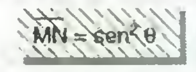
$$\overline{MN}\left(\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\ \alpha}+\frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha}\right) = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \overline{MN}\left(\frac{\cos^2\alpha+\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}\ \alpha\cdot\cos\alpha}\right) = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha}$$

$$\overline{MN}\left(\frac{1}{\text{sen}\ \alpha}\right) = \text{sen}\ \alpha \Rightarrow \overline{MN} = \text{sen}^2\alpha \quad ...(V)$$

• De la figura: $\theta+\alpha = 180 \Rightarrow \alpha = (180°-\theta)$

En esta última expresión tomamos la función "Sen" a ambos miembros:

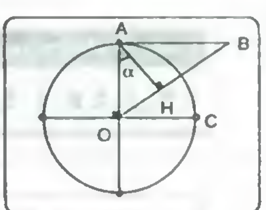
$$\text{sen}\ \alpha = \text{sen}\ (180° - \theta) \Rightarrow \therefore\ \text{sen}\ \alpha = \text{sen}\ \theta \quad ...\ (VI)$$

Reemplazamos (VI) en (V); obteniendo: 
$\overline{MN} = \text{sen}^2\theta$ **Rpta. C**

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

NIVEL I

Ejercicio 1: En la circunferencia trigonométrica. Hallar: BH.



A) sen α . cotg α

B) cos α . tg α

C) cos α . cotg α

D) sen α . tg α

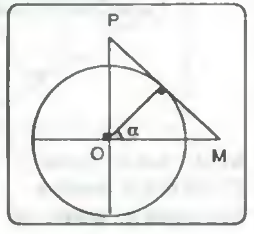
E) sec α . cosec α

Ejercicio 2: Indicar verdadero ó falso en la C.T.

I) $\overline{MN} = \text{tg}\,\alpha$

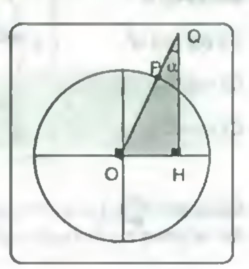
II) $\overline{OM} = \sec\alpha$

III) $\overline{OP} = \text{cosec}\,\alpha$



A) VVF **B)** VVV
C) FFF **D)** VFV
E) FFV

Ejercicio 3: En el círculo trigonométrico. Hallar el área de la región sombreada. (OP = PQ)



A) sen α . cos α

B) 2 sen α . cos α

C) 4 sen α . cos α

D) tg α . sen α

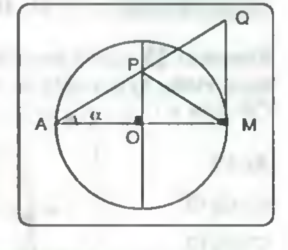
E) cotg α . cos α

Ejercicio 4: Indicar verdadero o falso en la C.T.

I) $\overline{PQ} = \sec\alpha$

II) $\overline{PO} = \text{tg}\,\alpha$

III) $\overline{MQ} = 2\,\text{tg}\,\alpha$



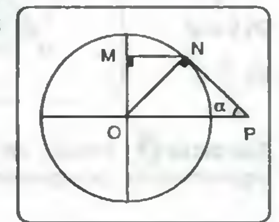
A) VVF **B)** VVV
C) FFF **D)** FVV
E) VFV

Clave de Respuestas

1. C	2. B	3. B	4. B

NIVEL II

Ejercicio 1: En la circunferencia trigonométrica. Hallar: HP.



A) cosec α . cotg α

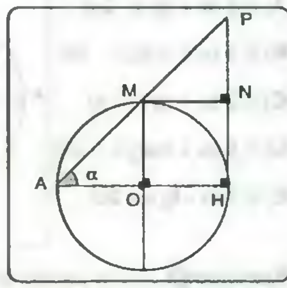
B) cos α . tg α

C) sen α . cotg α

D) cos α . cotg α

E) sec α . tg α

Ejercicio 2: En la circunferencia trigonométrica. Hallar: PN



A) cotg α - 1

B) tg α

C) cotg α + 1

D) tg α + 1

E) 1 - tg α

Ejercicio 3: En el círculo trigonométrico. Hallar el área de la región sombreada.

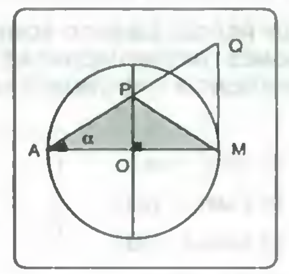
A) $(\sec \alpha)\ u^2$

B) $(\text{tg}\ \alpha)\ u^2$

C) $(\text{tg}^2\ \alpha)\ u^2$

D) $(\text{cosec}^2\ \alpha)\ u^2$

E) $(\text{sen}^2\ \alpha)\ u^2$



Ejercicio 4: En el círculo trigonométrico. Hallar el área de la región sombreada.

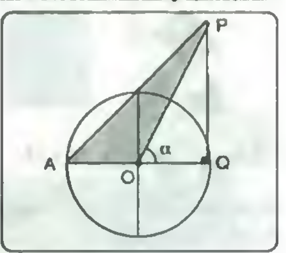
A) $(\text{tg}\ \alpha)\ u^2$

B) $(\text{cotg}\ \alpha)\ u^2$

C) $(1/2\ \text{tg}\ \alpha)\ u^2$

D) $(\text{cosec}\ \alpha)\ u^2$

E) $(1/2\ \sec \alpha)\ u^2$



Clave de Respuestas

1. D	2. B	3. B	4. C

NIVEL III

Ejercicio 1 : En la circunferencia trigonométrica, Halle: $\text{tg}\ \alpha + \text{cotg}\ \alpha$; Si: $\overline{A'P} = 2x + 1$ y $OP = 4x + 1$

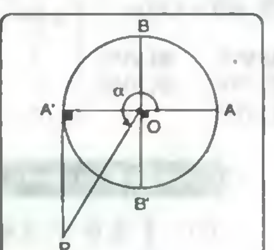
A) 4/3

B) 13/12

C) 25/12

D) 12/13

E) 25/3



Ejercicio 2 : En el siguiente C.T. Hallar el área sombreada ($\alpha \Rightarrow$ radianes)

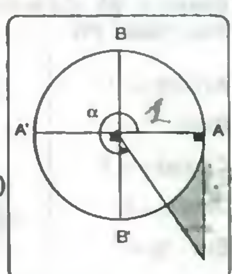
A) $0,5\ (\alpha + \text{tg}\ \alpha - 2\pi)$

B) $0,5\ (\alpha + \text{cotg}\ \alpha - 2\pi)$

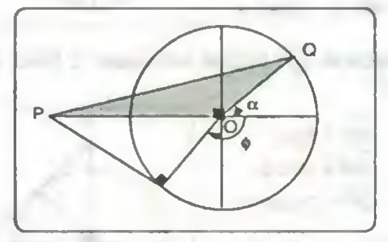
C) $0,5\ (\alpha + \text{tg}\ \alpha + \pi)$

D) $0,5\ (\alpha + \text{cotg}\ \alpha + 2\pi)$

E) $0,5\ (\alpha - \text{tg}\ \alpha - 2\pi)$



Ejercicio 3: En el círculo trigonométrico adjunto; determinar el área del Δ POQ.



A) $-0,5\ \text{sen}\ \alpha\ .\ \text{cosec}\ \phi$ B) $-0,5\ \text{sen}\ \alpha\ .\ \sec \phi$

C) $0,5\ \cos \alpha.\ \text{cosec}\ \phi$ D) $0,5\ \text{sen}\ \alpha\ .\ \sec\ (\phi)$

E) $0,5\ \cos \alpha\ .\ \text{cosec}\ (-\phi)$

Ejercicio 4 : Con ayuda del siguiente C.T. Hallar el área de la región sombreada.

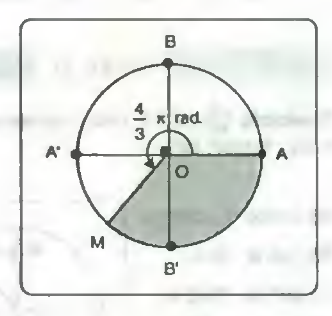
A) $\frac{\pi}{3}\ u^2$

B) $\frac{\pi}{6}\ u^2$

C) $\frac{2\pi}{3}\ u^2$

D) $5\ \pi\ u^2$

E) $\frac{\pi}{2}\ u^2$



Ejercicio 5: Indicar en la circunferencia trigonométrica. La expresión falsa.

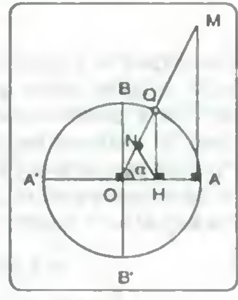
A) $\overline{OM} = \sec \alpha$

B) $\overline{ON} = \cos^2 \alpha$

C) $\overline{NQ} = \text{sen}^2 \alpha$

D) $\overline{NH} = \text{sen}\, \alpha \,.\, \cos \alpha$

E) $\overline{AH} = \text{cosec}\, \alpha$



Ejercicio 6: Hallar el área de la región sombreada en el C.T.

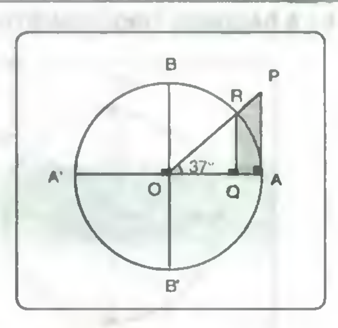
A) $\frac{17}{100}\ u^2$

B) $\frac{17}{200}\ u^2$

C) $\frac{27}{100}\ u^2$

D) $\frac{27}{200}\ u^2$

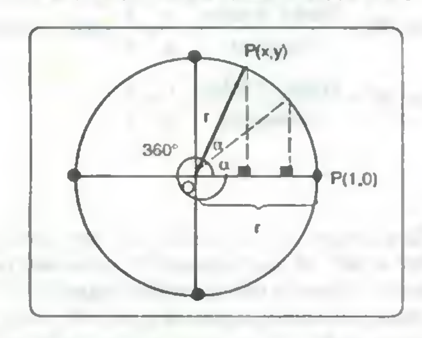
E) $\frac{21}{200}\ u^2$



Clave de Respuestas

1. C	2. E	3. B	4. A	5. E	6. D

6.1.5 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE 0° Y 360°



- Sea "α" un ángulo en posición normal si este ángulo disminuye de valor hasta reducirse a 0°

Entonces el lado final coincide con el lado inicial donde el punto P (x,y), se convierte en P(1,0)

O sea: P (x,y) = P(1,0)

Donde: x = 1 (abscisa) ; y = 0 (ordenada)

α < : Nos indica que "α" va disminuyendo su valor hasta que tome valor 0°

En consecuencia:

$\alpha = 0°$

x = 1 ⇒ Abscisa

y = 0 ⇒ Ordenada

r = 1 ⇒ Radio Vector

Según la figura los ángulos de 0° y 360° son coterminales por tener el mismo lado inicial y final.

Luego:

$$\text{sen } 0° = \text{sen } 360° = \frac{\text{Ordenador}}{\text{Radio Vector}} = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cos 0° = \cos 360° = \frac{\text{Abscisa}}{\text{Radio Vector}} = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

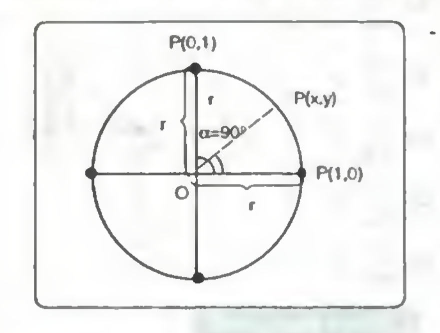
$$\text{tg } 0° = \text{tg } 360° = \frac{\text{Ordenada}}{\text{Abscisa}} = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cot 0° = \cot 360° = \frac{\text{Abscisa}}{\text{Ordenada}} = \frac{x}{y} = \frac{1}{0} = \text{(No definido)}$$

$$\sec 0° = \sec 360° = \frac{\text{Radio Vector}}{\text{Abscisa}} = \frac{r}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\csc 0° = \csc 360° = \frac{\text{Radio Vector}}{\text{Ordenada}} = \frac{r}{y} = \frac{1}{0} = \text{(No definido)}$$

6.1.6 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE 90°



- Si el ángulo "α" en posición normal, crece de 0° a 90°, el radio vector que se encuentra en el semieje "x" positivo coincide con el semieje positivo "y" entonces las coordenadas del punto P(1,0) se convierte en P(0,1), es decir la abscisa "x" se reduce a cero la coordenada "y" es positiva e igual a 1 y el radio vector "r" es igual a "y".

$$\alpha = 90°$$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow \text{Abscisa} \\ y = 1 \Rightarrow \text{Ordenada} \\ r = 1 \Rightarrow \text{Radio Vector} \end{cases}$$

Luego:

$$\text{sen } 90° = \frac{\text{Ordenador}}{\text{Radio Vector}} = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cos 90° = \frac{\text{Abscisa}}{\text{Radio Vector}} = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

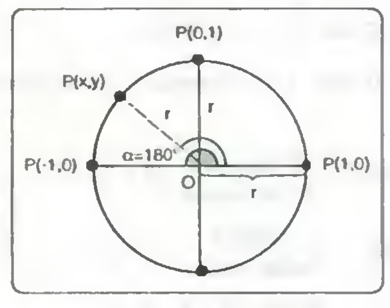
$$\text{tg } 90° = \frac{\text{Ordenada}}{\text{Abscisa}} = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} = (\text{No definido})$$

$$\cot 90° = \frac{\text{Abscisa}}{\text{Ordenada}} = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sec 90° = \frac{\text{Radio Vector}}{\text{Abscisa}} = \frac{r}{x} = \frac{1}{0} = (\text{No definido})$$

$$\csc 90° = \frac{\text{Radio Vector}}{\text{Ordenada}} = \frac{r}{y} = \frac{1}{1} = 1$$

6.1.7 Razones Trigonométricas de 180°



- Si el ángulo "α" en posición normal, crece de 90° a 180°, el radio ubicado en el semieje positivo "y" coincide con el semieje negativo "x" entonces las coordenadas del punto P(0,1) se convierte en P(-1,0), es decir, la abscisa "x" es negativa e igual a -1 la ordenada "y" se reduce a cero y el radio vector r = 1, en consecuencia.

$$\alpha = 180°$$

$$\begin{cases} x = -1 \Rightarrow \text{Abscisa} \\ y = 0 \Rightarrow \text{Ordenada} \\ r = 1 \Rightarrow \text{Radio Vector} \end{cases}$$

Luego:

$$\text{sen } 180° = \frac{\text{Ordenador}}{\text{Radio Vector}} = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cos 180° = \frac{\text{Abscisa}}{\text{Radio Vector}} = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = 1$$

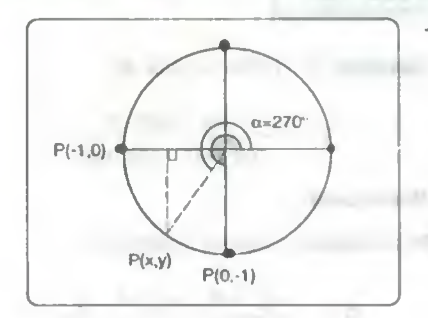
$$\text{tg } 180° = \frac{\text{Ordenada}}{\text{Abscisa}} = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\cot 180° = \frac{\text{Abscisa}}{\text{Ordenada}} = \frac{x}{y} = \frac{-1}{0} = (\text{No defin.})$$

$$\sec 180° = \frac{\text{Radio Vector}}{\text{Abscisa}} = \frac{r}{x} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\csc 180° = \frac{\text{Radio Vector}}{\text{Ordenada}} = \frac{r}{y} = \frac{1}{0} = (\text{No defin.})$$

6.1.8 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE 270°



- Si el ángulo "α" en posición normal, crece de 180° a 270°, el radio vector ubicado en el semieje negativo "x" coincide con el semieje negativo "y". Entonces el punto P(-1,0), se convierte en P(0,-1), es decir la abscisa se reduce a cero la ordenada "y" es negativa e igual a -1 y el radio vector r = 1.

En consecuencia. $\alpha = 270°$

$$\begin{cases} x = 0 & \Rightarrow \text{Abscisa} \\ y = -1 & \Rightarrow \text{Ordenada} \\ r = 1 & \Rightarrow \text{Radio Vector} \end{cases}$$

Luego:

$$\text{sen } 270° = \frac{\text{Ordenador}}{\text{Radio Vector}} = \frac{y}{r} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\cos 270° = \frac{\text{Abscisa}}{\text{Radio Vector}} = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{tg } 270° = \frac{\text{Ordenada}}{\text{Abscisa}} = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0} = (\text{No defin.})$$

$$\cot 270° = \frac{\text{Abscisa}}{\text{Ordenada}} = \frac{x}{y} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\sec 270° = \frac{\text{Radio Vector}}{\text{Abscisa}} = \frac{r}{x} = \frac{1}{0} = (\text{No defin.})$$

$$\csc 270° = \frac{\text{Radio Vector}}{\text{Ordenada}} = \frac{r}{y} = \frac{1}{-1} = -1$$

CUADRO RESUMEN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS 0°, 90°, 180°, 270° Y 360°

Angulo / R.T.	0°	90° o $\frac{\pi}{2}$ rad	180° o π rad	270° o $\frac{3\pi}{2}$ rad	360° o 2π rad
Sen	0	1	0	-1	0
Cos	1	0	-1	0	1
Tg	0	$\nexists$	0	$\nexists$	0
Cotg	$\nexists$	0	$\nexists$	0	$\nexists$
Sec	1	$\nexists$	-1	$\nexists$	1
Cosec	$\nexists$	1	$\nexists$	-1	$\nexists$

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejercicio 1 . Hallar el valor de:

$$E = \frac{4\ (\text{cosec}\ 270° - \cos 0°)}{\sec 180° - 7}$$

Resolución:

Reemplazando valores, obtenemos:

$$E = \frac{4\ [(-1)-(1)]}{(-1)-7} = \frac{4\ [-2]}{-8} = \frac{8}{8} = 1$$

Ejercicio 2 . Hallar el valor de:

$$M = \frac{3\ (\text{sen}\ 270° - 1)^2}{\sec 0° + \cos 360°}$$

Resolución:

Reemplazando valores obtenemos:

$$M = \frac{3\ [(-1)-1]^2}{(1)+(1)} = \frac{3\ [-2]^2}{2} = \frac{3\ (4)}{2} = 6$$

Ejercicio 3 . Hallar el valor de :

$$R = \frac{\sec^3 180° + 5}{\cos 360° - \cos 180°}$$

Resolución:

Reemplazando valores obtenemos:

$$R = \frac{(-1)^3 + 5}{(1)-(-1)} = \frac{(-1)+5}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$$

Ejercicio 4 . Hallar el valor de:

$$Q = \frac{6\ \text{sen}\ \frac{\pi}{2} + 3\ \text{cosec}\ \frac{3\pi}{2} + 2\ \text{cosec}\ \frac{\pi}{2}}{4\ \cos \frac{\pi}{2} - \text{sen}\ \frac{3\pi}{2}}$$

Resolución:

Reemplazando valores obtenemos:

$$Q = \frac{6\ (1) + 3\ (-1) + 2\ (1)}{4\ (0) - (-1)} = \frac{5}{1} = 5$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 13

Ejercicio 1 : Hallar el valor numérico de:

$E = (1 + \text{sen}\ 360°)\ (2 + \cos 180°)$

Resolución:

Sabemos que: Sen 360° = 0 ; Cos 180° = -1

Luego: $E = (1 + (0))\ (2 + (-1))$

$E = (1)\ (1) = 1$

$\therefore$ **E = 1** ***Rpta.***

Ejercicio 2 : Hallar el valor numérico de:

$P = 2\cos^2 270° - 3\ \text{sen}\ 360° + \text{tg}^3\ 180°$

Resolución:

Rpta. P = Cero

Ejercicio 3 : Hallar el valor numérico de:

$$A = \frac{(6-\cos 180°)\ \sec^2 180°}{\cot g\ 270° + \cos 360°}$$

Resolución:

Rpta. A = 7

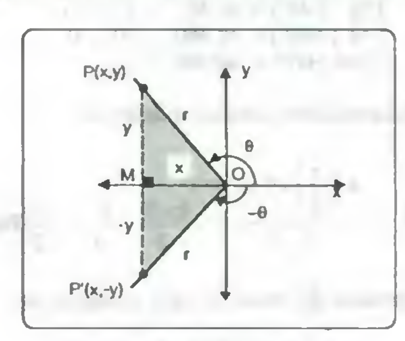
Ejercicio 4 : Hallar el valor numérico de:

$$Q = \frac{2\ \text{sen}\ \frac{3\pi}{2} + 3\ \text{sen}\ \frac{\pi}{6} - \cos 2\pi}{\sec \pi + \text{tg}\ 2\pi}$$

Resolución:

Rpta. Q = 3/2

6.1.9 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO NEGATIVO (-θ)



- La determinación de las razones trigonométricas de un ángulo negativo se puede lograr mediante la regla de Reproducción al primer cuadrante, conviene, sin embargo, disponer de una relación especial. Trace ángulos igual a θ y -θ en posición normal y escoja P(x,y) y P(x,-y) como se muestra en la figura, obteniendo dos triángulos iguales.

- Luego, hallamos las razones trigonométricas del ⊿ OMP y del ⊿ OMP'.

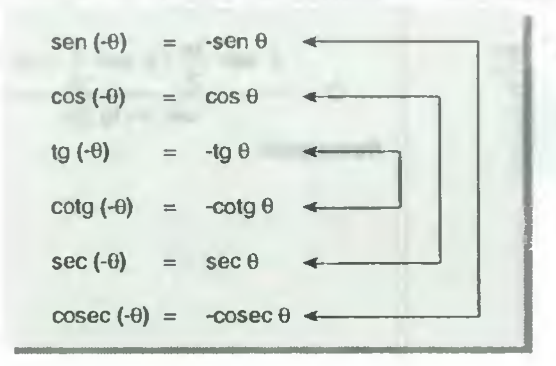
R.T. en el ⊿ OMP: R.T. en el ⊿ OMP'

i) $\text{sen}\ \theta = \frac{y}{r}$; $\text{sen}\ (-\theta) = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r} \Rightarrow \boxed{\text{sen}\ (-\theta) = -\text{sen}\ \theta}$

ii) $\cos \theta = \frac{-x}{r} = -\frac{x}{r}$; $\cos (-\theta) = \frac{-x}{r} = -\frac{x}{r} \Rightarrow \boxed{\cos (-\theta) = \cos \theta}$

iii) $\text{tg}\ \theta = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x}$; $\text{tg}\ (-\theta) = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} \Rightarrow \boxed{\text{tg}\ (-\theta) = -\text{tg}\ \theta}$

Por razones trigonométricas recíprocas obtenemos:



Nota: Las razones trigonométricas de los ángulos negativos son negativos a excepción del coseno y la secante.

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejercicio 1. Hallar el valor numérico de:

$$E = \frac{\text{sen }(-270°)+2\cos(-180°)}{3\text{ sen }(-90°)-\cos(-360°)}$$

Resolución:

Sabemos que:

$$\begin{cases} \text{sen }(-270°) = -\text{sen } 270° = -(-1) = 1 \\ \cos(-180°) = \cos 180° = -1 \\ \text{sen }(-90°) = -\text{sen } 90° = -(1) = -1 \\ \cos(-360°) = \cos 360° = 1 \end{cases}$$

Reemplazando valores obtenemos:

$$E = \frac{(1)+2(-1)}{3(-1)-1} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4} \quad \textbf{Rpta.}$$

Ejercicio 2. Hallar el valor numérico de:

$$M = \frac{4\cos(-60°)-3\text{ tg }(-45°)}{\text{tg }(-360°)-\sec(-60°)}$$

Resolución:

Sabemos que:

$$\begin{cases} \cos(-60°) = \cos 60° = 1/2 \\ \text{tg }(-45°) = -\text{tg } 45° = -(1) = -1 \\ \text{tg }(-360°) = -\text{tg } 360° = (-0) = 0 \\ \sec(-60°) = \sec 60° = 2 \end{cases}$$

Reemplazando valores obtenemos:

$$M = \frac{4\left(\frac{1}{2}\right)-3(-1)}{0-2} = \frac{2+3}{-2} = \frac{5}{-2} = \frac{-5}{2} \quad \textbf{Rpta.}$$

Ejercicio 3. Hallar el valor numérico de:

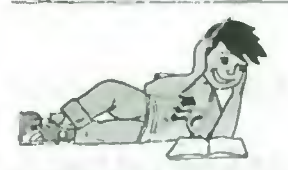
$$E = \text{sen}^2(-30°) - 4(\text{tg }(-45°))$$

Resolución:

Sabemos que: $\begin{cases} \text{sen }(-30°) = -\text{sen } 30° = -1/2 \\ \text{tg }(-45°) = -\text{tg } 45° = -(1) = -1 \end{cases}$

Reemplazando valores, obtenemos:

$$E = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4(-1) = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4} \quad \textbf{Rpta.}$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 14

Ejercicio 1 : Hallar el valor numérico de:

$$E = \frac{3\ tg^2\ 60° - 2\ cosec\ (-270°)}{4\ cotg\ (-60°)}$$

Resolución:

Sabemos que:

*) $tg\ 60° = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{tg^2\ 60° = 3}$

**) $cosec\ (-270°) = -cosec\ 270° = -(-1)$

$\therefore \boxed{cosec\ (-270°) = 1}$

***) $cotg\ (-60°) = -cotg\ 60° = -\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$\therefore \boxed{cotg\ (-60°) = -\frac{\sqrt{3}}{3}}$

Luego: $E = \frac{3\ (3) - 2\ (1)}{4\left(-\sqrt{3}/3\right)} = \frac{-21}{4\ \sqrt{3}} = \frac{-21\ \sqrt{3}}{4 \cdot 3}$

$\therefore \boxed{E = -\frac{7}{4}\ \sqrt{3}}$ **Rpta.**

Ejercicio 2 : Hallar el valor numérico de:

$$R = \frac{\cos\ (-60°) + 2\ cotg\ (-45°)}{cosec\ (-30°) - tg\ (-360°)}$$

Resolución:

Rpta. $\boxed{R = \frac{3}{4}}$

Ejercicio 3 : Hallar el valor numérico de:

$$Q = \frac{\cos\ (-180°) + \cos^2\ (-45°)}{\sec^2\ (-180°) - tg^2\ (-180°)}$$

Resolución:

Rpta. $\boxed{Q = -\frac{1}{2}}$

Ejercicio 4 : Hallar el valor numérico de:

$$M = \frac{6\ cotg^2 (-60°) - 2\ \cos^2 (-30°)}{3\ cotg\ (-30°)}$$

Resolución:

Rpta. $\boxed{M = -\frac{\sqrt{3}}{18}}$

6.2 REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

6.2.1 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS DE LA FORMA: $(n.180° \pm \alpha)$ ó $(n\pi \pm \alpha)$; $n \in z$

Casos Particulares

F.T. $(180° \pm \alpha) = \pm$ F.T. (α)	ó	F.T. $(\pi \pm \alpha) = \pm$ F.T. (α)
F.T. $(360° \pm \alpha) = \pm$ F.T. (α)	ó	F.T. $(2\pi \pm \alpha) = \pm$ F.T. (α)

- Para estos casos la función trigonométrica (F.T.) inicial, no varía el signo de la F.T. resultante, depende de la F.T. dada y del cuadrante al que pertenece el ángulo $(180° \pm \alpha)$ ó $(\pi \pm \alpha)$; $(360° \pm \alpha)$ ó $(2\pi \pm \alpha)$; siendo "α" un ángulo agudo (ángulo agudo es aquel ángulo que mide menos de 90°)

Ejemplo 1: Reducir: $\cos(180° - \alpha)$

Resolución:

El ángulo $(180° - \alpha) \in$ al Q_2, la F.T. coseno en dicho cuadrante es negativa, luego al resultado se colocará el signo (-), veamos:

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

$(180° - \alpha)$: $\in$ al Q_2; $-\cos\alpha$: *Resultado*

Ejemplo 2: Reducir: $\text{tg}(\pi + \alpha)$

Resolución:

El ángulo $(\pi + \alpha) \in$ al Q_3 la F.T., tangente en dicho cuadrante es positva, luego al resultado se colocará el signo (+); veamos:

$$\text{tg}(\pi + \alpha) = +\text{tg}\,\alpha$$

$(\pi + \alpha)$: $\in$ al Q_3; $+\text{tg}\,\alpha$: *Resultado*

Ejemplo 3: Reducir: $\sec(360° - \alpha)$

Resolución:

El ángulo $(360° - \alpha) \in$ al Q_4 la F.T., secante en dicho cuadrante es positiva, luego al resultado se colocará el signo (+); veamos:

$$\sec(360° - \alpha) = +\sec\alpha$$

$(360° - \alpha)$: $\in$ al Q_4; $+\sec\alpha$: *Resultado*

Ejemplo 4: Reducir: $\text{sen}(360° + \alpha)$

Resolución:

El ángulo $(360° + \alpha) \in$ al Q_1, la F.T., seno en dicho cuadrante es positiva, luego al resultado se colocará el signo (+); veamos:

$$\text{sen}(360° - \alpha) = +\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,\alpha$$

$(360° - \alpha)$: $\in$ al Q_1; $+\text{sen}\,\alpha$: *Resultado*; $\text{sen}\,\alpha$: *El signo (+) se sobreentiende*

TALLER DE EJERCICIOS Nº 15

A : Reducir al primer cuadrante:

1. Sen (180° - α) = ...
2. Cos (180° - α) = ...
3. Tg (180° - α) = ...
4. Cotg (180° + α) = ...
5. Sec (180° + α) = ...
6. Cosec (180° + α) = ...

C : Reducir al primer cuadrante:

1. Sen (360° - α) = ...
2. Cos (360° - α) = ...
3. Tg (360° - α) = ...
4. Cotg (360° + α) = ...
5. Sec (360° + α) = ...
6. Cosec (360° + α) = ...

B : Reducir al primer cuadrante:

1. Cotg (π – α) = -cotg α
2. Sec (π – α) = -sec α
3. Cosec (π – α) = cosec α
4. Sen (π – α) = sen α
5. Cos (π – α) = - cos α
6. Tg (π – α) = - tg α

D : Reducir al primer cuadrante:

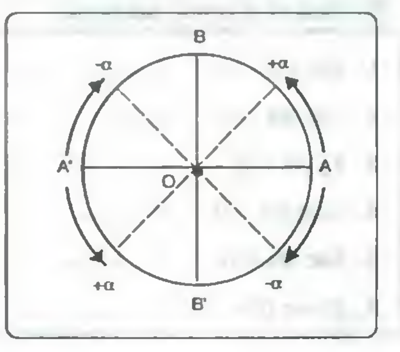
1. Cotg (2π – α) = - cotg α
2. Sec (2π – α) = sec α
3. Cosec (2π - α) = - cosec α
4. Sen (2π + α) = sen α
5. Cos (2π + α) = cos α
6. Tg (2π + α) = tg α

CASO GENERAL: F.T. [n . 180° ± α] = ± F.T. (α) ó
F.T. [n . π ± α] = ± F.T. (α)

Este caso es similar a los casos particulares, pero hay que tener en cuenta que:

n (180°), Sí: "n" es impar se encuentra en la posición A'. (ver figura)

n (180°), Si: "n" es par se encuentra en la posición A. (ver figura)



Ejemplo 1: $(3\pi - \alpha)$ pertenece al Q_2, se sabe que 3π está en A' y como "α" gira en sentido horario, lo que nos lleva al segundo cuadrante (Q_2)

Ejemplo 2: $(5\pi + \alpha)$ pertenece al Q_3, se sabe que 5π está en A' y como "α" gira en sentido antihorario, lo que nos lleva al Q_3

Ejemplo 3: $(540° + \alpha)$ esta expresión se puede esciribir así: $[3\,(180°) + \alpha]$ pertenece al Q_3, pues se sabe que $3\,(180°)$ está en A' y como "α" gira en sentido antihorario, lo que nos lleva al Q_3

Ejemplo 4: $(4\pi + \alpha)$ pertenece al primer cuadrante (Q_1), se sabe que 4π está en A' y como "α" gira en sentido antihorario, lo que nos lleva al primer cuadrante (Q_1)

Ejemplo 5: $(720° - \alpha)$ esta expresión se puede escrbir así: $[4\,(180°) - \alpha]$ pertenece al Q_4, se sabe que $4\,(180°)$ está en A' y como "α" gira en sentido horario, lo que nos lleva al cuarto cuadrante (Q_4)

TALLER DE EJERCICIOS Nº 16

A: Reducir al primer cuadrante:

1. $\text{Sen}\,(3\pi + \alpha)$ = ...
2. $\text{Cos}\,(5\pi - \alpha)$ = ...
3. $\text{Tg}\,(7\pi - \alpha)$ = ...
4. $\text{Cotg}\,(3\pi - \alpha)$ = ...
5. $\text{Sec}\,(9\pi + \alpha)$ = ...
6. $\text{Cosec}\,(5\pi + \alpha)$ = ...

B: Reducir al primer cuadrante:

1. $\text{Sen}\,(6\pi + \alpha)$ = ...
2. $\text{Cos}\,(8\pi - \alpha)$ = ...
3. $\text{Tg}\,(4\pi + \alpha)$ = ...
4. $\text{Cotg}\,(6\pi - \alpha)$ = ...
5. $\text{Sec}\,(8\pi + \alpha)$ = ...
6. $\text{Cosec}\,(10\pi - \alpha)$ = ...

C: Reducir al primer cuadrante:

1. $\text{Sen}\,(7\pi + \alpha)$ = ...
2. $\text{Cos}\,(11\pi + \alpha)$ = ...
3. $\text{Tg}\,(13\pi + \alpha)$ = ...
4. $\text{Cotg}\,(9\pi - \alpha)$ = ...
5. $\text{Sec}\,(11\pi - \alpha)$ = ...
6. $\text{Cosec}\,(13\pi - \alpha)$ = ...

D: Reducir al primer cuadrante:

1. $\text{Sen}\,(10\pi + \alpha)$ = ...
2. $\text{Cos}\,(12\pi + \alpha)$ = ...
3. $\text{Tg}\,(14\pi + \alpha)$ = ...
4. $\text{Cotg}\,(12\pi - \alpha)$ = ...
5. $\text{Sec}\,(14\pi - \alpha)$ = ...
6. $\text{Cosec}\,(16\pi - \alpha)$ = ...

6.2.2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS DE LA FORMA:

$$\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}+\alpha\right] \quad ó \quad \left[(2n+1)\,90°\pm\alpha\right] \quad ; \quad n \in Z$$

CASOS PARTICULARES:

$$F.T.\,[90°\pm\alpha] = \pm\, Co\, F.T.\,(\alpha) \quad ó \quad F.T.\left[\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right] = \pm\, Co\, F.T.\,(\alpha)$$

$$F.T.\,[270°\pm\alpha] = \pm\, Co\, F.T.\,(\alpha) \quad ó \quad F.T.\left[\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right] = \pm\, Co\, F.T.\,(\alpha)$$

En estos casos para reducir, es similar a los anteriores, teniendo en cuenta que cada signo del resultado depende la función inicial, veamos algunos ejemplos.

Ejercicio 1 : Reducir: cos $(90° + \alpha)$

Resolución:

El ángulo $(90° + \alpha) \in$ al Q_2, la F.T. coseno en dicho cuadrante es negativa, luego al resultado se colocará el signo (-), acompañado de la **cofunción** trigonométrica de la F.T. inicial así:

$$\text{Cos}\,(90° + \alpha) = \text{-Co F.T.}\,(\alpha)\ ; \Rightarrow \text{Co F.T.} = \text{Cofunción trigonométrica}$$

$$\therefore \quad \underbrace{\text{Cos}\,(90° + \alpha)}_{\in \text{ al } Q_2} = \underbrace{-\,\text{sen}\,\alpha}_{\textit{Resultado}}$$

Ejercicio 2 : Reducir: sen $(270° - \alpha)$

Resolución:

El ángulo $(270° - \alpha) \in$ al Q_3, la F.T. seno en dicho cuadrante es negativa, luego al resultado se colocará el signo (-), acompañado de la **cofunción** trigonométrica de la F.T. inicial así:

$$\therefore \quad \underbrace{\text{sen}\,(270° - \alpha)}_{\in \text{ al } Q_3} = \underbrace{-\,\cos\alpha}_{\textit{Resultado}}$$

Ejercicio 3 : Reducir: tg $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

Resolución:

El ángulo $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \in$ al Q_1, la F.T. tangente en dicho cuadrante es positiva, luego al resultado se colocará el signo (+), acompañado de la **cofunción** trigonométrica de la F.T. inicial así:

$$\therefore \quad \text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = +\ \text{cotg}\ \alpha$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 17

A : Reducir al primer cuadrante:

1. Sen (90° - α) = ...
2. Cos (90° - α) = ...
3. Tg (90° - α) = ...
4. Cotg (90° - α) = ...
5. Sec (90° - α) = ...
6. Cosec (90° - α) = ...

C : Reducir al primer cuadrante:

1. Sen (3π/2 - α) = ...
2. Cos (3π/2 - α) = ...
3. Tg (3π/2 - α) = ...
4. Cotg (3π/2 + α) = ...
5. Sec (3π/2 + α) = ...
6. Cosec (3π/2 + α) = ...

B : Reducir al primer cuadrante:

1. Cotg (π/2 – α) = ...
2. Sec (π/2 – α) = ...
3. Cosec (π/2 – α) = ...
4. Sen (π/2 + α) = ...
5. Cos (π/2 + α) = ...
6. Tg (π/2 + α) = ...

D : Reducir al primer cuadrante:

1. Cotg (270° – α) = ...
2. Sec (270° – α) = ...
3. Cosec (270° - α) = ...
4. Sen (270° + α) = ...
5. Cos (270° + α) = ...
6. Tg (270° + α) = ...

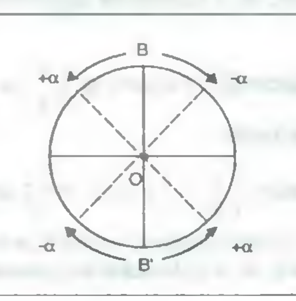
CASOS GENERAL:

$$F.T.\left[(2n+1)\ 90°\pm\alpha\right] = \pm Co\ F.T.\ (\alpha) \quad ó \quad F.T.\left[(2n+1)\ \frac{\pi}{2}\pm\alpha\right] = \pm Co\ F.T.\ (\alpha)$$

En este caso: (2n + 1), representa un número impar

(2n + 1) 90°

Si: (2n +1) es $\overset{o}{4}$ + 1 (múltiplo de cuatro, más 1), entonces (2n + 1) 90° ó (2n +1) π/2 está en la posición B. (Ver Figura)



(2n + 1) 90°

Sí: (2n + 1) es $\overset{o}{4}$ - 1 (múltiplo de cuatro, menos 1), entonces (2n + 1) 90° ó (2n + 1) π/2 está en la posición B'. (Ver Figura)

EJEMPLO 1: $\frac{5\pi}{2}$, está expresión se puede escribir así: $5\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ahora como 5 es $(\overset{\circ}{4}+1)$, entonces: está en B.

EJEMPLO 2: $\frac{11\pi}{2}$, está expresión se puede escribir así: $11\left(\frac{\pi}{2}\right)$, ahora como 11 es $(\overset{\circ}{4}-1)$, entonces: $11\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ésta en B'.

EJEMPLO 3: $\left(\frac{9\pi}{2}+\alpha\right)$ sabemos que 9 es $(\overset{\circ}{4}+1)$, entonces está en B, y como "α" gira en sentido antihorario lo que nos lleva al segundo cuadrante (Q_2).

EJEMPLO 4: Reducir: $\text{sen}\left(\frac{11\pi}{2}+\alpha\right)$

Resolución:

- El ángulo $\left(\frac{11\pi}{2}+\alpha\right) \in$ al Q_4, porque 11 es $(\overset{\circ}{4}-1)$, donde $\frac{11\pi}{2}$ está en B' y como "α" gira en sentido antihorario, entonces: $\left(\frac{11\pi}{2}+\alpha\right)$ $\in$ al Q_4.

$$\therefore \quad \text{sen}\left(\frac{11\pi}{2}+\alpha\right) = -\cos\alpha$$

$\left(\frac{11\pi}{2}+\alpha\right) \in$ al Q_4

EJEMPLO 5: Reducir: $\text{tg}\left(\frac{19\pi}{2}-\alpha\right)$

Resolución:

- El ángulo $\left(\frac{19\pi}{2}-\alpha\right) \in$ al Q_3, porque 19 es $(\overset{\circ}{4}-1)$, donde $\frac{19\pi}{2}$ está en B' y como "α" gira en sentido horario, entonces: $\left(\frac{19\pi}{2}-\alpha\right) \in$ al Q_3.

$$\therefore \quad \text{tg}\left(\frac{19\pi}{2}-\alpha\right) = \text{cotg}\,\alpha$$

$\left(\frac{19\pi}{2}-\alpha\right) \in$ al Q_3

EJEMPLO 6: Reducir: $\text{sen}\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)$

Resolución:

- El ángulo $\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right) \in$ al Q_1, porque 5 es $(4+1)$, donde $\frac{5\pi}{2}$ está en B y como "α" gira en sentido horario, entonces: $\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right) \in$ al Q_1.

$$\therefore \quad \text{sen}\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 18

- Reducir al primer cuadrante:

Ejercicio 1: $\text{Sen}\left(7\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$

Resolución:

Rpta. $-\cos\alpha$

Ejercicio 4: $\text{Sen}\left(\dfrac{9\pi}{2}+\alpha\right)$

Resolución:

Rpta. $\cos\alpha$

Ejercicio 2: $\cos(630° + \alpha)$

Resolución:

Rpta. $\text{sen}\,\alpha$

Ejercicio 5: $\cos\left(\dfrac{13\pi}{2}+\alpha\right)$

Resolución:

Rpta. $-\text{sen}\,\alpha$

Ejercicio 3: $\text{tg}(990° + \alpha)$

Resolución:

Rpta. $-\text{cotg}\,\alpha$

Ejercicio 6: $\text{tg}\left(\dfrac{17\pi}{2}+\alpha\right)$

Resolución:

Rpta. $-\text{cotg}\,\alpha$

6.2.3 REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

Consiste en comparar el valor de las funciones trigonométricas de un ángulo de cualquier magnitud con respecto al valor de la función trigonométrica de un ángulo del primer cuadrante. (Angulo agudo).

Para reducir al primer cuadrante, se presentan los siguientes casos:

PRIMER CASO:

Reducción para ángulos positivos menores de una vuelta.

Sabemos que todo ángulo positivo menor de una vuelta (360°) se puede descomponer como un ángulo cuadrantal, más o menos un ángulo agudo, dependiendo del cuadrante al que pertenece.

a) Si el ángulo pertenece al Q_2 lo descomponemos como: $(180° - \alpha)$ ó $(\pi - \theta)$.

b) Si pertenece al Q_3 lo descomponemos como $(180° + \alpha)$ ó $(\pi + \theta)$

c) Si pertenece al Q_4 lo descomponemos como: $(360° - \alpha)$ ó $(2\pi - \theta)$, siendo α y θ ángulos agudos.

Por Ejemplo: $100° \in \text{ al } Q_2 \Rightarrow 180° - 80° \Rightarrow \frac{5\pi}{9} \in Q_2 \Rightarrow \pi - \frac{4\pi}{9}$

$$150° \in \text{ al } Q_2 \Rightarrow 180° - 30° \Rightarrow \frac{5\pi}{6} \in Q_2 \Rightarrow \pi - \frac{\pi}{6}$$

$$200° \in \text{ al } Q_3 \Rightarrow 180° + 20° \Rightarrow \frac{10\pi}{9} \in Q_3 \Rightarrow \pi + \frac{\pi}{9}$$

$$250° \in \text{ al } Q_3 \Rightarrow 180° + 70° \Rightarrow \frac{25\pi}{18} \in Q_3 \Rightarrow \pi + \frac{7\pi}{18}$$

$$300° \in \text{ al } Q_4 \Rightarrow 360° - 60° \Rightarrow \frac{5\pi}{3} \in Q_4 \Rightarrow 2\pi - \frac{\pi}{3}$$

Luego: $F.T.(180° \pm \alpha) = \pm F.T.(\alpha)$ ó $F.T.(\pi \pm \theta) = \pm F.T.(\theta)$

$F.T.(360° \pm \alpha) = \pm F.T.(\alpha)$ ó $F.T.(2\pi \pm \theta) = \pm F.T.(\theta)$

Ejemplo 1 : Reducir al primer cuadrante: sen 240° ***Resolución:*** El ángulo 240° $\in$ al Q_3, lo descomponemos como: (180° + 60°).	Luego: $\text{sen } 240° = \underline{\text{sen}}\,(180° + 60°) = -\text{sen } 60°$

La función seno en el tercer cuadrante (Q_3) es negativa, entonces al resultado se colocará (-); también se debe tener en cuenta que no es la única respuesta ya que sen 60° = cos 30° por el complemento que dice así:

Cualquier función trigonométrica de un ángulo agudo es igual a la cofunción del ángulo complementario. Si "α" es un ángulo agudo entonces:

Función (α) = **Cofunción** (complemento de α)

Ejemplos:

a) sen 10° = cos (90° - 10°) = cos 80°
b) cos 20° = sen (90° - 20°) = sen 70°
c) tg 40° = cotg (90° - 40°) = cotg 50°

Ejemplo 2 : Reducir al primer cuadrante: cos (140°)

Resolución:

El ángulo 140° ∈ al Q_2, lo descomponemos como: (180° - 40°)

Luego:

$$\underbrace{\cos(140°)}_{\in \text{ al } Q_2} = \cos(180° - 40°) = -\cos 40°$$

Aplicando el criterio de cofunción, el resultado puede ser también así:

∴ cos (140°) = -cos 40° = -sen 50°

Ejemplo 3 : Reducir al primer cuadrante: tg 105°

Resolución:

El ángulo 105° ∈ al Q_2 lo descomponemos como: (180° - 75°)

Luego: $\underbrace{\text{tg } 105°}_{\in \text{ al } Q_2} = \text{tg}(180° - 75°) = -\text{tg } 75°$

Aplicando el criterio de cofunción, el resultado puede ser también así:

∴ tg 105° = - tg 75° = -cotg 15°

Ejemplo 4 : Reducir al primer cuadrante:

$$\operatorname{cosec} \frac{3\pi}{4}$$

Resolución:

El ángulo $\frac{3\pi}{4}$ ∈ al Q_2, lo descomponemos

como: $\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

Luego:

$$\operatorname{cosec} \frac{3\pi}{4} = \operatorname{cosec}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \quad \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{4} = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{4}$$

Ejemplo 5 : Reducir al primer cuadrante: sec 210°

Resolución:

El ángulo 210° ∈ al Q_3 lo descomponemos como: (180° + 30°)

Luego:

$$\underbrace{\sec 210°}_{\in \text{ al } Q_3} = \sec(180° + 30°) = -\sec 30°$$

∴ sec 210° = -sec 30°

Ejemplo 6: Reducir al primer cuadrante: sen 300°

Resolución:

El ángulo 300° $\in$ al Q_4, lo descomponemos como: (360° - 60°).

Luego:

$$\underbrace{\text{sen } 300°}_{\in \text{ al } Q_4} = \text{sen }(360° - 60°) = -\text{sen } 60°$$

Por cofunción: sen 60° = cos 30°

$\therefore$ **sen 300° = -sen 60° = -cos 30°**

Ejemplo 7: Reducir al primer cuadrante: cotg 280°

Resolución:

El ángulo 280° $\in$ al Q_4, lo descomponemos como: (360° - 80°).

Luego:

$$\underbrace{\text{cotg } 280°}_{\in \text{ al } Q_4} = \text{cotg }(360° - 80°) = -\text{cotg } 80°$$

Por cofunción: cotg 80° = tg 10°

$\therefore$ **cotg 280° = -cotg 80° = -tg 10°**

Ejemplo 8: Reducir al primer cuadrante: sen $\frac{8\pi}{5}$

Resolución:

El ángulo $\frac{8\pi}{5}$ $\in$ al Q_4, lo descomponemos como: $\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right)$

Luego:

$$\underbrace{\text{sen } \frac{8\pi}{5}}_{\in \text{ al } Q_4} = \text{sen }\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = -\text{sen } \frac{2\pi}{5}$$

$$\therefore \quad \text{sen } \frac{8\pi}{5} = -\text{sen } \frac{2\pi}{5}$$

Observación: Existe otro método que se utiliza con frecuencia, para reducir al primer cuadrante las funciones trigonométricas de un ángulo positivo y menor de una vuelta (360°), este método consiste en usar al ángulo referencial que se explicará a continuación veamos:

Ángulo Referencial:

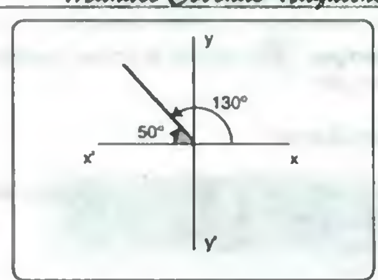
Se denomina asi al ángulo agudo que forma el lado final de un ángulo mayor de 90° con respecto al eje abscisas y se le representa por Q_R.

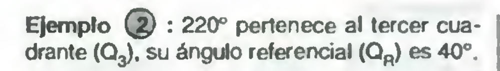
Ejemplo 1: 130° pertenece al segundo cuadrante (Q_2), su ángulo referencial (Q_R) es 50°.

De la figura, el ángulo referencial (Q_R) es:

$$\therefore \quad Q_R = 50°$$

Nota: Recordar que ángulo agudo es aquel ángulo, que mide menos de 90º.

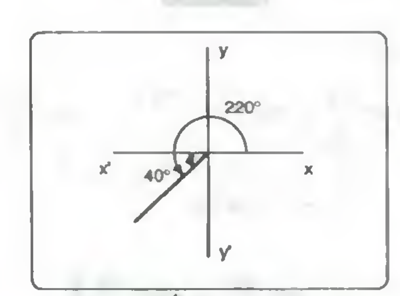




Ejemplo (2) : 220° pertenece al tercer cuadrante (Q_3), su ángulo referencial (Q_R) es 40°.

De la figura, el ángulo referencial (Q_R), es:

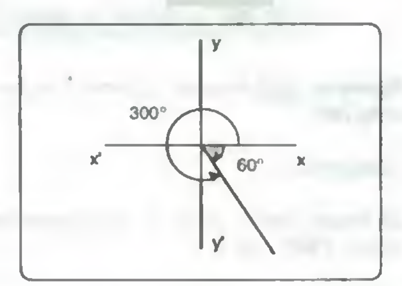
$$\therefore \quad Q_R = 40°$$



Ejemplo (3) : 300° pertenece al cuarto cuadrante (Q_4), su ángulo referencial (Q_R) es 60°.

De la figura, el ángulo referencial (Q_R), es:

$$\therefore \quad Q_R = 60°$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº (19)

A. Reducir al primer cuadrante:

Ejercicio 1 : tg 225°

Resolución:

Rpta. tg 45°

Ejercicio 2 : cos 230°

Resolución:

Rpta. -cos 50°

Ejercicio 3 : sec 170°

Resolución:

Rpta. -sec 10°

Ejercicio 5 : cotg 410°

Resolución:

Rpta. cotg 50°

Ejercicio 4 : cos 320°

Resolución:

Rpta. cos 40°

Ejercicio 6 : cosec 275°

Resolución:

Rpta. -cosec 85°

B. Reducir al primer cuadrante:

Ejercicio 1 : sen $\frac{5\pi}{4}$

Resolución:

Rpta. $-\text{sen}\ \frac{\pi}{4}$

Ejercicio 2 : cotg $\frac{7\pi}{6}$

Resolución:

Rpta. cotg $\frac{\pi}{6}$

Ejercicio **3** : $\sec \frac{6\pi}{7}$

Resolución:

Rpta. $-\sec \frac{\pi}{7}$

Ejercicio **5** : $\operatorname{tg} \frac{9\pi}{4}$

Resolución:

Rpta. $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$

Ejercicio **4** : $\operatorname{cosec} \frac{9\pi}{8}$

Resolución:

Rpta. $-\operatorname{cosec} \frac{\pi}{8}$

Ejercicio **6** : $\operatorname{cosec} \frac{11\pi}{5}$

Resolución:

Rpta. $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{5}$

SEGUNDO CASO:

Reducción para ángulos mayores de una vuelta

Cuando el ángulo es mayor de 360°, se siguen los siguientes pasos:

1. Dividimos al ángulo dado entre 360° (ó 2 π), dependiendo del sistema en que se trabaje.
2. Las funciones trigonométricas del ángulo dado son iguales a las respectivas funciones trigonométricas del residuo (de la división efectuada)
3. Si dicho residuo es menor de 90° ó $\pi/2$, el problema habrá concluido, pero si fuera mayor, entonces aplicamos cualesquiera de los métodos explicados en el primer caso.

Ejemplo (1): Reducir al primer cuadrante: sen 2 910°

Resolución:

Efectuando la división, obtenemos:

2 910°	360°
2 880°	8
30°	

➡ sen 2 910° = sen 30° (Residuo menor de 90°) ➡ ∴ $\text{sen } 2\,910° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$ ***Rpta.***

Ejemplo (2) : Reducir al primer cuadrante: tg 1 845°

Resolución:

Efectuando la división, obtenemos:

1 845°	360°
1 800°	5
45°	

➡ tg 1 845° = tg 45° (Residuo menor de 90°) ➡ ∴ tg 1 845° = 1 ***Rpta.***

Ejemplo (3) : Reducir al primer cuadrante: cos 1 290°

Resolución:

Efectuando la división, obtenemos:

1 290°	360°
1 080°	3
210° (*Residuo*)	

➡ cos 1 290° = cos 210° (Residuo mayor de 90°)

Aplicando el primer caso obtenemos: cos 1 290° = cos 210° = cos (180° + 30°) = -cos 30°

(210° ∈ al Q_3)

$$\therefore \cos 1\,290° = \cos 210° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$ ***Rtpa.***

Ejemplo (4): Reducir al primer cuadrante: sen 3 930°

Resolución:

Efectuando la división, obtenemos:

3 930°	360°
3 600°	10
330° (*Residuo*)	

➡ sen 3 930° = sen 330° (Residuo mayor de 90°)

Aplicando el primer caso, obtenemos: $\text{sen } 3\,930° = \text{sen } 330° = \text{sen } (360° - 30°) = -\text{sen } 30°$

$330° \in$ al Q_4

$$\therefore \quad \text{sen } 3\,930° = \text{sen } 330° = -\text{sen } 30° = -\frac{1}{2}$$ *Rtpa.*

Ejemplo (5): Reducir al primer cuadrante: $\text{tg } 313\frac{\pi}{3}$

Resolución:

- En primer lugar dividimos el ángulo dado o sea: $313\frac{\pi}{3}$ entre 2π; veamos: $313\frac{\pi}{3} \;\big|\; 2\pi$

- En segundo lugar convertimos los "2π" a tercios. $2\pi = 3\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 6\frac{\pi}{3}$

Luego: $313\frac{\pi}{3} \;\big|\; 6\frac{\pi}{3}$; Ahora, nos olvidamos por un momento de $\pi/3$ y efectuamos la división, como si se tratara de una división cualquiera, veamos: ➠

$$\begin{array}{r|l} 313 & 6 \\ \hline 30 & 52 \\ -13 & \\ 12 & \\ \hline 1 & \leftarrow \text{Residuo} \end{array}$$

- Al residuo hallado, o sea 1; lo multiplicamos por $\pi/3$, siendo al final de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r|l} 313\frac{\pi}{3} & 6\frac{\pi}{3} \\ \hline 30 & 52 \\ 13 & \\ 12 & \\ \hline 1\frac{\pi}{3} & \leftarrow \text{Residuo} \end{array}$$

$\text{tg } 313\frac{\pi}{3} = \text{tg } 1\frac{\pi}{3}$ — Residuo mayor que $\frac{\pi}{2}$

$$\therefore \quad \text{tg } 313\frac{\pi}{3} = \text{tg } \frac{\pi}{3}$$ *Rpta.*

Ejemplo 6 : Reducir al primer cuadrante: $\sec 235\frac{\pi}{4}$

Resolución:

- De igual manera que el ejemplo anterior; procedemos de la manera siguiente: $235\frac{\pi}{4} \;\big|\; 2\pi$

- Convertimos "2π" a cuartos. $2\pi = 4\left(\frac{2\pi}{4}\right) = 8\frac{\pi}{4}$ Luego: $235\frac{\pi}{4} \;\big|\; 8\frac{\pi}{4}$

Ahora, nos olvidamos por un momento de $\pi/4$ y efectuamos la división, como si se tratara de una división cualquiera; veamos:

$$\begin{array}{r|l} 235 & 8 \\ \underline{16} & 29 \\ 75 & \\ \underline{72} & \\ \boxed{3} & \end{array}$$

Residuo — 3

- Al residuo hallado o sea 3; lo multiplico por $\pi/4$; siendo al final de la siguiente forma.

$$\begin{array}{r|l} 235\frac{\pi}{4} & 8\frac{\pi}{4} \\ 16 & 29 \\ 75 & \\ 72 & \\ \boxed{3\frac{\pi}{4}} & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \sec 235\frac{\pi}{4} = \sec\boxed{\frac{3\pi}{4}}$$

Residuo — $3\frac{\pi}{4}$

Residuo Mayor que $\frac{\pi}{2}$

- Aplicando el primer caso de reducción al primer cuadrante, obtenemos:

$$\sec 235\frac{\pi}{4} = \sec\frac{3\pi}{4} = \sec\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sec\frac{\pi}{4} \qquad \therefore \sec 235\frac{\pi}{4} = -\sec\frac{\pi}{4}$$ ***Rtpa.***

TALLER DE EJERCICIOS Nº 20

A. Reducir al primer cuadrante:

Ejercicio **1** : tg 7 789°

Resolución:

Rpta. tg 49°

Ejercicio **2** : sen 5 620°

Resolución:

Rpta. -sen 40°

Ejercicio **3** : cosec 1 240°

Resolución:

Rpta. cosec 20°

Ejercicio **4** : sen $\frac{556\pi}{11}$

Resolución:

Rpta. 5π

Ejercicio 5 : tg $\frac{784\pi}{17}$ ***Resolución:*** ***Rpta.*** tg $\frac{2\pi}{17}$	**Ejercicio 6** : cosec $\frac{242\pi}{3}$ ***Resolución:*** ***Rpta.*** cosec $\frac{\pi}{3}$

TERCER CASO:

Reducción para ángulos negativos:

Cuando el ángulo es negativo se siguen los siguientes pasos:

1. Función trigonométrica de ángulo negativo, se convierte a función trigonométrica de ángulo positivo, como se observa en la siguiente tabla.

2. Se aplican las reglas anteriores.

$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha$

$\text{cotg}(-\alpha) = -\text{cotg}\,\alpha$

$\sec(-\alpha) = \sec\alpha$

$\text{cosec}(-\alpha) = -\text{cosec}\,\alpha$

Ejemplo 1 : Reducir al primer cuadrante: sen (-210°)

Resolución:

La F.T. del ángulo negativo, lo convertimos a F.T. de ángulo positivo veamos la tabla.

$\text{sen}(-210°) = -[\text{sen}\,\underline{210°}]$ → $\in$ al Q_3

$\text{sen}(-210°) = -[\text{sen}(180° + 30°)] = -(-\text{sen}\,30°)$

$\therefore\ \text{sen}(-210°) = +\text{sen}\,30° = \frac{1}{2}$

Ejemplo 2 : Reducir al primer cuadrante: cotg (-252°)

Resolución:

Sabemos que:

$\text{cotg}(-252°) = -\text{cotg}\,\underline{252°}$ → $\in$ al Q_3

$\text{cotg}(-252°) = -[\text{cotg}(180° + 72°)] = -[\text{cotg}\,72°]$

$\therefore\ \text{cotg}(-252°) = -\text{cotg}\,72°$

Ejemplo 3 : Reducir al primer cuadrante: tg (-1 458°)

Resolución:

Sabemos que: $\text{tg}(-1\,458°) = -\text{tg}(1\,458°)$ ...(I)

Dividimos 1 458° entre 360°

$$\begin{array}{r|l} 1\,458° & 360° \\ \underline{1\,440°} & 4 \\ 18° & \end{array}$$

Donde: $\text{tg}(1\,458°) = \text{tg}\,18°$ ...(II)

Reemplazamos (II) en (I):

$\text{tg}(-1\,458°) = -\text{tg}\,18°$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 21

A. Reducir al primer cuadrante:

Ejercicio 1 : sec (-1 260°)

Resolución:

Rpta. -1

Ejercicio 2 : tg (-750°)

Resolución:

Rpta. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ejercicio 3 : sen (-7 530°)

Resolución:

Rpta. $\frac{1}{2}$

Ejercicio 4 : $\text{tg}\left(\frac{-335\pi}{8}\right)$

Resolución:

Rpta. $\text{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Ejercicio 5 : $\text{cotg}\left(\frac{-223\pi}{13}\right)$

Resolución:

Rpta. $-\text{cotg}\left(\frac{2\pi}{13}\right)$

Ejercicio 6 : $\cos\left(-\frac{6\pi}{5}\right)$

Resolución:

Rpta. $-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE TIPO I.B.M.

Ejercicio 1: Simplificar: $R = \dfrac{\text{tg }(\pi + x)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right)}{\text{cotg }(270° + x)\text{ sen }(360° - x)}$

A) 1 B) -1 C) 0 D) 2 E) Ninguna

Resolución:

La expresión dada se puede escribir así: $R = \dfrac{\text{tg }(180° + x)\cos(270° - x)}{\text{cotg }(270° + x)\text{ sen }(360° - x)}$ ...(I)

Sabemos que:

$\text{tg }(180° + x) = \text{tg } x$; $\cos(270° - x) = -\text{sen } x$

$\text{cotg }(270° + x) = -\text{tg } x$; $\text{sen }(360° - x) = -\text{sen } x$

Reemplazando valores en (I): $R = \dfrac{(\text{tg } x)(-\text{sen } x)}{(-\text{tg } x)(-\text{sen } x)} = \dfrac{-1}{1} = -1$ **Rpta. B**

Ejercicio 2: Simplificar: $E = \dfrac{\text{cotg }(360° - A) - \text{tg }(450° - A)}{\text{tg }(270° + A) + \text{cotg }(180° - A)}$

A) 1 B) -1 C) 0 D) 2 E) Ninguna

Resolución:

Sabemos que:

$\text{cotg }(360° - A) = -\text{cotg } A$; $\text{tg }(270° + A) = -\text{cotg } A$

$\text{cotg }(180° - A) = -\text{cotg } A$; $\text{tg }(450° - A) = \text{tg }(90° - A) = \text{cotg } A$

450° | 360°
Residuo = 90° | 1

Reemplazando valores obtenemos:

$\therefore \quad E = \dfrac{(-\text{cotg } A) - (\text{cotg } A)}{(-\text{cotg } A) + (-\text{cotg } A)} = \dfrac{-2\text{ cotg } A}{-2\text{ cotg } A} = 1$ **Rpta. A**

Ejercicio (3) : Hallar el valor numérico de: $M = 3\ \text{tg}^2\ 300° - 6 \cos^2 240° + \cos(-360°)$

A) 6 B) 10 C) $\frac{17}{2}$ D) $\frac{15}{2}$ E) Ninguna

Resolución:

Sabemos que:

$$\text{tg}\ 300° = \text{tg}\ (360° - 60°) = -\text{tg}\ 60° = -\sqrt{3}$$
$$\cos 240° = \cos(180° + 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$
$$\cos(-360°) = \cos 360° = 1$$

Reemplazando valores en "M": $M = 3\left(-\sqrt{3}\right)^2 - 6\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (1)$

$$\therefore\ M = 3(3) - 6\left(\frac{1}{4}\right) + (1) = 10 - \frac{3}{2} = \frac{17}{2}$$

Rpta. C

Ejercicio (4) : Hallar el valor de: $R = (b - a)\ \text{cotg}\ 225° + b \cos 180° - a\ \text{sen}\ (-270°)$

A) 2b B) -2b C) 2a D) -2a E) Ninguna

Resolución:

Sabemos que:

$$\text{cotg}\ (225°) = \text{cotg}\ (180° + 45°) = 1$$
$$\cos 180° = -1$$
$$\text{sen}\ (-270°) = -\text{sen}\ 270° = -(-1) = 1$$

Reemplazamos valores en "R" $R = (b - a)(1) + b(-1) - a(1)$

$\therefore$

$$R = b - a - b - a = -2a$$

Rpta. D

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

NIVEL I

Ejercicio 1: Simplificar:

$$R=\frac{\text{sen }8360°-x)+\cos(270°-x)}{-\text{sen}(180°-x)}$$

A) 2 B) -2 C) 1 D) 0 E) N.A.

Ejercicio 2: Simplificar:

$$E=\frac{\text{tg}(540°-A)\cdot\text{cotg}(360°+A)}{\cos(180°+A)+2\ \text{sen}(90°+A)}$$

A) sec A B) -sec A C) 1/2
D) -1 E) N.A.

Ejercicio 3: Hallar el valor numérico de:

$$M = 2\cos 360° - 3\ \text{tg}\ 135° + \text{cotg}\ 225°$$

A) 0 B) 6 C) 4 D) 2 E) N.A.

Ejercicio 4: Hallar el valor numérico de:

$$P = 3\ \text{sen}\ 150° + 2\ \text{tg}(-135°) + \text{cosec}(-90°)$$

A) 5/2 B) -1/2 C) 1/2 D) -1 E) N.A.

Ejercicio 5: Hallar el valor numérico de:

$$Q = (a+b)\ \text{tg}\ 225° - 2a\ \text{sen}(-270°) + (a-b)\cos 180°$$

A) b - a B) 2b - a C) 2 (b - a)
D) 2a - b E) N.A.

Ejercicio 6: Al simplificar la expresión: se obtiene:

$$M=\frac{\text{sen}(180°+x)}{\text{sen}(-x)}-\frac{\cos(90°+x)}{\text{sen}x}+\frac{\text{tg}(360°-x)}{\text{cotg}(90°-x)}$$

A) -3 B) -1 C) 0 D) 1 E) 3

Clave de Respuestas

1. A	2. B	3. B	4. A	5. C	6.D

NIVEL II

Ejercicio 1: Reducir y calcular:

$$E = \text{sen}\ 150°\ .\ \cos 120° + \sec 150°\ .\ \text{cosec}\ 120°$$

A) 19/12 B) -19/12 C) 4/3
D) -3/4 E) -3/2

Ejercicio 2: Hallar el valor de:

$$M=\frac{\text{sen}\ 140°}{\cos 230°}-\frac{\text{tg}\ 320°}{\text{cotg}\ 130°}$$

A) 1 B) -1 C) 2 D) -2 E) 0

Ejercicio 3: Reducir la expresión:

$$Q=\frac{\text{cotg}(\pi-x)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}{\sec(x-2\pi)\ \text{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$$

A) -sen x B) -cos x C) sen x
D) cos x E) -tg x

Ejercicio 4: Cuántas de las siguientes proposiciones son verdaderas.

I. $\text{sen}(\pi + x) = \text{sen}\ x$

II. $\cos(2\pi - x) = \cos(-x)$

III. $\cot g\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = tg\ x$

IV. $\sec\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\text{cosec}\ x$

A) Ninguna **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** Todas

Ejercicio 5: Determinar el valor de:

$$E = \frac{\text{sen } 135° \cdot \cos 240° \cdot tg\ 330° \cdot \sec 300°}{\cos 120° \cdot \cot g\ 210° \cdot \text{cosec } 210° \cdot \sec 315°}$$

A) -1/6 **B)** -1/3 **C)** -1/2 **D)** 1/6 **E)** 1/2

Ejercicio 6: Calcular:

$$F = \frac{\text{sen } 150° \cdot \cos 210°}{\text{sen } 240° \cdot \cot g\ 315°}$$

A) $\sqrt{3}$ **B)** $\frac{\sqrt{3}}{8}$ **C)** $-\frac{\sqrt{3}}{8}$ **D)** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **E)** $\frac{-\sqrt{3}}{4}$

Ejercicio 7: Reducir:

$$K = \frac{\text{sen } (90°+\theta) \cdot \cos (180°-\theta) \cdot tg\ (360°-\theta)}{tg\ (180°+\theta) \cdot \cos (360°-\theta) \cos (180°+\theta)}$$

A) 1 **B)** -1 **C)** tg θ **D)** cos θ **E)** sen θ

Ejercicio 8: Reducir:

$$M = \frac{\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos (x - \pi)}{tg\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) + \cot g\ (2\pi - x)}$$

A) cos x **B)** tg x **C)** - sec x
D) - sen x **E)** sen x

Ejercicio 9: Marque lo incorrecto

A) cos (-60°) = 0,5
B) tg (-135°) = 1
C) sec (-170°) = sec 10°
D) cosec (-35°) = -cosec 35°
E) cotg (-57°) = -tg 33°

Ejercicio 10: Calcular:

$$R = \text{sen } 150° \ .\ \cos 210° \ .\ tg\ 225° \ .\ \sec 300°$$

A) $\sqrt{3}$ **B)** $2\sqrt{3}$ **C)** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **D)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **E)** $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

Clave de Respuestas

1. B	2. D	3. D	4. C	5. D
6. C	7. B	8. D	9. C	10. E

NIVEL III

Ejercicio 1: Dadas las columnas:

I)	sen 205°	a) - cos 65°
II)	cos 335°	b) sen 65°
III)	tg 531°	c) cotg 81°
IV)	cotg (-99°)	d) - tg 9°

La relación correcta entre ellas es:

A) I a; II b; III c; IV d **B)** I a; II b; III d; IV c
C) I b; II a; III c; IV d **D)** I b; II a, III d; IV c
E) Ninguna anterior

Ejercicio 2: Calcular el valor de:

$$M = 2\ \text{sen}^2 (\pi + \alpha) + 2\ \text{sen}^2\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$$

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 1 **E)** 0,5

Ejercicio 3: Calcular el valor de:

$$Q = \frac{\cot g^2 (-570°) - \text{sen } (-1\ 043°)}{2\ tg\ (-1\ 125°)}$$

A) 1,2 **B)** 0,5 **C)** -1,2 **D)** 1,8 **E)** -1,9

Ejercicio : Si: $\text{tg}\ \alpha = -\sqrt{5}$; Calcular:

$$F = \frac{\text{sen}\ (\pi+\alpha)\cdot \text{tg}\ (\pi-\alpha)\cdot \sec\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot \text{cotg}\ (2\pi-\alpha)\cdot \text{cosec}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$$

A) 5 **B)** -2 **C)** $\sqrt{5}$ **D)** $-\sqrt{5}$ **E)** 2

Ejercicio : Simplificar:

$$M = \frac{\text{sen}\ 134°\cdot \text{sen}\ 170°}{\cos\ 100°} + \frac{\cos\ 136°\cdot \sec\ 145°}{\text{cosec}\ 125°}$$

A) sen 46° **B)** 2 sen 46° **C)** - 2 sen 46°
D) -2 **E)** 0

Ejercicio : Calcular el valor de:

$$Q = \frac{\text{tg}\ \frac{2\pi}{3}\cdot \text{cotg}\ \frac{3\pi}{4}\cdot \text{cosec}\ \frac{5\pi}{6}}{\sec\ \frac{5\pi}{6}\cdot \cos\ \frac{2\pi}{3}\cdot \text{sen}\ \frac{3\pi}{4}}$$

A) $\sqrt{2}$ **B)** $2\sqrt{2}$ **C)** $4\sqrt{2}$ **D)** $6\sqrt{2}$ **E)** $8\sqrt{2}$

Ejercicio : Si: $\text{cosec}\ \theta\ .\ \sec x = 3$; Hallar:

$$R = \frac{\text{sen}\ (180°-x)\cdot \cos\ (90°-\theta)\cdot \cos\ x}{\text{sen}\ (180°-\theta)\cdot \cos\ (90°-x)\cdot \sec\ (90°-\theta)}$$

A) 1/3 **B)** 3 **C)** 1/9 **D)** 9 **E)** 1/2

Ejercicio : Reducir y calcular:

$$y = \frac{\text{cosec}\ 1\,050°\cdot \sec\ (-683°)}{\sqrt{3}\ \cos\ (-390°) - \text{tg}\ 315°}$$

A) 0 **B)** 1 **C)** -1 **D)** 2 **E)** $-\frac{-\sqrt{3}}{3}$

Ejercicio : Si: $\text{tg}\ \alpha = \sqrt{2}$; Calcular:

$$E = \frac{\text{sen}\ (\pi+a) + \cos\left(\frac{3\pi}{2}-a\right)}{\sec\ (2\pi-a) - \text{cosec}\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)}$$

A) 3 **B)** $\sqrt{2}$ **C)** $-\sqrt{2}$ **D)** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **E)** $\frac{-\sqrt{2}}{3}$

Ejercicio 10 : Calcular el valor de:

$$P = \text{sen}\ 805\ \frac{\pi}{6} + \cos\ 317\ \frac{\pi}{3} + \text{tg}\ 625\ \frac{\pi}{4}$$

A) 1 **B)** 2 **C)** 0 **D)** -2 **E)** -1

Ejercicio 11 : Reducir:

$$K = \frac{\text{Vers}\ 520° - \text{Vers}\ 700°}{\text{cov}\ (-740°) - \text{cov}\ (-560°)}$$

A) cotg 20° **B)** - cotg 20° **C)** 0
D) tg 20° **E)** - tg 20°

Ejercicio 12 : Calcular el valor de:

$$E = \frac{\text{sen}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cdot \cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}{\sec\ (\alpha-\pi)\cdot \text{cosec}\ (\alpha-2\pi)}$$

Siendo: $\alpha = \pi/6$

A) 3/8 **B)** -3/8 **C)** 3/16 **D)** - 3/16 **E)** -3/4

Ejercicio 13 : Si: α y β son complementarios. Calcular el valor de:

$$M = \frac{\cos\ \alpha\cdot \sec\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\cdot \text{sen}\ \beta}{\text{tg}\ \alpha\cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot \text{tg}\ \beta}$$

A) $\cos^2\alpha$ **B)** sen β **C)** tg α **D)** tg β **E)** 1

Clave de Respuestas

1. B	2. A	3. C	4. D	5. E
6. D	7. A	8. C	9. E	10. B
11. A	12. D	13. E		

EJERCICIOS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Organizados por las Academias:

César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

EJERCICIO 1 : Evaluar:

$$\frac{\text{sen } 6\ 540° + \sec 7\ 590°}{\text{tg } 4\ 290°}$$

A) $\frac{-5\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{-7\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{-7}{2}$

D) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Resolución:

• En primer lugar dividimos cada uno de los ángulos entre 360°

6540° ÷ 360°: 6540° − 360° = 2940; 2940 − 2880 = 60°; cociente 18

$\text{sen } 6\ 540° = \text{sen } 60°$

$\therefore \quad \boxed{\text{sen } 6\ 540° = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

7590° ÷ 360°: 7590° − 720° = 390; 390 − 360 = 30°; cociente 21

$\sec 7\ 590° = \sec 30°$

$\therefore \quad \boxed{\sec 7\ 590° = \frac{2\sqrt{3}}{3}}$

4290° ÷ 360°: 4290° − 360° = 690; 690 − 360 = 330°; cociente 11

$\text{tg } 4290° = \text{tg } 330°$

$\text{tg } 4290° = -\text{tg } 30°$

$\therefore \quad \boxed{\text{tg } 4290° = -\frac{\sqrt{3}}{3}}$

Luego:

$$\frac{\text{sen } 6540° + \sec 7590°}{\text{tg } 4290°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{7\sqrt{3}}{6}}{\frac{-\sqrt{3}}{3}}$$

$$\therefore \quad = \boxed{\frac{-7}{2}}$$ **Rpta. C**

EJERCICIO 2 : Hallar el valor de "α" tal que:

$$\text{sen}\left(\text{sen}^2\theta\right) + \text{sen}\,(\pi + \text{sen}\ \alpha) = 0 \quad \text{...(I)}$$

$$\text{sen}\left(\cos^2\theta\right) = \cos\frac{1}{2}\,(\pi - 2\ \text{sen}\ \alpha) \quad \text{...(II)}$$

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{4}$

D) π E) $\frac{\pi}{2}$

Resolución:

• La expresión (I) se puede escribir de la manera siguiente: $\text{sen}\left(\text{sen}^2\theta\right) - \text{sen}\,(\text{sen}\ \alpha) = 0$

donde: $\text{sen}\left(\text{sen}^2\theta\right) = \text{sen}\,(\text{sen}\ \alpha)$

$\therefore \quad \boxed{\text{sen}^2\theta = \text{sen}\ \alpha}$ ...(I)

Recuerda que:

$\boxed{\text{sen}\,(\pi + \theta) = -\text{sen}\ \theta}$

• La expresión (II); se puede escribir de la manera siguiente: $\text{sen}\left(\cos^2\theta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\text{sen}\ \alpha\right)$

Por propiedad: $\left(\cos^2\theta\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\text{sen}\ \alpha\right) = 90^\circ \Rightarrow \therefore\ \cos^2\theta = \text{sen}\ \alpha$ ...(II)

Luego sumamos miembro a miembro (I) y (II):

$$\underbrace{\text{sen}^2\theta+\cos^2\theta}_{1} = (\text{sen}\ \alpha)+(\text{sen}\ \alpha)$$

$$1 = 2\ \text{sen}\ \alpha \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = \frac{1}{2} = \text{sen}\ 30^\circ$$

$$\text{sen}\ \alpha = \text{sen}\ \frac{\pi}{6}$$

Por comparación: $\alpha = \frac{\pi}{6}$ **Rpta. A**

Ejercicio 3 : Calcular el valor de:

$$K = \frac{\text{sen}\ (2\pi-x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}+\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\cos\ (2\pi-x)}$$

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** -2 **E)** -1

Resolución:

Sabemos que:

$\text{sen}\ (2\pi-x) = -\text{sen}\ x$; $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos\ x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\text{sen}\ x$; $\cos\ (2\pi-x) = \cos\ x$

Luego: $K = \frac{-\text{sen}\ x}{-\text{sen}\ x}+\frac{\cos\ x}{\cos\ x} = 1+1 = 2 \Rightarrow \therefore\ K = 2$ **Rpta. C**

Ejercicio 4 : Simplificar:

$$R = \frac{\text{sen}\ 40^\circ-\text{sen}\ 220^\circ-\text{sen}\ 320^\circ}{\text{sen}\ 130^\circ+\text{sen}\ 230^\circ-\text{sen}\ 310^\circ}$$

A) 2 tg 40° **B)** 2 tg 50° **C)** 3 tg 50° **D)** 3 tg 60° **E)** 3 tg 40°

Resolución:

Sabemos que:

sen 220° = sen (180° + 40°) = -sen 40° ; sen 320° = sen (360° - 40°) = -sen 40°
sen 130° = sen (180°- 50°) = sen 50° ; sen 230° = sen (180° +50°) = -sen 50°
sen 310° = sen (360° - 50°) = -sen 50°

Luego: $R = \dfrac{\text{sen } 40° - (-\text{sen } 40°) - (-\text{sen } 40°)}{(\text{sen } 50°) + (-\text{sen } 50°) - (-\text{sen } 50°)} = \dfrac{3 \text{ sen } 40°}{\text{sen } 50°}$

$R = \dfrac{3 \text{ sen } 40°}{\cos 40°} \Rightarrow \therefore \boxed{R = 3 \text{ tg } 40°}$ **Rpta. E**

EJERCICIO 5 : Sumar:

$\text{sen}^2 20° + \text{sen}^2 73° + \text{sen}^2 110° + \text{sen}^2 163°$

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** -1 **E)** 3

Resolución:

Sabemos que:

$\text{sen } 110° = \text{sen } (180° - 70°)$ | $\text{sen } 163° = \text{sen } (180° - 17°)$

$\text{sen } 110° = \text{sen } 70°$ | $\text{sen } 163° = \text{sen } 17°$

$\therefore \text{sen}^2 110° = \text{sen}^2 70°$ | $\therefore \text{sen}^2 163° = \text{sen}^2 17°$

Luego: $\text{sen}^2 20° + \text{sen}^2 73° + \underbrace{\text{sen}^2 70°} + \underbrace{\text{sen}^2 17°}$; ***Por cofunción:***

$\text{sen}^2 20° + \text{sen}^2 73° + \cos^2 20° + \cos^2 73°$

$\text{sen } 70° = \cos 20°$

$\text{sen } 17° = \cos 73°$

Agrupamos términos: $\underbrace{(\text{sen}^2 20° + \cos^2 20°)}_{1} + \underbrace{(\text{sen}^2 73° + \cos^2 73°)}_{1} = \boxed{2}$ **Rpta. C**

EJERCICIO 6 : Efectuar:

$\text{sen } \theta \cdot \cos \theta \cdot \left[\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot \text{cosec } \theta + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) \sec \theta\right]$

A) 1 **B)** 2 **C)** sen θ **D)** cos θ **E)** - sen θ

Resolución:

Sabemos que: $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$; $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{sen } \theta$

Luego: $\text{sen } \theta \cdot \cos \theta \cdot [\cos \theta . \text{cosec } \theta + \text{sen } \theta \cdot \sec \theta]$

$\text{sen } \theta \cdot \cos \theta \cdot \left[\cos \theta \cdot \dfrac{1}{\text{sen } \theta} + \text{sen } \theta \cdot \dfrac{1}{\cos \theta}\right]$

$\text{sen } \theta \cdot \cos \theta \cdot \left[\dfrac{\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta}{\text{sen } \theta \cdot \cos \theta}\right] = \text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = \boxed{1}$ **Rpta. A**

EJERCICIO 7 : Simplificar:

$$R=\frac{a^2 \text{sen } 810^\circ - 4\ ab\ \text{sen } 390^\circ \cos 540^\circ - b^2 \text{cosec } 630^\circ}{b\ \text{tg}^2\ 1140^\circ - 9a\ \sec 900^\circ\ \text{tg}^2\ 1470^\circ}$$

A) $a+\frac{b}{3}$ B) $\frac{(a+b)}{3}$ C) $a-\frac{b}{3}$ D) $\frac{(a-b)}{3}$ E) $\frac{a}{b}$

Resolución:

Sabemos que:

sen 810°	=	sen [2 (360°) + 90°]	=	sen 90°	=	1
sen 390°	=	sen (360° + 30°)	=	sen 30°	=	$\frac{1}{2}$
cos 540°	=	cos (360° + 180°)	=	cos 180°	=	-1
cosec 630°	=	cosec (360° + 270°)	=	cosec 270°	=	-1
tg 1140°	=	tg [3 (360°) + 60°]	=	tg 60°	=	$\sqrt{3}$
sec 900°	=	sec [2 (360°) + 180°]	=	sec 180°	=	-1
tg 1470	=	tg [4 (360°) + 30°]	=	tg 30°	=	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Luego: $$R=\frac{a^2(1)-4\ ab\left(\frac{1}{2}\right)\cdot(-1)-b^2(-1)}{b\left(\sqrt{3}\right)^2-9a\ (-1)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{a^2+2\ ab+b^2}{3b+3a}=\frac{(a+b)^2}{3\ (a+b)} \Rightarrow \therefore R=\frac{(a+b)}{3}$$

Rpta. B

EJERCICIO 8 : Calcular: $F = \sec\frac{235}{3}\pi\ \text{cosec}\ \frac{629}{6}\pi$ A) -1 B) 1 C) 2 D) 2 E) 4

Resolución:

235 π/3 | 2 π = 6 (π/3)

$235 \div 6$: 235 − 18 → 55 − 54 → residuo 1, cociente 39 = $235\ \pi/3 \div 6\ (\pi/3)$: cociente 39, residuo $1\ \pi/3$

$\therefore$ sec 235 π/3 = sec 1π/3 = sec 60° = 2

629 π/6 | 2 π = 12 (π/6)

$629 \div 12$: 629 − 60 → 29 − 24 → residuo 5, cociente 52 = $629\ \pi/6 \div 12\ (\pi/6)$: cociente 52, residuo $5\ \pi/6$

$\therefore$ cosec 629 π/6 = cosec (5π/6) = 2

$$F = \sec 235\ \frac{\pi}{3}\cdot \text{cosec}\ 629\ \frac{\pi}{6} = 2\cdot 2 \Rightarrow \therefore F=4$$ **Rpta. E**

EJERCICIO 9 : Si: sen 2000° = K;

Hallar: cos 560°

A) $\sqrt{1-k^2}$ B) $\sqrt{k^2-1}$ C) $-\sqrt{1-k^2}$

D) $-\sqrt{k^2-1}$ E) $\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$

Resolución:

*) $\begin{array}{r|l} 2000° & 360° \\ 1800 & 5 \\ \boxed{200} & \end{array}$

$\underbrace{\text{sen } 2000°}_{K} = \text{sen } 200°$

K = sen (180° + 20°)

K = -sen 20°

$\therefore$ $\boxed{-K = \text{sen } 20°}$ ...(I)

**) $\begin{array}{r|l} 560° & 360° \\ 360 & 1 \\ \boxed{200} & \end{array}$

cos 560° = cos 200°

cos 560° = cos (180° + 20°)

$\therefore$ $\boxed{\cos 560° = -\cos 20°}$ ...(II)

Por identidad pitagórica: $\cos\theta = \pm\sqrt{1-\text{sen}^2\theta}$

Obtenemos que: $\cos 20° = \sqrt{1-\text{sen}^2 20°}$ ... (III)

Reemplazamos (I) en (II): $\cos 20° = \sqrt{1-(-k)^2} = \sqrt{1-k^2}$ ...(IV)

Reemplazamos (IV) en (II): $\cos 560° = -\cos 20° = -\sqrt{1-k^2}$

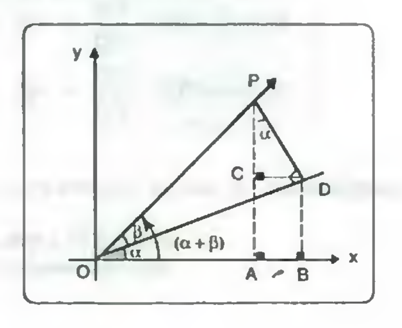
$\therefore$ $\cos 560° = -\sqrt{1-k^2}$ **Rpta. C**

6.3 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPUESTOS

6.3.1 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA DE DOS ÁNGULOS:

Sean los ángulos agudos α y β, desde un punto cualquiera P, del lado terminal del ángulo β, tracemos $\overline{PA}$ perpendicular al Eje x, $\overline{PD}$ perpendicular al lado terminal del ángulo α.

Por D tracemos $\overline{DC}$ paralelo al eje x y $\overline{DB}$ perpendicular a dicho eje x de la figura:



- En el ◿OAP: $\text{sen}(\alpha+\beta) = \frac{AP}{OP} = \frac{AC+CP}{OP}$

Pero: $AC = BD$ Luego: $\text{sen}(\alpha+\beta) = \dfrac{BD+CP}{OP} = \dfrac{BD}{OP} + \dfrac{CP}{OP}$

Multiplicamos cada término por OD *Multiplicamos cada término por PD*

$$\text{sen}(\alpha+\beta) = \frac{BD}{OD}\cdot\frac{OD}{OP} + \frac{CP}{PD}\cdot\frac{PD}{OP} \quad \ldots(I)$$

- En el $\triangle$ OBD: $\dfrac{BD}{OD} = \text{sen}\,\alpha$	- En el $\triangle$ODP: $\dfrac{OD}{OP} = \cos\beta$
- En el $\triangle$ PCD: $\dfrac{CP}{PD} = \cos\alpha$	- En el $\triangle$ ODP: $\dfrac{PD}{OP} = \text{sen}\,\beta$

Reemplazamos los valores hallados en (I):

$$\therefore \quad \text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta \quad \textit{(Fórmula)}$$

De la figura obtenemos que: en el $\triangle$ OAP: $\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{OA}{OP} = \dfrac{OB-AB}{OP}$; Pero : $AB = CD$

Luego: $\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{OB-CD}{OP} = \dfrac{OB}{OP} - \dfrac{CD}{OP}$

Multiplicamos cada término por OD *Multiplicamos cada término por PD*

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{OB}{OD}\cdot\frac{OD}{OP} - \frac{CD}{PD}\cdot\frac{PD}{OP} \quad \ldots(II)$$

- En el $\triangle$ OBD: $\dfrac{OB}{OD} = \cos\alpha$	- En el $\triangle$ODP: $\dfrac{OD}{OP} = \cos\beta$
- En el $\triangle$ PCD: $\dfrac{CD}{PD} = \text{sen}\,\alpha$	- En el $\triangle$ ODP: $\dfrac{PD}{OP} = \text{sen}\,\beta$

Reemplazamos los valores, hallados en (II):

$$\therefore \quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta \quad \textit{(Fórmula)}$$

6.3.2 TANGENTE DE LA SUMA DE DOS ÁNGULOS:

Sabemos que:

$$\text{sen}(\alpha+\beta)=\text{sen}\,\alpha\cos\beta+\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

Dividiendo miembro a miembro, obtenemos: $\dfrac{\text{sen}\,(\alpha+\beta)}{\cos\,(\alpha+\beta))}=\dfrac{\text{sen}\,\alpha\,\cos\beta+\cos\alpha\,\text{son}\,\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta-\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}$

Dividimos el numerador y denominador del segundo miembro entro "cos α cos β"

$$\frac{\text{sen}\,(\alpha+\beta)}{\cos\,(\alpha+\beta)}=\frac{\left(\dfrac{\text{sen}\,\alpha\,\cos\beta+\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta}\right)}{\left(\dfrac{\cos\alpha\,\cos\beta-\text{son}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta}\right)}$$

$$\frac{\text{sen}\,(\alpha+\beta)}{\cos\,(\alpha+\beta)}=\frac{\left(\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}\dfrac{\cos\beta}{\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha}\dfrac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta}\right)}{\left(\dfrac{\cos\alpha\,\cos\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta}-\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}\dfrac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta}\right)}$$

(Fórmula)

$$\therefore\ \text{tg}\,(\alpha+\beta)=\frac{\text{tg}\,\alpha+\text{tg}\,\beta}{1-\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta}$$

6.3.3 COTANGENTE DE LA SUMA DE DOS ÁNGULOS:

Sabemos que:

$$\text{sen}(\alpha+\beta)=\text{sen}\,\alpha\cos\beta+\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

Dividiendo miembro a miembro obtenemos: $\dfrac{\cos\,(\alpha+\beta)}{\text{sen}\,(\alpha+\beta)}=\dfrac{\cos\alpha\,\cos\beta-\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\alpha\,\cos\beta+\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta}$

Dividimos el numerador y denominador del segundo miembro entro "sen α sen β"

$$\frac{\cos\,(\alpha+\beta)}{\text{sen}\,(\alpha+\beta)}=\frac{\left(\dfrac{\cos\alpha\,\cos\beta-\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}\right)}{\left(\dfrac{\text{sen}\,\alpha\,\cos\beta+\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}\right)}$$

$$\frac{\cos\,(\alpha+\beta)}{\text{sen}\,(\alpha+\beta)}=\frac{\left(\dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}\dfrac{\cos\beta}{\text{sen}\,\beta}-\dfrac{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}\right)}{\left(\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\alpha}\dfrac{\cos\beta}{\text{sen}\,\beta}+\dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}\dfrac{\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\beta}\right)}$$

(Fórmula)

$$\therefore\ \text{cotg}\,(\alpha+\beta)=\frac{\text{cotg}\,\alpha\cdot\text{cotg}\,\beta-1}{\text{cotg}\,\beta+\text{cotg}\,\alpha}$$

6.3.4 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS:

Si en las fórmulas de sen $(\alpha + \beta)$ y cos $(\alpha + \beta)$, hacemos: $\beta = -\beta$ tenemos:

a) $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}[\alpha + (-\beta)] = \text{sen}\,\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\,\text{sen}(-\beta)$

Recordemos que: $\cos(-\beta) = \cos\beta$ y $\text{sen}(-\beta) = -\text{sen}\,\beta$

Luego: $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha(-\text{sen}\,\beta)$

$\therefore$ $\boxed{\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta}$ ***(Fórmula)***

b) $\cos(\alpha - \beta) = \cos[\alpha + (-\beta) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}(-\beta)$

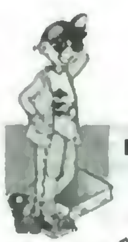
$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha(-\text{sen}\,\beta)$

$\therefore$ $\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}$ ***(Fórmula)***

c) Tangente de la diferencia de dos ángulos:

$$\therefore \quad \boxed{\text{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}{1+\text{tg}\,\alpha\;\text{tg}\,\beta}}$$ ***(Fórmula)***

d) Cotangente de la diferencia de dos ángulos:



$$\therefore \quad \boxed{\text{cotg}(\alpha-\beta) = \frac{\text{cotg}\,\alpha\cdot\text{cotg}\,\beta+1}{\text{cotg}\,\beta-\text{cotg}\,\alpha}}$$ ***(Fórmula)***

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPUESTOS TIPO I.B.M.

Ejercicio (1): Calcular: sen 75°

Resolución:

Sabemos que: 75° = (45° + 30°), ahora, tomamos "sen" a ambos miembros:

$$\text{sen}\,75° = \text{sen}(45°+30°)$$

$$\text{sen}\,75° = \text{sen}\,45°\cos 30° + \cos 45°\,\text{sen}\,30° \Rightarrow \text{sen}\,75° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\text{sen}\,75° = \frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \therefore \boxed{\text{sen}\,75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$ **Rpta.**

Ejercicio 2: Calcular : cos 105°

Resolución:

Sabemos que: 105° = (60° + 45°), ahora, tomamos "cos" a ambos miembros:

$$\cos 105° = \cos(60°+45°)$$

$$\cos 105° = \cos 60° \cos 45° - \text{sen } 60° \text{ sen } 45° \Rightarrow \cos 105° = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 105° = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \quad \therefore \quad \boxed{\cos 105° = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$ **Rpta.**

Ejercicio 3: Calcular: tg 82°

Resolución:

Sabemos que: 82° = (45° + 37°), ahora, tomamos "tg" a ambos miembros:

$$\text{tg } 82° = \text{tg }(45°+37°)$$

$$\text{tg } 82° = \frac{\text{tg } 45° + \text{tg } 37°}{1 - \text{tg } 45° \text{ tg } 37°} \Rightarrow \text{tg } 82° = \frac{1+\frac{3}{4}}{1-1\times\frac{3}{4}} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{1}{4}} = 7 \quad \therefore \quad \boxed{\text{tg } 82° = 7}$$

Rpta.

Ejercicio 4: Si: tg (45° + x) = 2 ; Hallar: "tg x"

Resolución:

De la condición: tg (45° + x) = 2; obtenemos:

$$\frac{\text{tg } 45° + \text{tg } x}{1 - \text{tg } 45° \text{ tg } x} = 2 \;;\quad \text{pero : tg } 45° = 1$$

$$\frac{1+\text{tg } x}{1-1\cdot\text{tg } x} = 2 \Rightarrow \frac{1+\text{tg } x}{1-\text{tg } x} = 2 \Rightarrow 1+\text{tg } x = 2\,(1-\text{tg } x)$$

$$1+\text{tg } x = 2 - 2 \text{ tg } x \Rightarrow 3 \text{ tg } x = 1 \quad \therefore \quad \boxed{\text{tg } x = \frac{1}{3}}$$ **Rpta.**

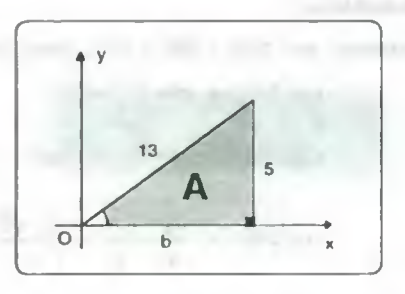
Ejercicio 5: Calcular el valor de: $\cos(A+B)$; Si : $\text{sen } A = \frac{5}{13}$ y $\cos B = \frac{4}{5}$; A y B $\in Q_1$

Resolución:

Sabemos que: cos (A + B) = cos A cos B - sen A sen B ...(I)

De la condición: $\text{sen } A = \dfrac{5}{13}$; $A \in Q_1$

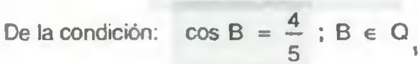
- Por el teorema de Pitágoras:



$13^2 = 5^2 + b^2 \Rightarrow 169 = 25 + b^2$

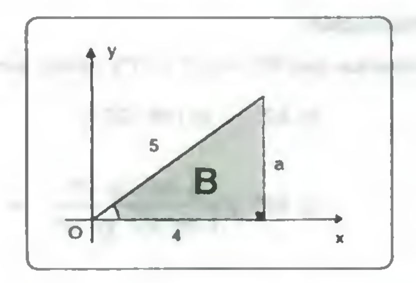
$144 = b^2 \Rightarrow \sqrt{144} = b \Rightarrow \therefore\ 12 = b$

Luego: $\cos A = \dfrac{b}{13} \Rightarrow \cos A = \dfrac{12}{13}$



De la condición: $\cos B = \dfrac{4}{5}$; $B \in Q_1$

- Por el teorema de Pitágoras:



$5^2 = a^2 + 4^2 \Rightarrow 25 = a^2 + 16$

$9 = a^2 \Rightarrow \sqrt{9} = a \Rightarrow \therefore\ 3 = a$

Luego: $\text{sen } B = \dfrac{a}{5} \Rightarrow \text{sen } B = \dfrac{3}{5}$

Reemplazando valores en (I), obtenemos:

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \text{sen } A \text{ sen } B \Rightarrow \cos(A+B) = \frac{12}{13}\cdot\frac{4}{5} - \frac{5}{13}\cdot\frac{3}{5}$$

$$\cos(A+B) = \frac{48}{65} - \frac{15}{65} = \frac{48-15}{65} = \frac{33}{65} \Rightarrow \therefore\ \cos(A+B) = \frac{33}{65}$$ **Rpta.**

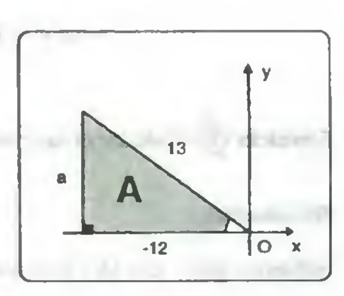
Ejercicio 6: Calcular: $\cos(A-B)$ Si: $\cos A = -\dfrac{12}{13}$; $A \in Q_2$ y $\text{cotg } B = \dfrac{5}{12}$, $B \in Q_3$

Resolución:

Sabemos que: $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \text{sen } A \text{ sen } B$ ...(I)

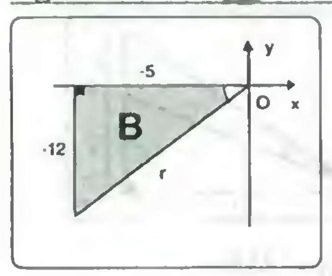
De la condición: $\cos A = -\dfrac{12}{13}$; $A \in Q_2$

- Por el teorema de Pitágoras:



$13^2 = (-12)^2 + a^2 \Rightarrow 169 = 144 + a^2$

$25 = a^2 \Rightarrow \sqrt{25} = a \Rightarrow \therefore\ 5 = a$



Luego: $\text{sen } A = \frac{a}{13} \Rightarrow \text{sen } A = \frac{5}{13}$

De la condición: $\text{cotg } B = \frac{5}{12}$; $B \in Q_3$

Por el teorema de Pitágoras: $r^2 = (-5)^2 + (-12)^2$

$r^2 = 25 + 144 \Rightarrow r^2 = 169$

$r = \sqrt{169} \Rightarrow \therefore\ r = 13$

Luego: $\text{sen } B = \frac{-12}{r} \Rightarrow \text{sen } B = \frac{-12}{13}$; $\cos B = \frac{-5}{r} \Rightarrow \cos B = \frac{-5}{13}$

Reemplazando valores en (I); obtenemos:

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \text{sen } A \text{ sen } B$$

$$\cos(A-B) = \left(\frac{-12}{13}\right)\left(\frac{-5}{13}\right) + \left(\frac{5}{13}\right)\left(\frac{-12}{13}\right)$$

$$\cos(A-B) = \frac{60}{169} - \frac{60}{169} = 0 \Rightarrow \therefore\ \cos(A-B) = \text{Cero}$$ **Rpta.**

Ejercicio 7: Se sabe que: $\text{tg}(A-B) = \frac{1}{3}$; $\text{tg}(B-C) = \frac{1}{5}$. Hallar el valor de: tg (A - C)

Resolución:

De la condición: $\text{tg}(A-B) = \frac{1}{3}$; hacemos: $A - B = \alpha$ ...(I) $\qquad \text{tg } \alpha = \frac{1}{3}$ ...(1)

De la condición: $\text{tg}(B-C) =$; hacemos: $B - C = \theta$ ...(II) $\qquad \text{tg } \theta = \frac{1}{5}$ ...(2)

Sumamos miembro a miembro las expresiones (I) y (II):

$$\left.\begin{array}{l} A - B = \alpha \\ B - C = \theta \end{array}\right\} +$$

Σ M.A.M: $A - C = \alpha + \theta$; tomamos "tg" a ambos miembros:

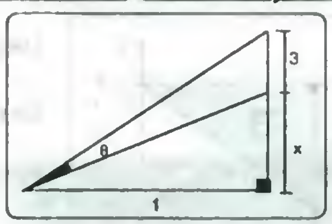
$$\text{tg}(A-C) = \text{tg}(\alpha+\theta)$$

$$\text{tg}(A-C) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \theta}{1 - \text{tg } \alpha \ \text{tg } \theta} \quad ...(III)$$

Reemplazamos (1) y (2) en (III): $\text{tg}(A-C) = \dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}} = \dfrac{\frac{5+3}{15}}{\frac{15-1}{15}} \Rightarrow \therefore\ \text{tg}(A-C) = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$

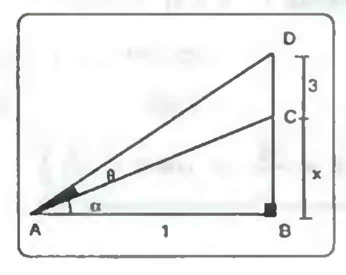
Rpta.

Ejercicio 8: En la figura, hallar "x":



Si se cumple: $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{3}{11}$

Resolución:



De la figura: $\underbrace{\operatorname{tg}(\alpha+\theta)} = \dfrac{3+x}{1}$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\theta} = (3+x)\ ;\ \text{Pero}:\ \operatorname{tg}\theta=\frac{3}{11}$$

Ademas en el $\triangle$ABC: $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{x}{1} \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\alpha = x}$

Reemplazando valores, obtenemos:

$$\frac{x+\dfrac{3}{11}}{1-x\cdot\dfrac{3}{11}} = (3+x) \Rightarrow \frac{\left(\dfrac{11x+3}{11}\right)}{\left(\dfrac{11-3x}{11}\right)} = (3+x)$$

$$(11x+3) = (3+x)(11-3x) \Rightarrow 11x+3 = 33+2x-3x^2$$

$$3x^2+9x = 30 \Rightarrow x^2+3x = 10 \text{ (Sacamos tercia a cada término)}$$

$x^2 + 3x - 10 = 0$; (factorizamos por el método del aspa)

Luego: $(x-2)(x+5)=0$; igualamos cada factor a cero

I) $x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$ (Cumple) II) $x+5=0 \Rightarrow x=-5$ (No cumple pues el segmento "x" no puede ser negativo)

TALLER DE EJERCICIOS Nº 22

A. Sin emplear tablas ni calculadora; Calcular el valor de:

Ejercicio 1 : sen 97° = ?

Resolución:

$\operatorname{sen} 97° = \operatorname{sen}(60°+37°)$

$\operatorname{sen} 97° = \operatorname{sen} 60°\cdot\cos 37° + \cos 60°\cdot\operatorname{sen} 37°$

$\operatorname{sen} 97° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{4}{5}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{5} \Rightarrow \therefore$ ***Rpta.*** $= \boxed{\dfrac{4\sqrt{3}+3}{10}}$

Ejercicio 2 : tg 8° = ?

Resolución:

Rpta. 1/7

Ejercicio 3 : cotg 75° = ?

Resolución:

Rpta. $\left(2-\sqrt{3}\right)$

Ejercicio 4 : sen 69° = ?

Resolución:

Rpta. $\frac{117}{125}$

B. Simplificar las siguientes expresiones:

Ejercicio 1 : sen (60° + α) + cos (30° + α)

Resolución:

Sabemos que:

- $\text{sen}\,(60°+\alpha)=\text{sen}\;60°\cdot\cos\alpha+\cos\;60°\cdot\text{sen}\alpha$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\;\alpha+\frac{1}{2}\cdot\text{sen}\;\alpha\;\ldots\;\text{(I)}$$

- $\cos\,(30°+\alpha)=\cos\;30°\cdot\cos\alpha-\text{sen}\;30°\cdot\text{sen}\alpha$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\;\alpha-\frac{1}{2}\cdot\text{sen}\;\alpha\;\ldots\;\text{(II)}$$

Sumamos miembro a miembro (I) y (II):

$$\text{sen}\,(60°+\alpha)+\cos\,(30°+\alpha)\;=\cancel{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cos\;\alpha\right)$$

Rpta. $=\sqrt{3}\;\cdot\;\cos\;\alpha$

Ejercicio 2 : sen (60° + α) - sen (30° + α)

Resolución:

Rpta. $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)(\cos\;\alpha-\text{sen}\;\alpha)$

Ejercicio 3 : sen (45° + α) - cos (45° + α)

Resolución:

Rpta. $\sqrt{2}\cdot\text{sen}\;\alpha$

Ejercicio 4 : cos (α + β) . cos (α – β)

Resolución:

Rpta. $\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta-\text{sen}^2\alpha\;\text{sen}^2\beta$

C. Reduzca las expresiones siguientes a un sólo término

Ejercicio 1 : sen 70° cos 10° + cos 70° sen 10°

Resolución:

sen 70° cos 10°+cos 70° . sen 10° = sen (70°+10°)

Rpta. = sen 80°

Ejercicio 2 : cos 65° . cos 25°- sen 65° . sen 25°

Resolución:

Rpta.

Ejercicio 3 : cos 9A . cos 2A + sen 9A . sen 2A

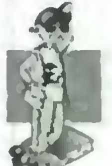
Resolución:

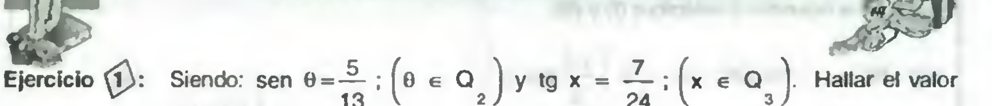
Rpta.

Ejercicio 4 : sen 48° cos 46° - cos 48° . sen 46°

Resolución:

Rpta.





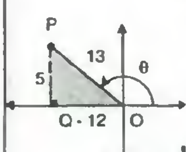
EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPUESTOS TIPO I.B.M.

Ejercicio 1: Siendo: $\text{sen}\ \theta = \dfrac{5}{13}$; $(\theta \in Q_2)$ y $\text{tg}\ x = \dfrac{7}{24}$; $(x \in Q_3)$. Hallar el valor de: cos (θ + x)

A) $\dfrac{332}{525}$ B) $\dfrac{325}{323}$ C) $\dfrac{323}{325}$ D) $\dfrac{323}{532}$ E) $\dfrac{233}{532}$

Resolución:

$\text{sen}\ \theta = \dfrac{5}{13}$; $(\theta \in Q_2)$



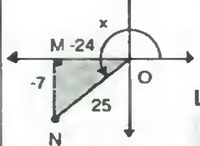
• Por el teorema de Pitágoras:

$\overline{QO}^2 = 13^2 - 5^2$

$\overline{QO}^2 = 144 \quad \therefore \quad \overline{QO} = 12$

Luego: $\cos\theta = \dfrac{-12}{13}$

$\text{tg}\ x = \dfrac{7}{24}$; $(x \in Q_3)$



• Por el teorema de Pitágoras:

$\overline{NO}^2 = 7^2 + 24^2$

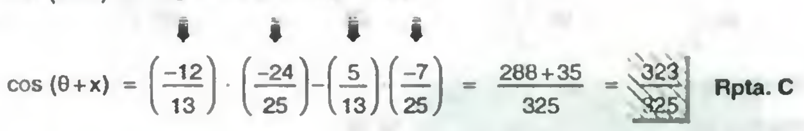
$\overline{NO}^2 = 625 \quad \therefore \quad \overline{NO} = 25$

Luego:

$\text{sen}\ x = \dfrac{-7}{25}$, $\cos x = \dfrac{-24}{25}$

• Ahora, hallamos el valor de: $\cos(\theta + x)$

$$\cos(\theta+x) = \cos\theta \cdot \cos x - \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen} x$$



$$\cos(\theta+x) = \left(\frac{-12}{13}\right)\cdot\left(\frac{-24}{25}\right)-\left(\frac{5}{13}\right)\left(\frac{-7}{25}\right) = \frac{288+35}{325} = \boxed{\frac{323}{325}}$$ **Rpta. C**

Ejercicio 2: Simplificar: $M = \operatorname{sen} 50° - 2\cos 40° \,.\, \operatorname{sen} 10°$

A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir de la manera siguiente:

$$M = \underbrace{\operatorname{sen}(40°+10°)} - 2\cos 40° \cdot \operatorname{sen} 10°$$

$$M = \operatorname{sen} 40° \cdot \cos 10° + \cos 40° \cdot \operatorname{sen} 10° - 2\cos 40° \cdot \operatorname{sen} 10°$$

$$M = \operatorname{sen} 40° \cdot \cos 10° - \cos 40° \cdot \operatorname{sen} 10° = \operatorname{sen}(40°-10°)$$

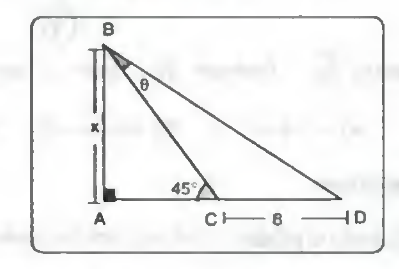
$M = \operatorname{sen} 30°$ ➡ $\therefore$ $\boxed{M = \frac{1}{2}}$ **Rpta. B**

Ejercicio 3: En la figura: Hallar "x":

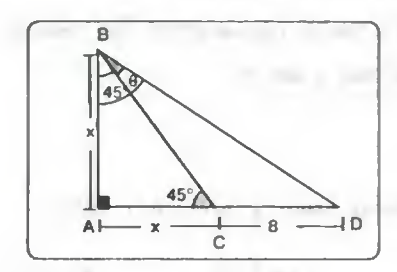
Si se cumple: $\operatorname{tg}\theta = \frac{2}{3}$

A) 1 B) 3 C) 4

D) 2 E) 5



Resolución:



En el ⊿ BAD: $\underbrace{\operatorname{tg}(45° + \theta)} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BA}} = \frac{x+8}{x}$

$$\frac{\operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg}\theta}{1 - \operatorname{tg} 45° \cdot \operatorname{tg}\theta} = \frac{x+8}{x}$$

Pero: $\operatorname{tg} 45° = 1$

Luego: $\dfrac{1+\operatorname{tg}\theta}{1-1\cdot\operatorname{tg}\theta} = \dfrac{x+8}{x} \Rightarrow \dfrac{1+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \dfrac{x+8}{x} \Rightarrow 5x = x+8$ ➡ $\therefore$ $\boxed{x = 2}$ **Rpta. D**

Ejercicio 4: Calcule el valor de : $E = \text{sen } 60° . \text{tg } 40° . (\text{tg } 70° - \text{tg } 20°)$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) 1 D) $\sqrt{3}$ E) 2

Resolución:

Sabemos que: $\underbrace{\text{tg } (70°-20°)} = \text{tg } 50°$

$$\frac{\text{tg } 70°-\text{tg } 20°}{1+\text{tg } 70° \cdot \underbrace{\text{tg } 20°}} = \text{tg } 50° \; ; \text{ pero : } \text{tg } 20° = \text{cotg } 70°$$

$$\underbrace{\frac{\text{tg } 70° - \text{tg } 20°}{1+\text{tg } 70° \cdot \text{cotg } 70°}}_{1} = \text{tg } 50° \Rightarrow \text{tg } 70°-\text{tg } 20° = 2 \text{ tg } 50° \quad ...(\text{I})$$

Reemplazamos (I) en la expresión "E"

$$E = \text{sen } 60° \cdot \text{tg } 40° [2 \underbrace{\text{tg } 50°}] \; ; \text{ pero : } \text{tg } 50° = \text{cotg } 40°$$

$$E = 2 \text{ sen } 60° \underbrace{\text{tg } 40° \cdot \text{cotg } 40°}_{1} = \not{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\not{2}}\right) = \sqrt{3} \Rightarrow \therefore \boxed{E = \sqrt{3}} \text{ Rpta. D}$$

Ejercicio 5: Reducir: $Q = (\text{sen } \alpha - \cos \alpha)(\cos \theta - \text{sen } \theta) - \text{sen } (\alpha+\theta)$

A) $-\cos(\alpha-\theta)$ B) $\cos(\alpha-\theta)$ C) $\cos(\alpha+\theta)$ D) $-\cos(\alpha+\theta)$ E) N.A.

Resolución:

Efectuando el producto indicado por los paréntesis; obtenemos:

$$Q = \text{sen } \alpha \cdot \cos \theta - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \theta - \cos \alpha \cdot \cos \theta + \cos \alpha \cdot \text{sen } \theta - \text{sen } (\alpha+\theta)$$

$$Q = \cancel{\text{sen } \alpha \cos \theta} - \text{sen } \alpha \text{ sen } \theta - \cos \alpha \cdot \cos \theta + \cancel{\cos \alpha \text{ sen } \theta} - (\cancel{\text{sen } \alpha \cos \theta} + \cancel{\cos \alpha \text{ sen } \theta})$$

$$Q = -\cos \alpha \cdot \cos \theta - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \theta = -\underbrace{(\cos \alpha \cdot \cos \theta + \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \theta)}$$

$\therefore \boxed{Q = -\cos(\alpha-\theta)}$ **Rpta. A**

Ejercicio 6: Calcular: "tg θ"; si: $\text{sen } (\alpha - \theta) = a \cos \alpha . \cos \theta$ y $\text{tg } \alpha = b(1 - \text{tg } \theta)$

A) $\frac{a+b}{a+1}$ B) $\frac{a+b}{b+1}$ C) $\frac{b-a}{a+1}$ D) $\frac{b-a}{b+1}$ E) $\frac{a+b}{a-b}$

Resolución:

De la expresión: $\underbrace{\text{sen }(\alpha-\theta)} = a \cos\alpha \cos\theta$; obtenemos:

$$\text{sen }\alpha\cdot\cos\theta-\cos\alpha\cdot\text{sen }\theta = a\cos\alpha\cdot\cos\theta$$

$$\frac{\text{sen }\alpha\cdot\cos\theta-\cos\alpha\cdot\text{sen }\theta}{\cos\alpha\cdot\cos\theta} = a$$

$$\frac{\text{sen }\alpha\cdot\cancel{\cos\theta}}{\cos\alpha\cdot\cancel{\cos\theta}}-\frac{\cancel{\cos\alpha}\cdot\text{sen }\theta}{\cancel{\cos\alpha}\cdot\cos\theta} = a$$

$$\text{tg }\alpha-\text{tg }\theta = a \Rightarrow \boxed{\text{tg }\alpha = a+\text{tg }\theta} \text{ ...(I)}$$

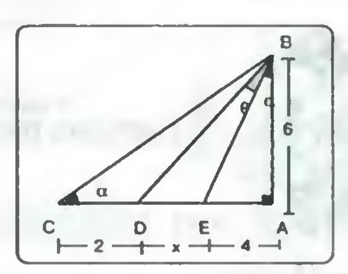
Reemplazamos (I) en la expresión:

$$\underbrace{\text{tg }\alpha} = b\,(1-\text{tg }\theta)$$

$$a+\text{tg }\theta = b-b\text{ tg }\theta \Rightarrow \text{tg }\theta+b\text{ tg }\theta = b-a$$

$$\text{tg }\theta\,(1+b) = b-a \Rightarrow \therefore \boxed{\text{tg }\theta=\frac{b-a}{1+b}}$$ **Rpta. D**

Ejercicio 7: De la figura mostrada: Calcular el valor de: $E = x^2\cdot\text{cotg }\theta$



A) 16 B) 20 C) 24

D) 28 E) 32

Resolución:

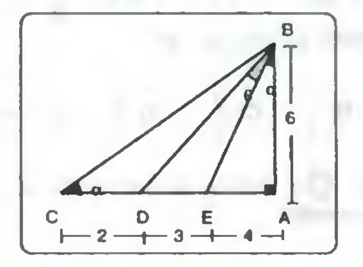
• En el ◺ BAE :

$$\text{tg }\alpha = \frac{\overline{EA}}{\overline{AB}} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{6}} \Rightarrow \therefore \boxed{\text{tg }\alpha=\frac{2}{3}} \text{ ... (I)}$$

• En el ◺CAB :

$$\text{tg }\alpha=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{6}{6+x} \Rightarrow \therefore \boxed{\text{tg }\alpha=\frac{6}{6+x}} \text{ ...(II)}$$

Igualamos las expresiones (I) y (II): $\frac{2}{3} = \frac{6}{6+x} \Rightarrow 12+2x = 18 \Rightarrow \therefore \boxed{x=3}$



• En el ◺ BAD : $\underbrace{\text{tg }(\alpha+\theta)} = \frac{\overline{DA}}{\overline{BA}} = \frac{7}{6}$

$$\boxed{\frac{\text{tg }\alpha+\text{tg }\theta}{1-\text{tg }\alpha\cdot\text{tg }\theta} = \frac{7}{6}} \text{ ... (III)}$$

Reemplazamos (I) en (III):

$$\frac{\frac{2}{3}+\operatorname{tg}\theta}{1-\frac{2}{3}\operatorname{tg}\theta}=\frac{7}{6}$$

Recordemos que:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\theta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\theta}$$

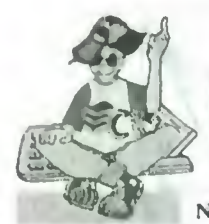
$$6\left(\frac{2}{3}+\operatorname{tg}\theta\right)=7\left(1-\frac{2}{3}\operatorname{tg}\theta\right)$$

$$4+6\operatorname{tg}\theta=7-\frac{14}{3}\operatorname{tg}\theta \Rightarrow 12+18\operatorname{tg}\theta=21-14\operatorname{tg}\theta$$

$$32\operatorname{tg}\theta=9 \Rightarrow \therefore \operatorname{tg}\theta=\frac{9}{32}$$

Luego; calculamos el valor de "E": $E=x^2\cdot\operatorname{cotg}\theta=x^2\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}=3^2\cdot\frac{1}{\left(\frac{9}{32}\right)}=32$

$\therefore$ $E=32$ **Rpta. E**



EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPUESTOS

NIVEL I

Ejercicio : Reducir:

$$E=\frac{\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)}$$

A) tg a **B)** tg b **C)** cotg a **D)** cotg b **E)** 1

Ejercicio : Simplificar:

$$M=\frac{\operatorname{sen}2x\cdot\cos x+\cos 2x\cdot\operatorname{sen}x}{\cos 2x\cdot\cos x-\operatorname{sen}2x\cdot\operatorname{sen}x}$$

A) 1 **B)** tg x **C)** tg 3x **D)** tg 2x **E)** cotg x

Ejercicio : Reducir:

$$K=\frac{\operatorname{sen}50^\circ\cdot\cos 20^\circ-\cos 50^\circ\cdot\operatorname{sen}20^\circ}{\cos 40^\circ\cdot\cos 10^\circ+\operatorname{sen}40^\circ\cdot\operatorname{sen}10^\circ}$$

A) 1 **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **D)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **E)** $\sqrt{3}$

Ejercicio : Si: $\operatorname{sen}\theta=3/5$; $\cos\alpha=4/5$; Calcular el valor de: "$\operatorname{tg}(\theta-\alpha)$"

A) 1 **B)** 0 **C)** $\frac{24}{25}$ **D)** $\frac{1}{5}$ **E)** 2

Ejercicio : Si: $\cos\alpha=1/2$; $\operatorname{tg}\beta=\frac{\sqrt{3}}{3}$; Calcular el valor de: "$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$"

A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** $\frac{5}{4}$ **E)** N.A.

Ejercicio : Calcular el valor de "x" en la figura mostrada.

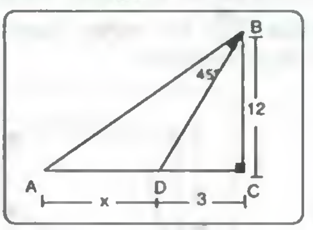
A) 9

B) 11

C) 13

D) 15

E) 17



Ejercicio 7 : Reducir: $E = \dfrac{\text{tg } 5x - \text{tg } 3x}{1 + \text{tg } 5x \cdot \text{tg } 3x}$

A) tg 3 x B) tg 2x C) cotg x
D) cotg 2x E) N.A.

Ejercicio : Simplificar:

$$M = \frac{\text{sen } (x+y)}{\cos x \cdot \cos y} + \text{tg } (-y)$$

A) tg y B) tg x C) cotg x
D) cotg y E) N.A.

Clave de Respuestas

1. A	2. C	3. C	4. B
5. B	6. E	7. B	8. B

NIVEL II

Ejercicio : Siendo: $\text{tg } A = \dfrac{-15}{8}$; $(A \in Q_4)$ y $\sec B = \dfrac{5}{4}$, $(B \in Q_4)$; Hallar: "cos (A - B)"

A) $\dfrac{76}{85}$ B) $\dfrac{66}{85}$ C) $\dfrac{77}{85}$ D) $\dfrac{85}{77}$ E) N.A.

Ejercicio : Siendo: $\text{tg } A = \dfrac{-24}{7}$; $(A \in Q_2)$ y $\sec B = \dfrac{-17}{15}$; $(B \in Q_3)$; Hallar: "cos (A +B)"

A) $\dfrac{279}{504}$ B) $\dfrac{297}{450}$ C) $\dfrac{279}{450}$ D) $\dfrac{297}{405}$ E) N.A.

Ejercicio : Simplificar:

$$E = \frac{\text{sen } (45°+x) \cos (45°+y)}{\text{sen } (x-y) + \cos (x+y)}$$

A) $\dfrac{1}{2}$ B) 2 C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Ejercicio : Si: $\text{tg } a = \left(2\sqrt{2}+1\right)$ y $\text{tg } b = \left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Hallar: "tg (a + b)"

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) -1 D) 0 E) $-\sqrt{2}$

Ejercicio : Reducir:

$$E = \text{sen } (60° + x) + \text{sen } (60° - x) + \cos (30° + x) + \cos (30° - x)$$

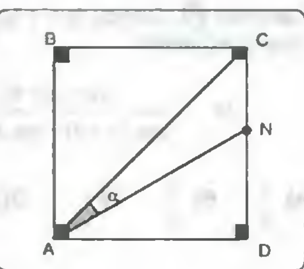
A) 2 cos x B) $\sqrt{3}$ cos x C) $2\sqrt{3}$ sen x
D) $2\sqrt{3}$ cos x E) $4\sqrt{3}$ cos x

Ejercicio : En la figura. Calcular "tg α"; siendo: ABCD un cuadrado y "N" es punto medio de CD.

A) $\dfrac{1}{2}$ B) $\dfrac{1}{3}$

C) $\dfrac{1}{4}$ D) $\dfrac{3}{4}$

E) $\dfrac{1}{5}$



Ejercicio 7 : Si: $tg(A + B) = 1/2$; $tg(C - B) = 1/2$. Hallar el valor de: "$tg(A + C)$".

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{4}{5}$

Ejercicio 8 : Si: $\cos\theta = 0{,}6$; $tg\,\alpha = 0{,}75$; Además: $\theta \in Q_1$ y $\alpha \in Q_3$. Calcular el valor de: $sen(\theta + \alpha)$.

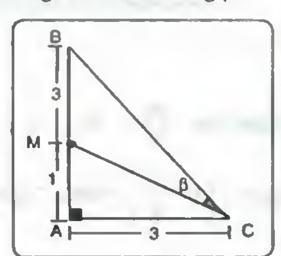
A) -1 B) -0,8 C) -0,25 D) 0,5 E) 0,8

Ejercicio 9 : En la figura. Calcular: $tg\,\beta$

A) $\frac{7}{13}$ B) $\frac{9}{13}$

C) $\frac{13}{9}$ D) $\frac{9}{15}$

E) $\frac{15}{9}$



Ejercicio 10 : Del gráfico. Calcular: "$tg\,\theta$"; ABCD es un cuadrado.

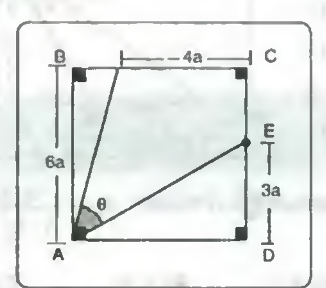
A) 1

B) 2

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{1}{3}$

E) 3



Clave de Respuestas

1. C	2. D	3. A	4. C	5. D
6. B	7. C	8. A	9. B	10. A

NIVEL III

Ejercicio 1 : Reducir la expresión:

$$E = \frac{sen\,(A+B)}{cosec\ B} + \frac{\cos\,(A+B)}{sec\ B}$$

A) sen A B) cos A C) sen B
D) cos B E) sen A cos B

Ejercicio 2 : Siendo: $tg\,\alpha + tg\,\theta = 2$; a que es igual la expresión:

$$M = \frac{sen\,(\alpha+\theta)}{\cos\,(\alpha+\theta) + \cos\,(\alpha-\theta)}$$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 4

Ejercicio 3 : Si: $tg\,(a + 16°) = \frac{31}{17}$. Hallar: "sen a"

A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\pm\frac{1}{2}$ E) $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ejercicio 4 : Si: $(\cos 15° + sen\,a)(\cos 15° - sen\,a) = p$. Calcular el valor de:

$$E = tg\,(15° + a) + tg\,(15° - a)$$

A) p B) 2p C) $\frac{1}{2p}$ D) $\frac{1}{p}$ E) N.A.

Ejercicio 5 : Sabiendo que:

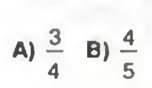
$tg\,(2x + y) = 3$; $tg\,(y - 2x) = 2$. Hallar: "$tg\,2y$"

A) -1 B) 6 C) 5 D) 1 E) $-\frac{1}{2}$

Ejercicio 6 : Si: $\text{tg } a = \frac{1}{3}$; $\text{tg } b = \frac{1}{4}$; $\text{tg } (c - b) = \frac{1}{5}$. Hallar: "tg (a + c)".

A) $\frac{25}{24}$ B) $\frac{24}{23}$ C) $\frac{23}{24}$ D) $\frac{23}{25}$ E) N.A.

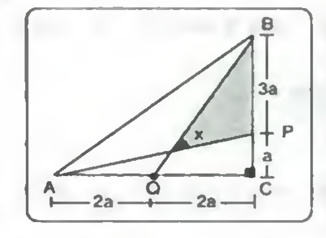
Ejercicio 7 : De la figura mostrada; Calcular el valor de: "tg x"



A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{5}$

C) 1 D) $\frac{7}{6}$

E) $\frac{3}{2}$



Ejercicio 8 : Calcular el valor de:

$$K = \frac{\text{tg } 54° - \text{tg } 36°}{\text{tg } 18°}$$

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D) 2 E) $\sqrt{5}$

Ejercicio 9 : Si: tg (b - c) = 1; y $\text{tg } (a - b) = \frac{m+n}{m-n}$; Hallar: "tg (a - c)"

A) $\frac{m}{n}$ B) $-\frac{m}{n}$ C) $-\frac{n}{m}$ D) $-\frac{2m}{n}$ E) $-\frac{2n}{m}$

Ejercicio 10 : Calcular el valor de:

$$E = \frac{\text{tg } 65° - \text{tg } 25°}{\sqrt{2} \text{ tg } 40°} + \frac{\text{sen } 50° - \cos 50°}{\text{sen } 5°}$$

A) 1 B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{2}$ E) 2

Ejercicio 11 : De la figura mostrada; Hallar: "tg β"

A) $3\sqrt{3}$

B) $\frac{3\sqrt{3}}{7}$

C) $\frac{\sqrt{3}}{7}$

D) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

E) $\frac{3\sqrt{2}}{7}$

Ejercicio 12 : Si. $\text{cotg } x = 1 + \sqrt{3} - \text{tg } y$; Hallar el valor de:

$$M = \frac{2 \cos (x-y)}{\text{sen } (x+y) + \text{sen } (x-y)}$$

A) 1,732 B) 2,732 C) 0,732
D) 1,414 E) 2,414

Ejercicio 13 : Si: $\text{tg } x = \frac{\cos a}{1 - \text{sen } a}$ y $\text{tg } y = \frac{1 - \text{sen } a}{\cos a}$; Hallar: "sen (x - y)"

A) sen a B) cos a C) tg a D) cotg a E) sec a

Clave de Respuestas

1. B	2. C	3. C	4. C	5. D
6. C	7. D	8. D	9. B	10. D
11. B	12. B	13. A		

EJERCICIOS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Organizados por las Academías:
César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

EJERCICIO 1 : Reducir:

sen (θ + 60°) - cos (θ + 30°)

A) 1 B) 2 C) sen θ
D) cos θ E) 1/2

Resolución:

Sabemos que: •) $\text{sen}\,(\theta+60°) = \text{sen}\,\theta\cdot\cos 60° + \cos\theta\cdot\text{sen}\,60° \Rightarrow \text{sen}\,\theta\cdot\frac{1}{2}+\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore\ \text{sen}\,(\theta+60°) = \frac{\text{sen}\,\theta+\sqrt{3}\cdot\cos\theta}{2}$$

••) $\cos(\theta+30°) = \cos\theta\cos 30° - \text{sen}\,\theta\cdot\text{sen}\,30° \Rightarrow \cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\text{sen}\,\theta\cdot\frac{1}{2}$

$$\therefore\ \cos(\theta+30°) = \frac{\sqrt{3}\,\cos\theta-\text{sen}\,\theta}{2}$$

Luego: $\text{sen}\,(\theta+60°)-\cos(\theta+30°) = \frac{\text{sen}\,\theta+\sqrt{3}\cos\theta}{2}-\frac{\sqrt{3}\,\cos\theta-\text{sen}\,\theta}{2}$

$$\text{sen}\,(\theta+60°)-\cos(\theta+30°) = \frac{2\,\text{sen}\,\theta}{2} \Rightarrow \therefore\ \text{sen}\,\theta$$ **Rpta. C**

EJERCICIO 2 : Dada la condición: $\text{tg}\,a = \frac{3}{4}+\text{tg}\,b$

Calcular el valor de: $\frac{\text{sen}\,(a-b)}{\cos a\cdot\cos b}$

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{5}{3}$

Resolución:

$$\frac{\text{sen}\,(a-b)}{\cos a\cdot\cos b} = \frac{\text{sen}\,a\cdot\cos b-\cos a\cdot\text{sen}\,b}{\cos a\cdot\cos b} \Rightarrow \frac{\text{sen}\,a\cdot\cancel{\cos b}}{\cos a\cdot\cancel{\cos b}}-\frac{\cancel{\cos a}\cdot\text{sen}\,b}{\cancel{\cos a}\cdot\cos b}$$

$$\frac{\text{sen}\,(a-b)}{\cos a\cdot\cos b} = \text{tg}\,a-\text{tg}\,b \quad ...(I)$$

De la condición: $\text{tg}\,a = \frac{3}{4}+\text{tg}\,b \Rightarrow \text{tg}\,a-\text{tg}\,b = \frac{3}{4}$ ...(II)

Reemplazando (II) en (I); obtenemos que: $\frac{\text{sen}\,(a-b)}{\cos a\cdot\cos b} = \frac{3}{4}$ **Rpta. D**

EJERCICIO 3 : Calcular el valor de:

$$A = \frac{\text{tg } 50° - \text{tg } 40°}{\text{tg } 10°}$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Resolución:

Sabemos que: 50° - 40° = 10°; tomamos la función "tg" a ambos miembros:

$$\underbrace{\text{tg }(50° - 40°)} = \text{tg } 10°$$

$$\frac{\text{tg } 50° - \text{tg } 40°}{1 + \text{tg } 50° \cdot \text{tg } 40°} = \text{tg } 10° \text{ ; pero : } \text{tg } 40° = \text{cotg } 50°$$

$$\frac{\text{tg } 50° - \text{tg } 40°}{1 + \underbrace{\text{tg } 50° \cdot \text{cotg } 50°}_{1}} = \text{tg } 10°$$

Por Propiedad: $\text{tg } \theta \cdot \text{cotg } \theta = 1$

$$\frac{\text{tg } 50° - \text{tg } 40°}{2} = \text{tg } 10° \Rightarrow \frac{\text{tg } 50° - \text{tg } 40°}{\text{tg } 10°} = 2 \quad \therefore \quad A = 2$$

Rpta. C

EJERCICIO 4 : Calcular el valor de:

$$B = \frac{2 \text{ tg } 50° + \text{tg } 20°}{\text{tg } 70°}$$

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Resolución:

La expresión "B"; se puede escribir de la manera siguiente: $B = \dfrac{\text{tg } 50° + \text{tg } 20°}{\text{tg } 70°} + \dfrac{\text{tg } 50°}{\text{tg } 70°}$ ... (I)

Pero: 70° = 50° + 20° ; tomamos la función "tg" a ambos miembros.

$$\text{tg }(70°) = \text{tg }(50° + 20°)$$

$$\text{tg } 70° = \frac{\text{tg } 50° + \text{tg } 20°}{1 - \text{tg } 50° \cdot \text{tg } 20°} \Rightarrow 1 - \text{tg } 50° \cdot \text{tg } 20° = \frac{\text{tg } 50° + \text{tg } 20°}{\text{tg } 70°}$$

Esta última expresión lo reemplazamos en (I); obteniendo:

$$B = 1 - \underbrace{\text{tg } 50° \cdot \text{tg } 20°} + \frac{\text{tg } 50°}{\text{tg } 70°} \text{ ; pero : } \text{tg } 70° = \text{cotg } 20°$$

$$B = 1 - \text{tg } 50° \cdot \frac{1}{\text{cotg } 20°} + \frac{\text{tg } 50°}{\text{cotg } 20°}$$

$$B = 1 - \frac{\text{tg } 50°}{\text{cotg } 20°} + \frac{\text{tg } 50°}{\text{cotg } 20°} \quad \therefore \quad B = 1$$

Rpta. D

EJERCICIO 5 : Si: "α" y "β" son ángulos agudos además: $\text{sen }\alpha \cdot \cos\beta = \frac{2}{3} - \text{sen }\beta \cos\alpha$

Calcular: "tg (α + β)".

A) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D) 1 E) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

Resolución:

La expresión : $\text{sen }\alpha \cdot \cos\beta = \frac{2}{3} - \text{sen }\beta \cos\alpha$; se puede escribir de la manera siguiente:

$$\text{sen }\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \text{ sen }\beta = \frac{2}{3} \qquad \text{sen }(\alpha+\beta) = \frac{2}{3} \quad ...(I)$$

Aplicando la identidad: $\cos A = \pm\sqrt{1-\text{sen}^2 A}$; obtenemos que:

$$\cos(\alpha+\beta) = \sqrt{1-\text{sen}^2(\alpha+\beta)} \quad ...(II)$$

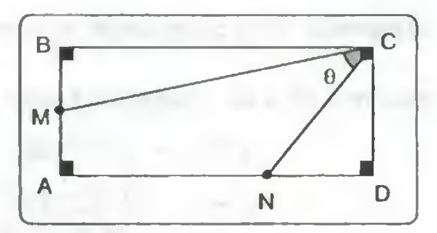
Reemplazando (I) en (II): $\cos(\alpha+\beta) = \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} \Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad ...(III)$

Luego: $\text{tg }(\alpha+\beta) = \frac{\text{sen }(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} \quad ...(IV)$

Reemplazando (I) y (III) en (IV); obtenemos: $\text{tg }(\alpha+\beta) = \frac{2/3}{\sqrt{5}/3} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ **Rpta. A**

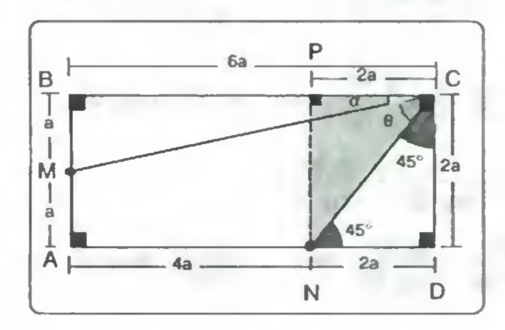
EJERCICIO 6 : En la figura, Calcular: "tg θ"

Siendo: $\overline{BC} = 3\overline{ND} = 6\overline{BM}$; además: $\overline{BM} = \overline{AM}$.



A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{5}{7}$ C) $\frac{7}{5}$ D) $\frac{4}{3}$ E) 1

Resolución:



De la condición:

$\overline{BC} = 3\overline{ND} = 6\overline{BM}$; hacemos: $\overline{BM} = a$

De (1): $3\overline{ND} = 6\overline{BM} \Rightarrow 3\overline{ND} = 6a \therefore \overline{ND} = 2a$

De (2) : $\overline{BC} = 6\overline{BM} \Rightarrow \therefore \overline{BC} = 6a$

• De la figura: $\alpha+\theta = 45°$; tomamos la función "tg" a ambos miembros:

$$\underbrace{\text{tg}(\alpha+\theta)} = \underbrace{\text{tg }45°} \text{ ; pero : tg }45°=1$$

$$\frac{\text{tg }\alpha+\text{tg }\theta}{1-\text{tg }\alpha\cdot\text{tg }\theta} = 1 \Rightarrow \text{tg }\alpha+\text{tg }\theta=1-\text{tg }\alpha\cdot\text{tg }\theta \quad ...(I)$$

*) En el ⊿ MBC : $\text{tg }\alpha = \frac{\overline{BM}}{\overline{BC}} = \frac{a}{6a} \Rightarrow \therefore \text{tg }\alpha=\frac{1}{6} \quad ...(II)$

Reemplazamos (II) en (I): $\frac{1}{6}+\text{tg }\theta = 1-\frac{1}{6}\text{ tg }\theta \Rightarrow \frac{7}{6}\text{ tg }\theta=\frac{5}{6} \Rightarrow \therefore \text{tg }\theta=\frac{5}{7}$ **Rpta. B**

Ejercicio 7 : Simplificar:

$$\frac{(\text{tg }\alpha+\text{tg }\beta)(\text{cotg }\alpha+\text{cotg }\beta)}{(\text{tg }\alpha-\text{cotg }\alpha)+(\text{tg }\beta-\text{cotg }\beta)}$$

A) $\text{tg}(\alpha+\beta)$ **B)** $\cos(\alpha+\beta)$
C) $-\text{cotg}(\alpha+\beta)$ **D)** $-\text{tg}(\alpha+\beta)$
E) 1

Resolución:

La expresión dada; se puede escribir de la manera siguiente:

$$\frac{(\text{tg }\alpha+\text{tg }\beta)\cdot\left(\frac{1}{\text{tg }\alpha}+\frac{1}{\text{tg }\beta}\right)}{\left(\text{tg }\alpha-\frac{1}{\text{tg }\alpha}\right)+\left(\text{tg }\beta-\frac{1}{\text{tg }\beta}\right)} = \frac{(\text{tg }\alpha+\text{tg }\beta)\cdot\left(\frac{\text{tg }\beta+\text{tg }\alpha}{\text{tg }\alpha\cdot\text{tg }\beta}\right)}{\left(\frac{\text{tg}^2\alpha-1}{\text{tg }\alpha}\right)+\left(\frac{\text{tg}^2\beta-1}{\text{tg }\beta}\right)}$$

A los términos del denominador de esta última fracción, les damos denominador; veamos:

$$\frac{(\text{tg }\alpha+\text{tg }\beta)\cdot\left(\frac{\text{tg }\beta+\text{tg }\alpha}{\text{tg }\alpha\cdot\text{tg }\beta}\right)}{\left(\frac{\text{tg }\beta\,(\text{tg}^2\alpha-1)+\text{tg }\alpha\,(\text{tg}^2\beta-1)}{\text{tg }\alpha\cdot\text{tg }\beta}\right)} = \frac{(\text{tg }\alpha+\text{tg }\beta)^2}{\text{tg}^2\alpha\,\text{tg }\beta-\text{tg }\beta+\text{tg }\alpha\,\text{tg}^2\beta-\text{tg }\alpha}$$

En el denominador de esta última expresión factorizamos:

$$\frac{(\text{tg }\alpha+\text{tg }\beta)^2}{\text{tg }\alpha\cdot\text{tg }\beta\,(\text{tg }\alpha+\text{tg }\beta)-(\text{tg }\alpha+\text{tg }\beta)} = \frac{(\text{tg }\alpha+\text{tg }\beta)^2}{(\text{tg }\alpha+\text{tg }\beta)\,[\text{tg }\alpha\cdot\text{tg }\beta-1]}$$

$$= \frac{(\text{tg }\alpha+\text{tg }\beta)}{[\text{tg }\alpha\cdot\text{tg }\beta-1]} = -\frac{(\text{tg }\alpha+\text{tg }\beta)}{(1-\text{tg }\alpha\cdot\text{tg }\beta)} = -\text{tg}(\alpha+\beta)$$ **Rpta. D**

Ejercicio 8 : Si: $\frac{1}{\text{tg a}+\text{tg b}}-\frac{1}{\text{cotg a}+\text{cotg b}} = \sqrt{3}$

Hallar el valor de: (a + b)

A) 30° **B)** 45° **C)** 60°
D) 90° **E)** 22,5°

Resolución:

La expresión dada; se puede escribir de la manera siguiente:

$$\frac{1}{tg\ a+tg\ b}-\frac{1}{\left(\frac{1}{tg\ a}+\frac{1}{tg\ b}\right)}=\sqrt{3}$$

Recuerda que:

Si: $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$

Encontes: $\frac{B}{A}=\frac{D}{C}$

$$\frac{1}{tg\ a+tg\ b}-\frac{tg\ a\cdot tg\ b}{tg\ a+tg\ b}=\sqrt{3}$$

$$\frac{1-tg\ a\cdot tg\ b}{tg\ a+tg\ b}=\frac{\sqrt{3}}{1}$$: Invertimos las fracciones en ambos miembros.

$$\frac{tg\ a+tg\ b}{1-tg\ a\cdot tg\ b}=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow tg\ (a+b)=tg\ 30° \Rightarrow \therefore\ (a+b)=30°$$ **Rpta. A**

EJERCICIO 9 : Si: $\alpha=30°$ y $\beta=45°$. Calcular:

$$\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)+\text{sen}(\alpha+\beta)\cdot\text{sen}(\alpha-\beta)$$

A) 1 **B)** 1/2 **C)** tg 0° **D)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **E)** tg 60°

Resolución:

De la expresión: $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)+\text{sen}(\alpha+\beta)\cdot\text{sen}(\alpha-\beta)$; obtenemos:

$$(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\text{sen}\ \alpha\cdot\text{sen}\ \beta)\cdot(\cos\alpha\cdot\cos\beta+\text{sen}\ \alpha\cdot\text{sen}\ \beta)+$$
$$(\text{sen}\ \alpha\cos\beta+\cos\alpha\cdot\text{sen}\ \beta)\cdot(\text{sen}\ \alpha\cos\beta-\cos\alpha\cdot\text{sen}\ \beta)$$

Por diferencia de cuadrados: (A -B) (A +B) = $A^2 - B^2$

$$\left[(\cos\alpha\cdot\cos\beta)^2-(\text{sen}\ \alpha\cdot\text{sen}\ \beta)^2\right]+\left[(\text{sen}\ \alpha\cdot\cos\beta)^2-(\cos\alpha\cdot\text{sen}\ \beta)^2\right]$$

Ordenamos términos de la manera siguiente:

$$\left[(\text{sen}\ \alpha\ \cos\beta)^2+(\cos\alpha\cdot\cos\beta)^2\right]-\left[(\text{sen}\ \alpha\cdot\text{sen}\ \beta)^2+(\cos\alpha\cdot\text{sen}\ \beta)^2\right]$$

$$\left[\cos^2\beta\ \underbrace{(\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha)}_{1}\right]-\left[\text{sen}^2\beta\ \underbrace{(\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha)}_{1}\right]$$

$$\cos^2\beta-\text{sen}^2\beta=\cos^2 45°-\text{sen}^2 45°=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=0=tg\ 0°$$ **Rpta. C**

Ejercicio 10 : Simplificar:

$$E = \sec B \cdot \operatorname{cosec} A \cdot [\operatorname{sen}(A-B) + \operatorname{sen}(A+B)]$$

A) 1 B) 0 C) -1 D) 2 E) -2

Resolución:

$$E = \sec B \cdot \operatorname{cosec} A \left[(\operatorname{sen} A \cos B - \cancel{\cos A \operatorname{sen} B}) + (\operatorname{sen} A \cos B + \cancel{\cos A \operatorname{sen} B})\right]$$

$$E = \frac{1}{\cancel{\cos B}} \cdot \frac{1}{\cancel{\operatorname{sen} A}} \cdot [2\,\cancel{\operatorname{sen} A} \cdot \cancel{\cos B}] \Rightarrow \therefore \boxed{E = 2}$$ **Rpta. D**

Ejercicio 11 : Si: $\operatorname{tg} a = \dfrac{\sec x + \operatorname{tg} x}{\sec x - \operatorname{tg} x}$; a que es igual "sen x"

A) tg a + 1 B) tg a - 1 C) tg (a - 45°) D) tg (a + 45°) E) tg (45° - a)

Resolución:

Sabemos que: $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$; $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

Luego: $$\operatorname{tg} a = \frac{\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \frac{\left(\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{\cancel{\cos x}}\right)}{\left(\dfrac{1-\operatorname{sen} x}{\cancel{\cos x}}\right)}$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} \Rightarrow \operatorname{tg} a\,(1-\operatorname{sen} x) = 1+\operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} a \operatorname{sen} x = 1 + \operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{tg} a - 1 = \operatorname{sen} x\,(1+\operatorname{tg} a)$$

$$\frac{\operatorname{tg} a - 1}{1+\operatorname{tg} a \cdot 1} = \operatorname{sen} x \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} 45°}{\operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} 45°} = \operatorname{sen} x$$

$$\therefore \boxed{\operatorname{tg}(a-45°) = \operatorname{sen} x}$$ **Rpta. C**

Recordemos que:

- $\operatorname{tg} 45° = 1$
- $\operatorname{tg}(A-B) = \dfrac{\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B}{1+\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B}$

6.4 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS MÚLTIPLES

6.4.1 Funciones Trigonométricas de Ángulo Doble:

Sí en las identidades del capítulo anterior, o sea sen $(\alpha + \beta)$, cos $(\alpha + \beta)$ y tg $(\alpha + \beta)$, se hace: $\beta = \alpha$, se obtienen identidades para: sen 2α, cos 2α y tg 2α.

Por Ejemplo:

De la fórmula: $\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha \cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$

Para: $\boxed{\beta=\alpha}$, obtenemos: $\text{sen}(\alpha+\alpha) = \text{sen}\,\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha$

$$\therefore\quad \boxed{\text{sen}\,2\alpha = 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha} \qquad \textbf{(Fórmula 1)}$$

De la fórmula: $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$

Para: $\boxed{\beta=\alpha}$, obtenemos: $\cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\alpha$

$$\therefore\quad \boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha} \qquad \textbf{(Fórmula 2)}$$

Por Identidad Pitagórica: $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

I) $\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha$	II) $\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

Reemplazamos (I) y (II) en la fórmula 2 :

●
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$$
$$\cos 2\alpha = (1-\text{sen}^2\alpha) - \text{sen}^2\alpha$$
$$\therefore\quad \boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2\,\text{sen}^2\alpha} \;\textit{(Fórmula)}$$

●●
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha)$$
$$\therefore\quad \boxed{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1} \;\textit{(Fórmula)}$$

De la fórmula: $\text{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1-\text{tg}\,\alpha\;\text{tg}\,\beta}$

Para: $\boxed{\beta=\alpha}$, obtenemos:

$$\text{tg}(\alpha+\alpha) = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}\,\alpha\;\text{tg}\,\alpha}$$

$$\therefore\quad \boxed{\text{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}} \qquad \textbf{(Fórmula 3)}$$

De la fórmula: $\text{cotg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\text{cotg}\,\alpha\;\text{cotg}\,\beta - 1}{\text{cotg}\,\alpha + \text{cotg}\,\beta}$

Para: $\boxed{\beta=\alpha}$, obtenemos:

$$\text{cotg}(\alpha+\alpha) = \frac{\text{cotg}\,\alpha\;\text{cotg}\,\alpha - 1}{\text{cotg}\,\alpha + \text{cotg}\,\alpha}$$

$$\therefore\quad \boxed{\text{cotg}\,2\alpha = \frac{\text{cotg}^2\alpha - 1}{2\,\text{cotg}\,\alpha}} \qquad \textbf{(Fórmula 4)}$$

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE FUNCIONES TRIGONÓMETRICAS DE ÁNGULO DOBLE

Ejercicio 1: Hallar el valor de: "sen 2A" Si: $\text{sen } A = \dfrac{2}{3}$

Resolución:

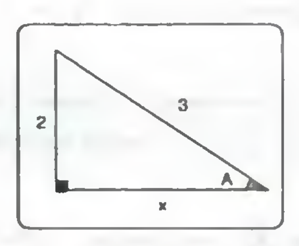
Sabemos que: $\text{sen } 2A = 2 \text{ sen } A \cos A$ ...(I)

De la condición: $\text{sen } A = \dfrac{2}{3}$; sen A = lo llevamos a un $\triangle$, veamos:

-Calculamos "x" por el teorema de Pitágoras:

$$3^2 = 2^2 + x^2 \Rightarrow 9 = 4 + x^2$$

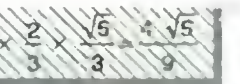
$$5 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{5}$$



Luego: $\cos A = \dfrac{x}{3} \Rightarrow \cos A = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

Reemplazamos valores en la expresión (I), obteniendo:

$\text{sen } 2A = 2 \text{ sen } A \cos A$ ➡ $\therefore$



$$\text{sen } 2A = 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

Rpta.

Ejercicio 2 : Hallar el valor de : "cos 2A" si: $\cos A = \dfrac{3}{4}$

Resolución:

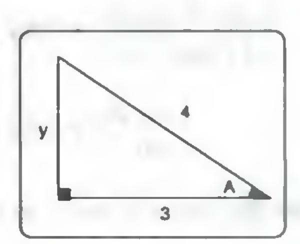
Sabemos que: $\cos 2A = \cos^2 A - \text{sen}^2 A$ ...(I)

De la condición: $\cos A = \dfrac{3}{4}$; cos A = lo llevamos a un $\triangle$, veamos:

Por el teorema de Pitágoras:

$$4^2 = 3^2 + y^2 \Rightarrow 16 = 9 + y^2$$

$$y^2 = 7 \Rightarrow y = \sqrt{7}$$



Luego: $\text{sen } A = \dfrac{y}{4} \Rightarrow \text{sen } A = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

Reemplazamos valores en la expresión (I), obteniendo:

$$\cos 2A = \cos^2 A - \text{sen}^2 A$$

$$\cos 2A = \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 \Rightarrow \therefore \cos 2A = \frac{9}{16} - \frac{7}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$ **Rpta.**

Ejercicio 3: Hallar el valor de: "tg 2A" Si: tg A = 3

Resolución:

Sabemos que: $\text{tg } 2A = \dfrac{2 \text{ tg } A}{1 - \text{tg}^2 A}$ ...(I) De la condición: tg A = 3 ...(II)

Reemplazamos (II) en (I): $\text{tg } 2A = \dfrac{2(3)}{1-(3)^2} = \dfrac{6}{1-9} = \dfrac{6}{-8} \Rightarrow \therefore \text{tg } 2A = \dfrac{-3}{4}$ **Rpta.**

> ***Recomendación:** Estimado alumno quiero que tengas, siempre presente que:*
> $\text{sen } 2A \neq 2 \text{ sen } A$; $\cos 2A \neq 2 \cos A$; $\text{tg } 2A \neq 2 \text{ tg } A$

Ejercicio 4: Demostrar que: $\dfrac{\text{sen } 4x}{1 - \cos 4x} \equiv \text{cotg } 2x$

Demostración:

Por fórmula: sen 2A = 2 sen A cos A, hacemos que: A = 2x

Luego: sen 2 (2x) = 2 sen 2x cos 2x $\therefore$ sen 4x = 2 sen 2 x cos 2x ...(I)

Por fórmula: cos 2A = 1 - 2 sen^2 A, hacemos que: A = 2x

Luego: cos 2 (2x) = 1 - 2 sen^2 2x $\therefore$ cos 4x = 1 - 2 sen^2 2x ...(I)

Reemplazamos (I) y (II) en la expresión incial:

$$\frac{2 \text{ sen } 2x \cos 2x}{1 - \left(1 - 2\text{sen}^2 2x\right)} \equiv \text{cotg } 2x \Rightarrow \frac{2 \text{ sen } 2x \cos 2x}{2 \text{ sen}^2 2x} \equiv \text{cotg } 2x$$

$$\frac{\cos 2x}{\text{sen } 2x} \equiv \text{cotg } 2x \Rightarrow \therefore \text{cotg } 2x \equiv \text{cotg } 2x$$ ***L.q.q.d***

Ejercicio 5: Demostrar que: tg x + cotg x ≡ 2 cosec 2 x

Demostración:

Por identidades por división: $\text{tg } x \equiv \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$; $\text{cotg } x \equiv \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}$

Luego: $\dfrac{\text{sen } x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} \equiv 2 \text{ cosec } 2x$ ➡ Damos común denominador en el primer miembro:

$$\frac{\text{sen } x \text{ sen } x + \cos x \cos x}{\text{sen } x \cos} \equiv 2 \text{ cosec } 2x$$

$$\frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen } x \cos x} \equiv 2 \text{ cosec } 2x$$ ➡ Pero: $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\frac{1}{\text{sen } x \cos x} \equiv 2 \text{ cosec } 2x$$ ➡ multiplicamos "x 2" el numerador y denominador del primer miembro.

$$\frac{1\ (2)}{2 \text{ sen } x \cos x} \equiv 2 \text{ cosec } 2x$$

$$\frac{2\ (1)}{\text{sen } 2x} \equiv 2 \text{ cosec } 2x \Rightarrow \text{Pero : } \frac{1}{\text{sen } 2x} = \text{cosec } 2x$$

$\therefore$ $2 \text{ cosec } 2x \equiv 2 \text{ cosec } 2x$ *L.q.q.d*

TALLER DE EJERCICIOS Nº 23

A. Sin emplear tablas ni calculadora; Calcular el valor de:

Ejercicio 1 : Hallar el valor de:

Sen 2 A; si: cosec A = 5/3

Resolución:

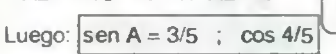
Sabemos que : sen 2A = 2 sen A . cos A ...(I)

• El valor de: cosec A = 5/3; lo llevamos a un ◺

• Por el teorema de Pitágoras:

$\overline{AB}^2 = 5^2 - 3^2$

$\overline{AB}^2 = 16 \Rightarrow \therefore \overline{AB} = 4$



Luego: sen A = 3/5 ; cos 4/5

Los valores hallados los reemplazados en (I):

$$\text{sen } 2A = 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$ ***Rpta.***

Ejercicio 2 : Hallar el valor de:

$\text{tg } 2A$; Si : $\text{sen } A = \dfrac{7}{25}$

Resolución:

Rpta. $\text{tg } 2A = \dfrac{336}{527}$

Ejercicio 3 : Demostrar que:

$$\frac{\text{sen } 4x}{1+\cos 4x} \equiv \text{tg } 2x$$

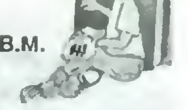
Demostración:

Ejercicio 4 : Demostrar que:

$$\text{cotg } \alpha - \text{tg } \alpha \equiv 2 \text{ cotg } 2\alpha$$

Demostración:

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULO DOBLE TIPO I.B.M.



Ejercicio 1: Reducir: $M = \dfrac{\text{sen } 3a}{\text{sen } a} - \dfrac{\cos 3a}{\cos a}$

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** -2 **E)** 1

Resolución:

Aplicando: $\dfrac{A}{B} - \dfrac{C}{D} = \dfrac{A \cdot D - B \cdot C}{B \cdot D}$

Obtenemos: $M = \dfrac{\text{sen } 3a \cdot \cos a - \cos 3a \cdot \text{sen } a}{\text{sen } a \cdot \cos a}$

$$M = \frac{\text{sen }(3a-a)}{\text{sen } a \cdot \cos a} = \frac{\boxed{\text{sen } 2a}}{\text{sen } a \cos a} = \frac{2 \text{ sen } a \cos a}{\text{sen } a \cos a} \Rightarrow \therefore \boxed{M = 2}$$ **Rpta. A**

Ejercicio 2: Reducir: $P = \sqrt{\dfrac{\sec 2x - 1}{\sec 2x + 1}}$

A) sec x **B)** tg x **C)** cotg x
D) cosec x **E)** N.A.

Resolución:

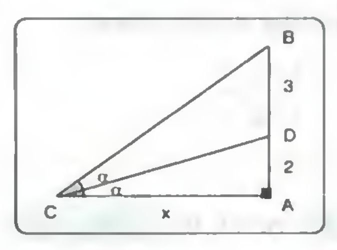
• La expresión dada; se puede escribir de la manera siguiente: $P = \sqrt{\dfrac{\dfrac{1}{\cos 2x} - 1}{\dfrac{1}{\cos 2x} + 1}} = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}$ ...(I)

Sabemos que: $\boxed{\cos 2x = 1 - 2\,\text{sen}^2 x \quad ; \quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1}$ ...(II)

Reemplazamos los valores de (II) en (I):

$$P = \sqrt{\frac{1-\left(1-2\,\text{sen}^2 x\right)}{1+\left(2\cos^2 x - 1\right)}} = \sqrt{\frac{2\,\text{sen}^2 x}{2\cos^2 x}} = \sqrt{\left(\frac{\text{sen}\,x}{\cos x}\right)^2} = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x} \;\Rightarrow\; \therefore\; \boxed{P = \text{tg}\,x}$$ **Rpta. B**

Ejercicio 3: De la figura mostrada:

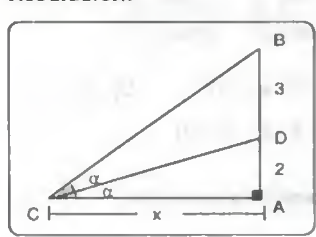


Hallar: "x"

A) $\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $3\sqrt{5}$

D) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ E) N.A.

Resolución:



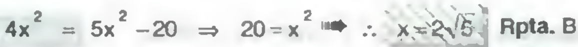
• En el ◺ BAC: $\text{tg}\,2\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{5}{x}$

$$\frac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha} = \frac{5}{x} \quad ...(I)$$

• En el ◺ DAC: $\text{tg}\,\alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{2}{x}$ ...(II)

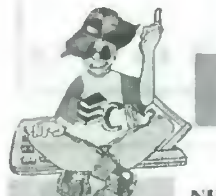
Reemplazamos (II) en (I):

$$\frac{2\left(\frac{2}{x}\right)}{1-\left(\frac{2}{x}\right)^2} = \frac{5}{x} \;\Rightarrow\; \frac{\frac{4}{x}}{\frac{x^2-4}{x^2}} = \frac{5}{x} \;\Rightarrow\; \frac{4x}{x^2-4} = \frac{5}{x}$$



$$4x^2 = 5x^2 - 20 \;\Rightarrow\; 20 = x^2 \;\Rightarrow\; \therefore\; \boxed{x = 2\sqrt{5}}$$

Rpta. B



EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPUESTOS

NIVEL I

Ejercicio 1: Hallar el valor de:

$\cos 2A$; Si: $\sec A = 7/3$

A) $\frac{-31}{94}$ B) $\frac{-31}{49}$ C) $\frac{-27}{49}$ D) $\frac{31}{49}$ E) N.A.

Ejercicio 2: Hallar el valor de:

$\text{cotg}\,2A$; Si: $\text{tg}\,A = 5/12$

A) $\frac{119}{102}$ B) $\frac{191}{120}$ C) $\frac{117}{120}$ D) $\frac{119}{120}$ E) N.A.

Ejercicio : Hallar el equivalente de:

$$\cos^4 A - \text{sen}^4 A$$

A) sen 2A B) tg 2A C) cos 2A
D) cotg 2A E) N.A.

Ejercicio : Hallar el equivalente de:

$$\frac{1-tg^2\ \theta}{1+tg^2\ \theta}$$

A) tg 2θ B) sen 2θ C) cos 2θ
D) cotg 2θ E) N.A.

Ejercicio : Reducir la siguiente expresión:

$$Q = tg\ (45° + x) + tg\ (45° - x)$$

A) 2 B) tg 2x C) cotg 2x
D) 2 sec 2x E) 2 cotg 2x

Clave de Respuestas

1. B	2. D	3. C	4. C	5. D

NIVEL II

Ejercicio : Si: 5 (sen α - cos α) = 1; 0 < α < π/4 ; Hallar: tg 2α

A) $\pm\frac{24}{7}$ B) $-\frac{24}{7}$ C) $\frac{24}{7}$ D) 7 E) ± 7

Ejercicio : Reducir:

$$M = \frac{4\ tg\ \alpha\left(1-tg^2\alpha\right)}{\sec^4\ \alpha}$$

A) cos 2 α B) cos 4α C) sen 2α
D) sen 4 α E) sen 6 α

Ejercicio : Si: sen⁴ a + cos⁴ a = m; Hallar: "cos 4a"

A) 4 m B) 3 m C) 2 m - 3
D) 4m - 3 E) 3m - 4

Ejercicio : Calcular el valor de:

$$E = \frac{\sec\ 9°}{\sec\ 21°}+\frac{\text{cosec}\ 9°}{\text{cosec}\ 21°}$$

A) $\sqrt{5}+1$ B) $2+\sqrt{5}$ C) $\sqrt{5}-1$
D) $2\left(\sqrt{5}-1\right)$ E) $2\left(\sqrt{5}+1\right)$

Ejercicio : Reducir la expresión:

$$E = \frac{\text{sen}\ 2x}{1+\cos\ 2x}$$

A) tg 2x B) tg x C) sen x
D) cos 2x E) sec x

Clave de Respuestas

1. C	2. D	3. D	4. A	5. B

NIVEL III

Ejercicio 1 : Reducir la expresión:

$$R = 4\ \text{sen}\ \theta\ \cos^3\ \theta\left(1-tg^2\theta\right)$$

A) sen 2θ B) sen² 2θ C) cos 2θ
D) cos² θ E) sen 4θ

Ejercicio 2 : Siendo: $\text{sen}\ x-\cos\ x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Calcular el valor de: $E = 3\ \text{sen}\ 2x + 2$

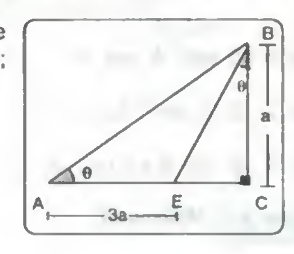
A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{4}{11}$ D) $\frac{11}{3}$ E) $\frac{11}{4}$

Ejercicio : Reducir la expresión:

$$R = 1-8\ \text{sen}^2\theta\ \cos^2\theta$$

A) $\text{sen}^2 2\theta$ B) $\cos^2 2\theta$ C) $\cos 4\theta$
D) $\text{sen}\ 4\theta$ E) $\text{sen}\ 8\theta$

Ejercicio : De la figura mostrada; calcule: "$\text{tg}\ 2\theta$"



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 1

Ejercicio : Encontrar el valor de "n" en:

$$\frac{\text{tg}\ 2x-2\ \text{tg}\ x}{\text{tg}\ 2x-\text{tg}\ x} = 1-n\ \cos 2x$$

A) 1 B) -1 C) 2 D) -2 E) N.A.

Clave de Respuestas

1. E	2. E	3. C	4. C	5. A

6.4.2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULO TRIPLE

Seno del Ángulo Triple: "sen 3A"

$$\text{sen}\ 3A = \text{sen}\ (2A+A)$$

$$\text{sen}\ 3A = \text{sen}\ 2A\cdot\cos A+\cos 2A\ \text{sen}\ A$$

$$\text{sen}\ 3A = 2\ \text{sen}\ A\ \cos A\cdot\cos A+(1-2\ \text{sen}^2 A)\ \text{sen}\ A$$

$$\text{sen}\ 3A = 2\ \text{sen}\ A\ \cos^2 A+\text{sen}\ A-2\ \text{sen}^3 A\ ;\ \text{Pero}:\ \cos^2 A=1-\text{sen}^2 A$$

$$\text{sen}\ 3A = 2\ \text{sen}\ A\ (1-\text{sen}^2 A)+\text{sen}\ A-2\ \text{sen}^3 A;$$

$$\text{sen}\ 3A = 2\ \text{sen}\ A-2\ \text{sen}^3 A+\text{sen}\ A-2\ \text{sen}^3 A$$

$$\therefore\quad \text{sen}\ 3A = 3\ \text{sen}\ A-4\ \text{sen}^3 A \quad \textit{(Fórmula)}$$

Coseno del Ángulo Triple: "cos 3A"

$$\cos 3A = \cos(2A + A)$$

$$\cos 3A = \cos 2A \cdot \cos A - \operatorname{sen} 2A \cdot \operatorname{sen} A$$

$$\cos 3A = \cos 2A \cos A - (2 \operatorname{sen} A \cos A) \operatorname{sen} A$$

$$\cos 3A = (2\cos^2 A - 1)\cos A - (2 \operatorname{sen} A \cos A) \operatorname{sen} A$$

$$\cos 3A = 2\cos^3 A - \cos A - 2\operatorname{sen}^2 A \cos A$$

$$\cos 3A = 2\cos^3 A - \cos A - 2(1 - \cos^2 A)\cos A$$

$$\cos 3A = 2\cos^3 A - \cos A - 2\cos A + 2\cos^3 A$$

$$\therefore \quad \boxed{\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A} \quad \textit{(Fórmula)}$$

Tangente del Ángulo Triple: "tg 3A"

De las fórmulas:

$\operatorname{sen} 3A = 3 \operatorname{sen} A - 4 \operatorname{sen}^3 A$	$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

Dividimos miembro a miembro:

$$\frac{\operatorname{sen} 3A}{\cos 3A} = \frac{3 \operatorname{sen} A - 4 \operatorname{sen}^3 A}{4\cos^3 A - 3\cos A} = \frac{3 \operatorname{sen} A \cos^2 A - \operatorname{sen}^3 A}{\cos^3 A - 3\cos A \operatorname{sen}^2 A}$$

Dividimos a cada término del numerador y denominador "$\cos^3 A$" obteniendo:

$$\operatorname{tg} 3A = \frac{\dfrac{3 \operatorname{sen} A \cos^2 A}{\cos^3 A} - \dfrac{\operatorname{sen}^3 A}{\cos^3 A}}{\dfrac{\cos^3 A}{\cos^3 A} - \dfrac{3\cos A \operatorname{sen}^2 A}{\cos^3 A}}$$

$$\operatorname{tg} 3A = \frac{\dfrac{3 \operatorname{sen} A}{\cos A} - \operatorname{tg}^3 A}{1 - 3\dfrac{\operatorname{sen}^2 A}{\cos^2 A}} = \frac{3 \operatorname{tg} A - \operatorname{tg}^3 A}{1 - 3\operatorname{tg}^2 A} \Rightarrow \therefore \quad \boxed{\operatorname{tg} 3A = \frac{3 \operatorname{tg} A - \operatorname{tg}^3 A}{1 - 3\operatorname{tg}^2 A}} \quad \textit{(Fórmula)}$$

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULO TRIPLE

Ejercicio 1: Hallar el valor de: "sen 3A" si: $\cos A = \frac{3}{5}$

Resolución:

Sabemos que: $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$ ...(I)

De la condición: $\cos A = \frac{3}{5}$; lo llevamos a un △ veamos:

Por el teorema de pitágoras:

$$5^2 = 3^2 + x^2 \Rightarrow 25 = 9 + x^2$$

$$16 = x^2 \Rightarrow \sqrt{16} = x \Rightarrow \therefore\ x = 4$$

Luego: $\sin A = \frac{x}{5} \Rightarrow \sin A = \frac{4}{5}$

Reemplazamos valores en (I):

$$\sin 3A = 3\left(\frac{4}{5}\right) - 4\left(\frac{4}{5}\right)^3$$

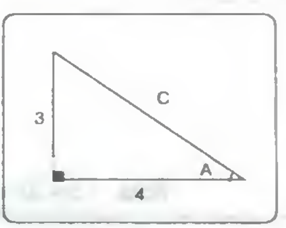
$$\sin 3A = \frac{12}{5} - 4\left(\frac{64}{125}\right) = \frac{300-256}{125} = \frac{44}{125} \Rightarrow \therefore\ \sin 3A = \frac{44}{125}$$ **Rpta.**

Ejercicio 2: Hallar el valor de: "cos 3A" si: $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$

Resolución:

Sabemos que: $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$ ...(I)

De la condición: $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$; lo llevamos a un △ veamos:



Por el teorema de pitágoras:

$$c^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow c^2 = 9 + 16$$

$$c^2 = 25 \Rightarrow c = \sqrt{25} \Rightarrow \therefore\ c = 5$$

Luego: $\cos A = \frac{4}{C} \Rightarrow \cos A = \frac{4}{5}$

Reemplazamos valores en (I):

$$\cos 3A = 4\left(\frac{4}{5}\right)^3 - 3\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$\cos 3A = 4\left(\frac{64}{125}\right) - \frac{12}{5} = \frac{256-300}{125} = \frac{-44}{125} \Rightarrow \therefore \boxed{\cos 3A = \frac{-44}{125}}$$ **Rpta.**

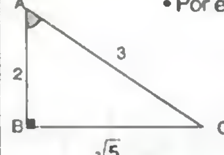
TALLER DE EJERCICIOS Nº 24

Ejercicio 1 : Hallar el valor de: sen 3A; si: Sec A = 3/2.

Resolución:

Sabemos que: $\text{sen } 3A = 3 \text{ sen } A - 4 \text{ sen}^3 A$ ...(I)

- El valor: sec A = 3/2, lo llevamos a un ⊿ veamos:



- Por el teorema de Pitágoras:

$$\overline{BC}^2 = 3^2 - 2^2$$

$$\overline{BC} = \sqrt{5}$$

Luego: $\text{sen } A = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ...(II)

Reemplazamos (II) en (I):

$$\text{sen } 3A = 3\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) - 4\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^3$$

$$\text{sen } 3A = \sqrt{5} - 4\left(\frac{5\sqrt{5}}{27}\right)$$

$$\therefore \boxed{\text{sen } 3A = \frac{7}{27}\sqrt{5}}$$ ***Rpta.***

Ejercicio 2 : Hallar el valor de:

cos 3A; si: cosec A = 2

Resolución:

Rpta. $\boxed{\cos 3A = 0}$

Ejercicio 3 : Hallar el valor de:

tg 3A ; si: sen A = 1/3

Resolución:

Rpta. $\text{tg } 3A = \dfrac{23\sqrt{2}}{20}$

Ejercicio 4 : Hallar el valor de:

sen 3A; si: cos A = 1/n ; n ≠ 0

Resolución:

Rpta. $\text{sen } 3A = \left(\dfrac{4-n^2}{n^3}\right)\sqrt{n^2-1}$

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULO TRIPLE

Ejercicio 1: Reducir: $M = \dfrac{\text{sen } 3x + \text{sen}^3 x}{\cos^3 x - \cos 3x}$

A) 1 B) tg x C) cotg x
D) tg 3x E) cotg 3x

Resolución:

Sabemos que: $\text{sen } 3x = 3 \text{ sen } x - 4 \text{ sen}^3 x$ | $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

Luego:

$$M = \frac{(3 \text{ sen } x - 4 \text{ sen}^3 x) + \text{sen}^3 x}{\cos^3 x - (4 \cos^3 x - 3 \cos x)} = \frac{3 \text{ sen } x - 3 \text{ sen}^3 x}{3 \cos x - 3 \cos^3 x}$$

$$M = \frac{3 \text{ sen } x \, \overbrace{(1 - \text{sen}^2 x)}}{3 \cos x \, \underbrace{(1 - \cos^2 x)}}$$; pero : $1 - \text{sen}^2 x = \cos^2 x$ | $1 - \cos^2 x = \text{sen}^2 x$

$$M = \frac{3 \text{ sen } x \cos^2 x}{3 \cos x \text{ sen}^2 x} = \frac{\cos x}{\text{sen } x} \Rightarrow \therefore \boxed{M = \text{cotg } x}$$ **Rtpa. C**

Ejercicio 2: Si: sen x - cos x = 1 y $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$

Hallar: cos (3x - 45°)

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{1}{2}$

D) $-\frac{1}{2}$ E) N.A.

Resolución:

De la expresión: cos (3x - 45°) ; obtenemos:

$$\cos(3x-45°) = \cos 3x \cdot \cos 45° + \operatorname{sen} 3x \cdot \operatorname{sen} 45°$$

$$\cos(3x-45°) = \cos 3x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{sen} 3x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\operatorname{sen} 3x + \cos 3x\right]$$

$$\cos(3x-45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\left(3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x\right) + \left(4\cos^3 x - 3\cos x\right)\right]$$

$$\cos(3x-45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[3(\operatorname{sen} x - \cos x) - 4\left(\operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x\right)\right]$$

$$\cos(3x-45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[3\underbrace{(\operatorname{sen} x - \cos x)}_{Dato} - 4\underbrace{(\operatorname{sen} x - \cos x)}_{Dato}\left(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + \operatorname{sen} x \cos x\right)\right]$$

$$\cos(3x-45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[3(1) - 4(1)\left(\underbrace{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}_{1} + \operatorname{sen} x \cos x\right)\right]$$

$$\cos(3x-45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[3 - 4 - 4\operatorname{sen} x \cos x\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[-1 - 4\operatorname{sen} x \cos x\right] \ldots(1)$$

De la condición: sen x - cos x = 1 ; elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$(\operatorname{sen} x - \cos x)^2 = 1^2$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - 2\operatorname{sen} x \cos x = 1 \Rightarrow \therefore \operatorname{sen} x \cos x = 0 \ \ldots(II)$$

Reemplazamos (II) en (I):

$$\cos(3x-45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[-1-4(0)\right] = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \therefore \boxed{\cos(3x-45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$$ **Rpta. B**

Ejercicio 3: Al reducir la siguiente expresión:

$$\frac{\cos^3\alpha - \cos 3\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\operatorname{sen}^3\alpha + \operatorname{sen} 3\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

se obtiene:

A) 0 B) 1 C) 2

D) 3 E) N.A.

Resolución:

Sabemos que: $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ | $\operatorname{sen} 3\alpha = 3\operatorname{sen}\alpha - 4\operatorname{sen}^3\alpha$

Luego:

$$\frac{\cos^3\alpha-(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)}{\cos\alpha}+\frac{\operatorname{sen}^3\alpha+(3\operatorname{sen}\alpha-4\operatorname{sen}^3\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\frac{3\cos\alpha-3\cos^3\alpha}{\cos\alpha}+\frac{3\operatorname{sen}\alpha-3\operatorname{sen}^3\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \Rightarrow \frac{3\cancel{\cos\alpha}\,\overbrace{(1-\cos^2\alpha)}}{\cancel{\cos\alpha}}+\frac{3\cancel{\operatorname{sen}\alpha}\,\overbrace{(1-\operatorname{sen}^2\alpha)}}{\cancel{\operatorname{sen}\alpha}}$$

$$3\operatorname{sen}^2\alpha+3\cos^2\alpha = 3\underbrace{(\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha)}_{1} = 3$$

Rpta. D

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULO TRIPLE

Ejercicio 1: Hallar el valor de:

$\cos 3A$; si: $\operatorname{tg} A = 3$

A) $\frac{13}{10}\sqrt{10}$ B) $-\frac{13}{10}\sqrt{10}$ C) $\frac{-13\sqrt{10}}{50}$

D) $\frac{13\sqrt{10}}{50}$ E) N.A.

Ejercicio 2: Si: $\operatorname{sen}(30°+x)=\frac{\sqrt{5}}{3}$; Hallar: "$\cos 3x$"

A) $\frac{\sqrt{5}}{27}$ B) $\frac{5\sqrt{5}}{27}$ C) $\frac{3\sqrt{5}}{27}$

D) $\frac{7\sqrt{5}}{27}$ E) N.A.

Ejercicio 3: Determinar el valor de "n" en:

$$\frac{\operatorname{sen}3x+\cos 3x}{\cos x-\operatorname{sen}x}=1+n\operatorname{sen}2x$$

A) 0 B) 1 C) -1 D) 2 E) -2

Ejercicio 4: Simplificar:

$$M = 3\operatorname{tg}A\,(2\cos A + \cos 3A)$$

A) tg 3A B) 3 cos 3A C) 3 sen 3A
D) 2 sen 3A E) 2 cotg 3A

Ejercicio 5: De la figura. Hallar "x"

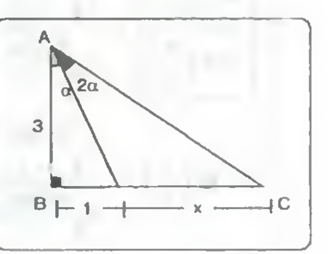
A) 11/3

B) 3

C) 10/3

D) 4

E) N.A.



Clave de Respuestas

1. C	2. D	3. D	4. C	5. C

6.4.3 Funciones Trigonométricas de un Ángulo Mitad

Seno y Coseno de un Ángulo Mitad:

Sabemos que: $\cos 2A = 1 - 2\,\text{sen}^2 A$ ...*(Por ángulo doble)*

Donde: $\text{sen}^2 A = \dfrac{1-\cos 2A}{2} \Rightarrow \text{sen}^2\left(\dfrac{A}{2}\right) = \dfrac{1-\cos A}{2}$

sacamos mitad a c/u de los ángulos de las funciones trigonométricas, obteniendo.

Luego: $\therefore \quad \text{sen}\left(\dfrac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}}$ ***(Fórmula)***

También sabemos que: $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$ ...*(Por ángulo doble)*

Donde: $\cos^2 A = \dfrac{1+\cos 2A}{2}$

$\cos^2 \dfrac{A}{2} = \dfrac{1+\cos A}{2}$

Luego: $\therefore \quad \cos\left(\dfrac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}}$ ***(Fórmula)***

Tangente del Ángulo Mitad.

$\text{sen}\left(\dfrac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}}$ ...(1) $\qquad \cos\left(\dfrac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}}$ ...(2)

Dividimos miembro a miembro (1) y (2):

$$\frac{\text{sen}\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}}$$

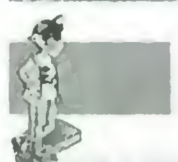
$$\text{tg}\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} \Rightarrow \therefore \quad \text{tg}\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$$

(Fórmula)

Ahora, tomamos la inversa a ambos miembros de esta última expresión:

$$\frac{1}{\text{tg}\left(\frac{A}{2}\right)} = \frac{1}{\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}} \Rightarrow \therefore \quad \text{cotg}\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}}$$

(Fórmula)



EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULO MITAD

Ejercicio 1: Utilizando las identidades del ángulo mitad. Hallar: sen 22,5°.

Resolución:

Sabemos que: $\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$ ...(I)

Luego, hacemos: $\left(\frac{A}{2}\right) = 22{,}5° \Rightarrow A = 45°$ ...(II)

Reemplazamos (II) en (I):

$$\operatorname{sen}\left(\frac{45°}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}} \Rightarrow \text{Pero : } \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen} 22{,}5° = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$$

$$\operatorname{sen} 22{,}5° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

tomamos el signo (+) por ser el ángulo de $22{,}5° \in Q_1$ ➡ ∴ $\operatorname{sen} 22{,}5° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Ejercicio 2: Utilizando las identidades del ángulo mitad. Hallar: cos 105°

Resolución:

Sabemos que: $\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$ ...(I)

Luego, hacemos: $\left(\frac{A}{2}\right) = 105° \Rightarrow A = 210°$ ...(II)

Reemplazamos (II) en (I):

$$\cos\left(\frac{210°}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 210°}{2}} \Rightarrow \cos 105° = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 210°}{2}} \quad ...(III)$$

Reducimos el ángulo de 210° al primer cuadrante, veamos:

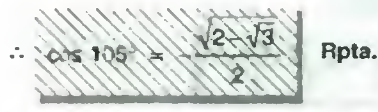
$$\cos 210° = \cos(180°+30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \therefore \cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad .. (IV)$$

$\in Q_3$

Reemplazando (IV) en (III): $\cos 105^\circ = \pm\sqrt{\dfrac{1+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}} = \pm\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}}$

$$\cos 105^\circ = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{4}} = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

tomamos el signo (-) por pertenecer 105° al 2do. cuadrante.



$$\therefore \cos 105^\circ = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$ **Rpta.**

Ejercicio 3: Demostrar que: $\operatorname{cosec} A - \operatorname{cotg} A \equiv \operatorname{tg}\left(\dfrac{A}{2}\right)$

Demostración:

Sabemos que: $\operatorname{cosec} A = \dfrac{1}{\operatorname{sen} A}$; $\operatorname{cotg} A = \dfrac{\cos A}{\operatorname{sen} A}$

Luego: $\dfrac{1}{\operatorname{sen} A} - \dfrac{\cos A}{\operatorname{sen} A} \equiv \operatorname{tg}\left(\dfrac{A}{2}\right) \Rightarrow \dfrac{1-\cos A}{\operatorname{sen} A} \equiv \operatorname{tg}\left(\dfrac{A}{2}\right)$

Pero:

$\cos 2\alpha = 1-2\operatorname{sen}^2\alpha$	$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$
$\cos A = 1-2\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{A}{2}\right)$	$\operatorname{sen} A = 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{A}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{A}{2}\right)$

Reemplazando los valores hallados en esta última expresión:

$$\frac{1-\left(1-2\operatorname{sen}^2\left(\frac{A}{2}\right)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right)} \equiv \operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right) \Rightarrow \frac{\cancel{2}\operatorname{sen}^{\cancel{2}}\left(\frac{A}{2}\right)}{\cancel{2}\,\cancel{\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)}\cos\left(\frac{A}{2}\right)} \equiv \operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)} \equiv \operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right) \Rightarrow \therefore \operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right) \equiv \operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right)$$ ***L.q.q.d***

TALLER DE EJERCICIOS Nº 25

• Utilizando las identidades del ángulo mitad.

Ejercicio 1 : Hallar: sen 30°

Resolución:

Sabemos que: $\text{sen}\left(\dfrac{A}{2}\right)=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}}$

Donde: $\dfrac{A}{2}=30° \Rightarrow \therefore \boxed{A=60°}$

Luego: $\text{sen}\left(\dfrac{60°}{2}\right)=+\sqrt{\dfrac{1-\cos 60°}{2}}$

$\text{sen } 30°=+\sqrt{\dfrac{1-1/2}{2}}=+\dfrac{1}{2}$

$\therefore \boxed{\text{sen } 30°=\dfrac{1}{2}}$ **Rpta.**

Nota: *Hemos tomado el signo (+) porque el ángulo de 30° ∈ al Q_1.*

Ejercicio 3 : Hallar: cotg 15°

Resolución:

Rpta. $\text{cotg } 15°=\left(2+\sqrt{3}\right)$

Ejercicio 2 : Hallar: tg 67,5°

Resolución:

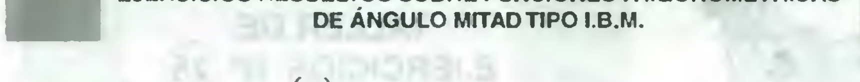
Rpta. $\text{tg } 67{,}5°=\left(\sqrt{2}+1\right)$

Ejercicio 4 : Hallar: cos 157,5°

Resolución:

Rpta. $\cos 157{,}5°=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULO MITAD TIPO I.B.M.



Ejercicio 1: Hallar: $\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right)$; sabiendo que: $\operatorname{sen} B=\frac{3}{5}$; $B \in Q_1$

A) $\frac{\sqrt{5}}{10}$ B) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ C) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ D) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ E) $\frac{1}{10}$

Resolución:

Sabemos que: $\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos B}{2}}$ ...(I)

Por identidad Pitagórica: $\underbrace{\operatorname{sen}^2 B}+\cos^2 B=1$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2+\cos^2 B=1 \Rightarrow \cos^2 B=1-\frac{9}{25} \Rightarrow \therefore \cos B=\frac{4}{5} \quad ...(II)$$

Reemplazamos (II) en (I):

$$\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-4/5}{2}}=\sqrt{\frac{1}{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \therefore \operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right)=\frac{\sqrt{10}}{10}$$ **Rpta. C**

Ejercicio 2: Hallar el equivalente de:

$$E=\frac{\sec A-1}{\operatorname{tg} A}$$

A) $\cos\left(\frac{A}{2}\right)$ B) $\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right)$ C) $\operatorname{cotg}\left(\frac{A}{2}\right)$ D) $\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)$ E) N.A.

Resolución:

• La expresión dada, se puede escribir de la manera siguiente:

$$E=\frac{\frac{1}{\cos A}-1}{\frac{\operatorname{sen} A}{\cos A}}=\frac{\frac{1-\cos A}{\cancel{\cos A}}}{\frac{\operatorname{sen} A}{\cancel{\cos A}}}=\frac{1-\cos A}{\operatorname{sen} A} \quad ...(I)$$

Sabemos que: • $\cos 2\theta=1-2\operatorname{sen}^2 A \Rightarrow \cos A=1-2\operatorname{sen}^2\left(\frac{A}{2}\right)$ ...(II)

•• $\operatorname{sen} 2\theta=2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \Rightarrow \operatorname{sen} A=2\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A}{2}\right)$ ...(III)

Reemplazamos (II) y (III) en (I):

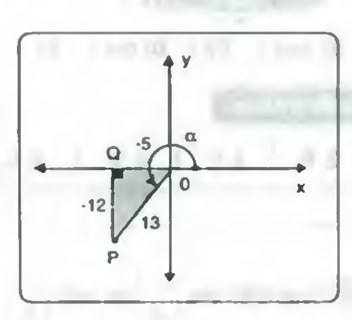
$$E=\frac{1-\left(1-2\operatorname{sen}^2\left(\frac{A}{2}\right)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A}{2}\right)}=\frac{\cancel{2}\operatorname{sen}^{\cancel{2}}\left(\frac{A}{2}\right)}{\cancel{2}\cancel{\operatorname{sen}}\left(\frac{A}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A}{2}\right)}=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)} \Rightarrow \therefore E=\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right)$$ **Rpta. B**

Ejercicio 3: Siendo: $\alpha \in Q_3$; donde: $\text{sen}\ \alpha = -\frac{12}{13}$; Calcule el valor de: $E = \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 5\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

A) 1 **B)** -5 **C)** 3 **D)** $\sqrt{13}$ **E)** 5

Resolución:

Graficamos: $\text{sen}\ \alpha = -\frac{12}{13}$; como se muestra en la figura:



• Por el Teorema de Pitágoras:

$$\overline{QO}^2 = \overline{PO}^2 - \overline{PQ}^2$$

$$\overline{QO}^2 = 13^2 - (-12)^2 = 25 \Rightarrow \therefore\ \overline{QO} = 5$$

Luego: $\cos\alpha = \frac{-5}{13}$

• De la expresión "E"; obtenemos:

$$E = \left(\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\right) - 5\left(-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\right)$$

$$E = \left(\sqrt{\frac{1-\left(\frac{-5}{13}\right)}{2}}\right) + 5\left(\sqrt{\frac{1+\left(\frac{-5}{13}\right)}{2}}\right)$$

• De acuedo al gráfico:

$\left(\frac{\alpha}{2}\right) \in$ al Q_2

Entonces : $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ es negativo.

$$E = \sqrt{\frac{9}{13}} + 5\sqrt{\frac{4}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} + 5\ \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{13\sqrt{13}}{13} \Rightarrow \therefore\ E = \sqrt{13}$$ **Rpta. D**

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULO MITAD

NIVEL I

Ejercicio 1: Hallar: $\cos\left(\frac{A}{2}\right)$ sabiendo que: $\cos A = -3/4$; $A \in Q_3$.

A) $\frac{-\sqrt{2}}{4}$ **B)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **C)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D)** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **E)** $\frac{\sqrt{2}}{6}$

Ejercicio 2: Hallar: $\text{tg}\left(\frac{A}{2}\right)$; sabiendo que: $\cos A = -5/13$; $A \in Q_2$.

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $-\frac{2}{3}$ D) $-\frac{3}{2}$ E) $\frac{4}{3}$

Ejercicio : Simplifique:

$$R = \text{cotg}\left(\frac{\theta}{2}\right) - 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\text{cotg}\,\theta$$

A) $\text{tg}\,\theta$ B) $\text{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ C) $\text{sen}\,\theta$ D) $\cos\theta$ E) $\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Ejercicio : Simplificar:

$$S = \frac{\text{sen}\,2x\cdot\cos x}{(1+\cos 2x)\cdot(1-\cos x)}$$

A) sen 2x B) cos 2x C) $\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$

D) $\sec\left(\frac{x}{2}\right)$ E) $\text{cotg}\left(\frac{x}{2}\right)$

Ejercicio : Reducir la expresión:

$$E = \text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\text{sen}\,x - 1$$

A) sen x B) -cos x C) 1 D) cos x E) -1

Clave de Respuestas

1. A	2. B	3. C	4. B	5. C

NIVEL II

Ejercicio : Si se tiene que "θ" $\in Q_3$ y además: $\text{tg}\,\theta = \frac{15}{8}$. Calcule el valor de:

$$E = 1 + \sqrt{34}\cdot\left(\text{sen}\,\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Ejercicio : Hallar: $\text{tg}\left(\frac{a}{4}\right)$; si:

$$\text{sen}\,a\cdot\text{sen}\left(\frac{a}{2}\right) + \cos\left(\frac{a}{2}\right)\cdot\cos a = \frac{1}{3}$$

A) $\pm\frac{1}{2}$ B) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) ± 2 D) $\pm\sqrt{2}$ E) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ejercicio : Simplificar:

$$E = \frac{(1-\sec\alpha)^2 - (\text{sen}\,\alpha - \text{tg}\,\alpha)^2}{\cos^4\alpha + 2\,\text{sen}^4\alpha - \text{sen}^6\alpha - \cos^6\alpha}$$

A) $\text{cotg}\,\alpha$ B) $\text{cotg}^2\frac{\alpha}{2}$ C) $\text{tg}\frac{\alpha}{2}$

D) $\text{tg}\,\alpha$ E) $\text{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Ejercicio : Calcular: $\sec\left(\frac{\alpha}{2}\right)$; si: $\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{5}{\sqrt{17}}$; para : $\alpha \in \left\langle\frac{5\pi}{2};\, 3\pi\right\rangle$

A) $-\frac{\sqrt{17}}{4}$ B) $-\frac{\sqrt{17}}{2}$ C) $-\frac{\sqrt{17}}{8}$

D) $-\frac{\sqrt{17}}{6}$ E) $-\sqrt{17}$

Ejercicio : Si: $\frac{\pi}{2} < a < \pi$; reducir:

$$E = \sqrt{1+\text{sen}\,a} - \sqrt{1-\text{sen}\,a}$$

A) $2\cos\frac{a}{2}$ B) $2\,\text{sen}\,\frac{a}{2}$ C) $-2\cos\frac{a}{2}$

D) $-2\,\text{sen}\,\frac{a}{2}$ E) 0,5

Clave de Respuestas

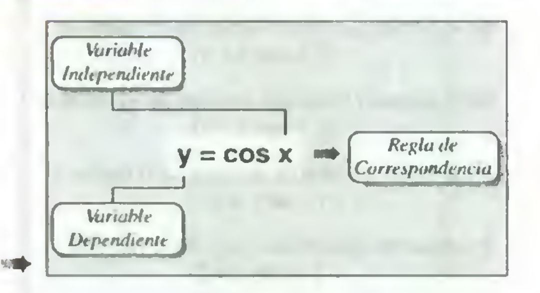
1. C	2. B	3. E	4. E	5. A

Funciones Trigonométricas de Números Reales

7.1 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE NÚMEROS REALES

Se llama función trigonométrica al conjunto de pares ordenados (x,y) donde los primeros elementos son números reales (ángulos en grados sexagesimales) y los segundos elementos son correspondientes valores de las razones trigonométricas de esos ángulos.

Sea la razón trigonométrica: cos x; si a esta le llamamos "y", tendremos:



Esta regla de correspondencia da lugar a un conjunto de pares ordenados, y a este conjunto se le da el nombre de función trigonométrica, función que lógicamente tendrá un dominio, rango y también una gráfica.

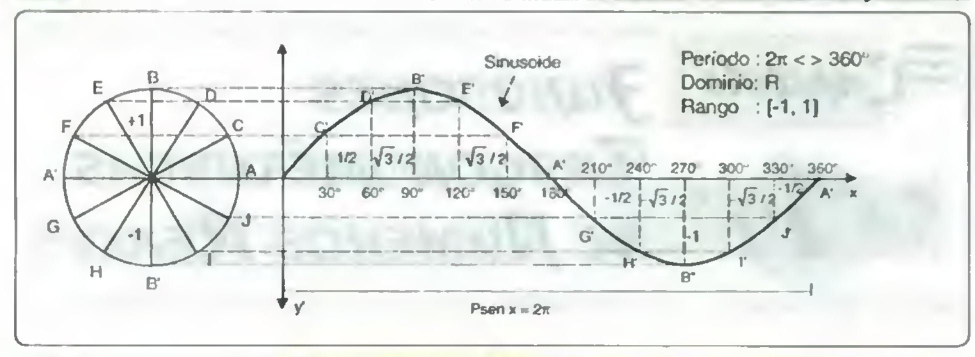
7.1.1 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN SENO:

y = sen x

Donde "x" representa a los ángulos trigonométricos que varía de (+∞) a (-∞) e "y" representa los valores numéricos que toma la función trigonométrica.

Luego, para graficar necesitamos una serie de puntos (ver Tabla)

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
y = sen x	0	1/2	$\sqrt{3}/2$	+1	$\sqrt{3}/2$	1/2	0	-1/2	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	-1/2	0



VARIACIÓN: *El Seno del Ángulo.*

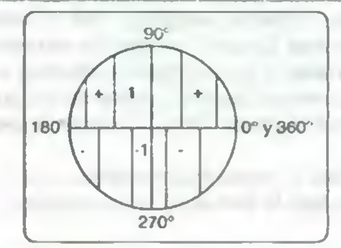
En el primer cuadrante crece de 0° hasta +1
(0 < sen x < 1)

En el segundo cuadrante decrece de +1 hasta 0
(0 < sen x < 1)

En el tercer cuadrante decrece de 0 hasta -1
(-1 < sen x < 0)

En el cuarto cuadrante crece de -1 hasta 0
(-1 < sen x < 0)

sen 0° = 0	sen 90° = +1
sen 180° = 0	sen 270° = -1
sen 360° = 0	



Análisis del Gráfico:

El nombre de esta curva es **"sinusoide"**

Extensión: Del gráfico definimos que el máximo valor que toma el seno es **1** y siempre es menor que este, el mínimo valor es -**1**, por el cual: ➡ $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$

Período: La tendencia de la curva es repetirse en forma completa a partir de 360°, o sea: ➡ P sen x = 360°

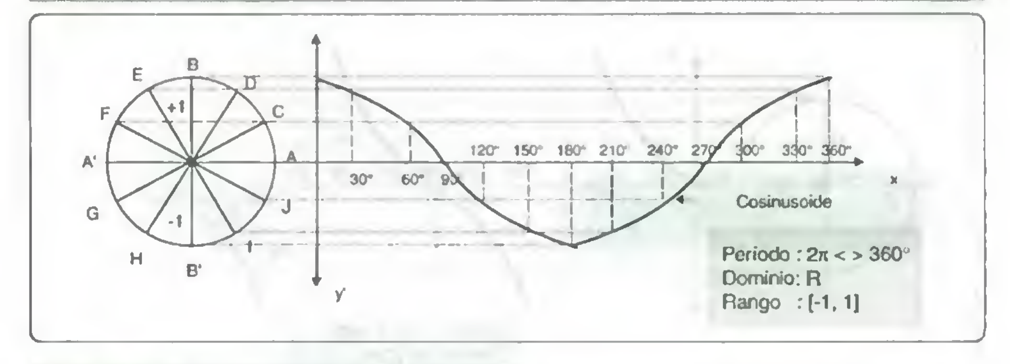
Tipo de Curva: Es continua.

7.1.2 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN COSENO

y = cos x

Como la función anterior, o sea el "sen x", hacemos la tabulación de la siguiente manera:

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
y = cos x	0	$\sqrt{3}/2$	1/2	0	-1/2	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	-1/2	0	1/2	$\sqrt{3}/2$	1



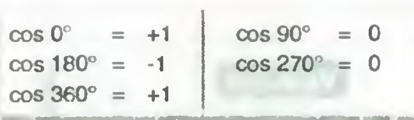
VARIACIÓN: ***El Coseno del Ángulo.***

En el primer cuadrante decrece de +1 a 0
$(0 < \cos x < 1)$

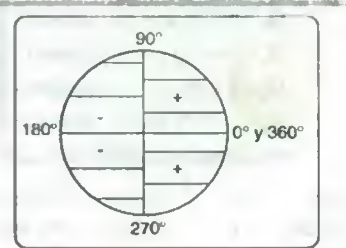
En el segundo cuadrante decrece de 0 a -1
$(-1 < \cos x < 0)$

En el tercer cuadrante crece de -1 a 0
$(-1 < \cos x < 0)$

En el cuarto cuadrante crece de 0 a +1
$(0 < \cos x < 1)$



$\cos 0° = +1$	$\cos 90° = 0$
$\cos 180° = -1$	$\cos 270° = 0$
$\cos 360° = +1$	



Análisis del Gráfico:

El nombre de esta curva es **"Cosinusoide"**

Extensión: El coseno varía, como máximo en 1 y mínimo en -1 ➡ $-1 \leq \cos x \leq 1$

Período: La tendencia de la curva a repetirse en forma completa es a partir de 360°, o sea: ➡ $P \cos x = 360°$

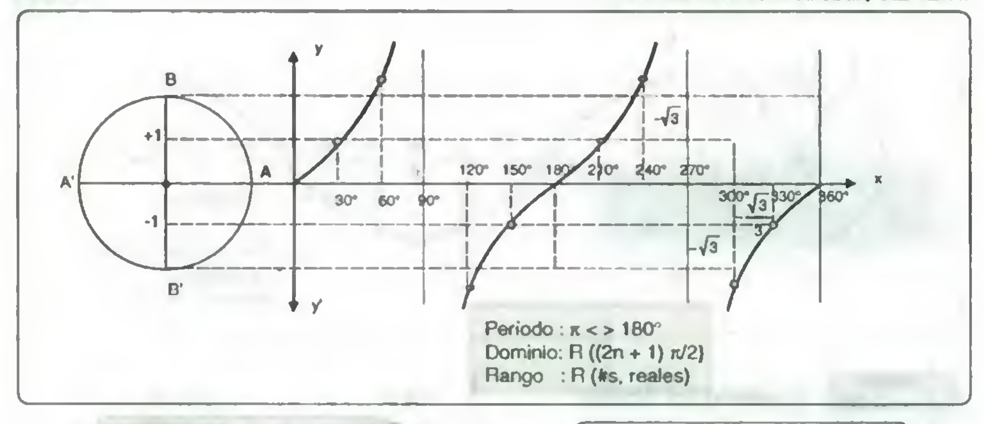
Tipo de Curva: Es continua.

7.1.3 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN TANGENTE

$y = tg\ x$

Para graficar esta función tabulamos de la siguiente manera, veamos:

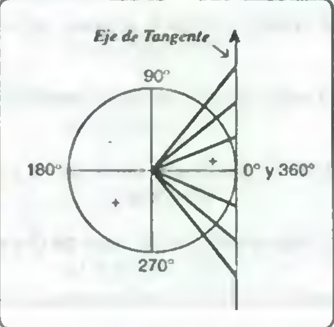
x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
y = tg x	0	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$	∄	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}/3$	0	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$	∄	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}/3$	0



VARIACIÓN:

$Q_1 : 0 < tg\ x < +\infty$ (crece)
$Q_2 : -\infty < tg\ x < 0$ (crece)
$Q_3 : 0 < tg\ x < +\infty$ (crece)
$Q_4 : -\infty < tg\ x < 0$ (crece)

tg 0° = 0	tg 90° = No existe (∄)
tg 180° = 0	tg 270° = No existe (∄)
tg 360° = 0	



Análisis del Gráfico:

Extensión: La tangente varía desde el (+∞) hasta (-∞) pasando por los valores reales.

Período: Este es 180°, porque cada rama se vuelve a repetir después de completar este valor angular.

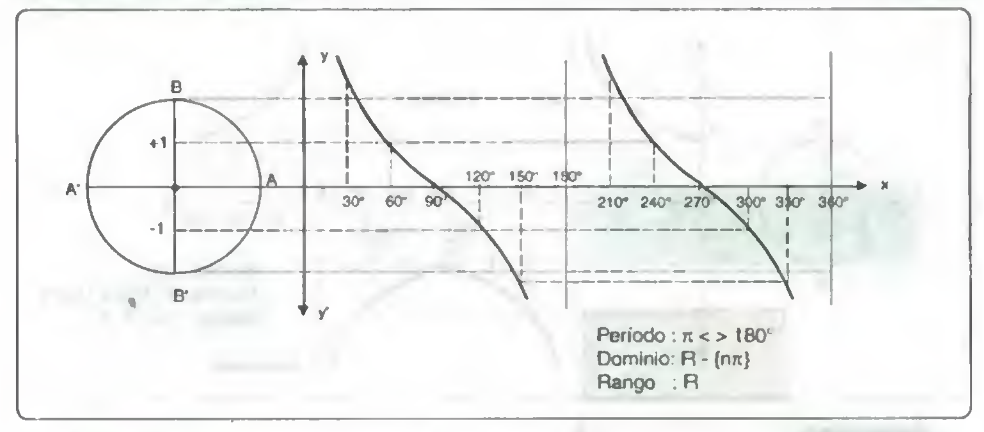
Tipo de Curva: Es una curva Discontinua pues vemos que está formada por ramas. No pudiéndose construir una gráfica de un solo trazo. Podemos apreciar que cada rama se encuentra entre dos rectas llamadas "Asintotas", que son tangentes a una curva en el infinito. Otra propiedad es que la función tangente siempre es creciente en cada rama.

7.1.4 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN COTANGENTE:

y = cotg x

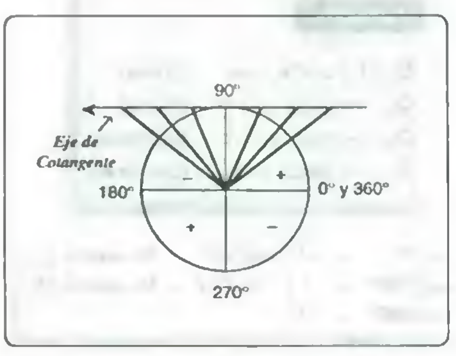
Para graficar dicha función tabulamos de la siguiente manera:

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
y = cotg x	∄	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$	0	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}$	∄	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$	0	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}$	∄



VARIACION:

Q_1 : 0 < cotg x < +∞ (decrece)
Q_2 : -∞ < cotg x < 0 (decrece)
Q_3 : 0 < cotg x < +∞ (decrece)
Q_4 : -∞ < cotg x < 0 (decrece)



cotg 0° = No existe (∄)	cotg 90° = 0
cotg 180° = No existe (∄)	cotg 270° = 0
cotg 360° = No existe (∄)	

Análisis del Gráfico:

Extensión: El valor máximo es (+∞) y mínimo (-∞); pasando por todos los valores reales.

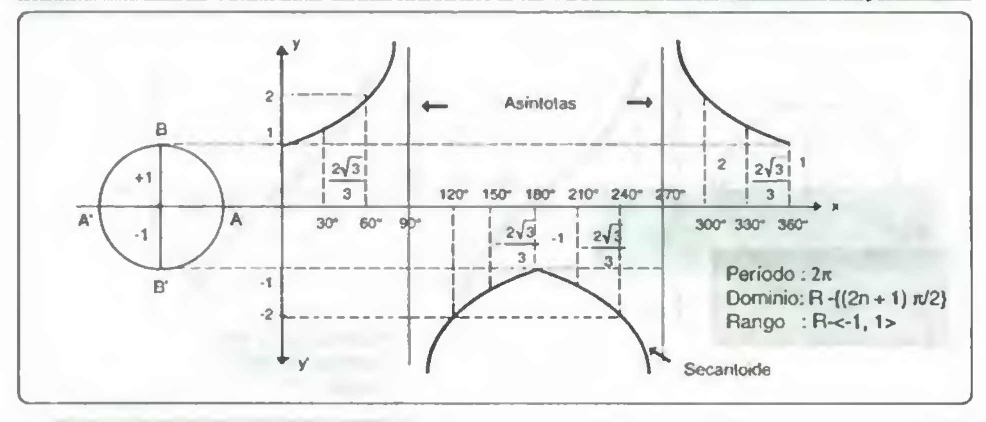
Periodo: Cada rama se repite luego de 180°

Tipo de Curva: Es discontinua y decreciente en cada rama que se encuentra limitada por dos "Asíntotas"

7.1.5 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN SECANTE:

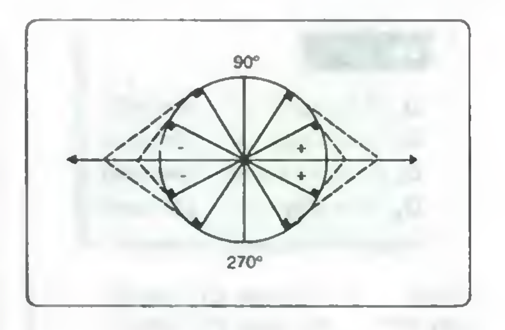
y = sec x Para graficar dicha función, tabulamos de la siguiente manera:

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
y = sec x	1	$2\sqrt{3}/3$	2	∄	-2	$-2\sqrt{3}/3$	-1	$-2\sqrt{3}/3$	-2	∄	2	$2\sqrt{3}/3$	1



VARIACIÓN:

Q_1 : $1 < \sec x < +\infty$ (crece)
Q_2 : $-\infty < \sec x < -1$ (crece)
Q_3 : $-\infty < \sec x < -1$ (decrece)
Q_4 : $1 < \sec x < +\infty$ (decrece)



sec 0° = +1	sec 90° = No existe ($\nexists$)
sec 180° = -1	sec 270° = No existe ($\nexists$)
sec 360° = +1	

Análisis del Gráfico:

Extensión: La secante siempre es mayor o igual a 1 en la parte positiva, y en la negativa siempre es menor o igual a -1, es decir, la secante no abarca el rango 1 y -1, sino lo que está a partir de ella. Esta extensión es recíproca a la del seno y coseno.

Periodo: Las curvas positiva y negativa se repite cada 360°

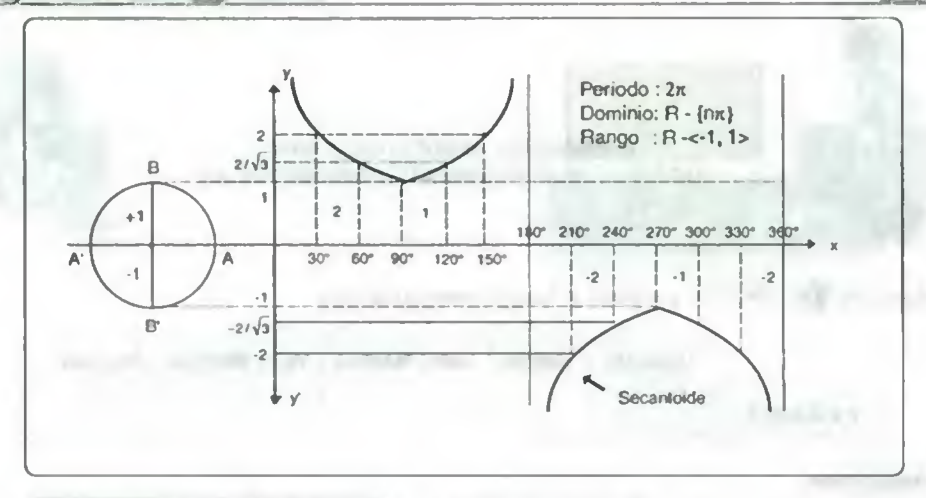
Tipo de Curva: Discontinua; cada rama está comprendida entre dos asíntotas.

7.1.6 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN COSECANTE:

y = cosec x

Para graficar dicha función, tabulamos de la siguiente manera:

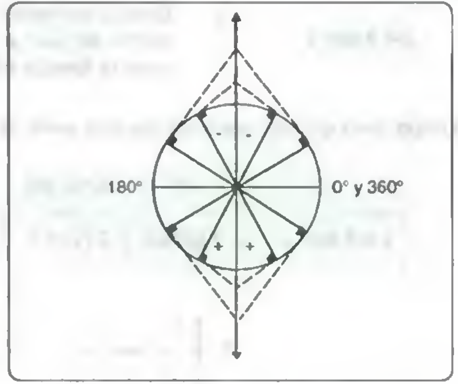
x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
y = cosec x	$\nexists$	2	$2/\sqrt{3}$	1	$2/\sqrt{3}$	2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$-2/\sqrt{3}$	-2	$\nexists$



VARIACIÓN:

Q_1 : 1 < cosec x < +∞ (decrece)
Q_2 : 1 < cosec x < +∞ (crece)
Q_3 : -∞ < cosec x < -1 (crece)
Q_4 : -∞ < cosec x < -1 (decrece)

cosec 0° = No existe (∄)	cosec 90° = +1
cosec 180° = No existe (∄)	cosec 270° = -1
cosec 360° = No existe (∄)	



Análisis del Gráfico:

Extensión: Es la misma que la función secante, osea mayor o igual a 1 y menor o igual a -1.

Periodo: Cada rama se repite cada 360°.

Tipo de Curva: Discontinua cada rama está comprendida entre dos "Asintotas".

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE GRÁFICA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Ejercicio 1 : Graficar: $y = 3$ sen x ; luego completar la tabla:

	Dominio	Rango	Valor Máximo	Valor Mínimo	Período
y = 3 sen x					

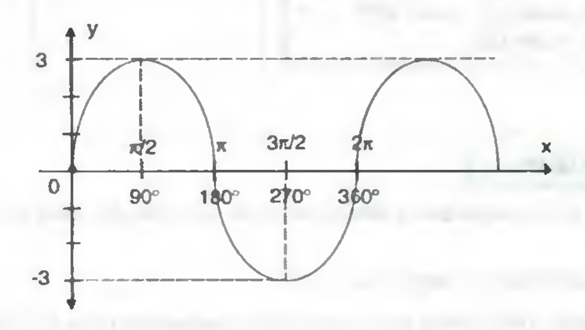
Resolución:

y = 3 sen x

- En esta expresión: "x" representa a los ángulos trigonométricos que varían de (+∞) a (-∞) e "y" representa los valores numéricos que toma la función trigonométrica.

Luego, para graficar necesitamos una serie de puntos (Ver la siguiente tabla).

x	0°	90° = π/2	180° = π	270° = 3π/2	360° = 2π
y = 3 sen x	3 (0) = 0	3 (1) = 3	3 (0) = 0	3 (-1) = -3	3 (0) = 0



Ahora, completamos la siguiente tabla:

	Dominio	Rango	Valor Máximo	Valor Mínimo	Periodo
y = 3 sen x	IR	$-3 \le y \le 3$	3	-3	$2\pi = 360°$

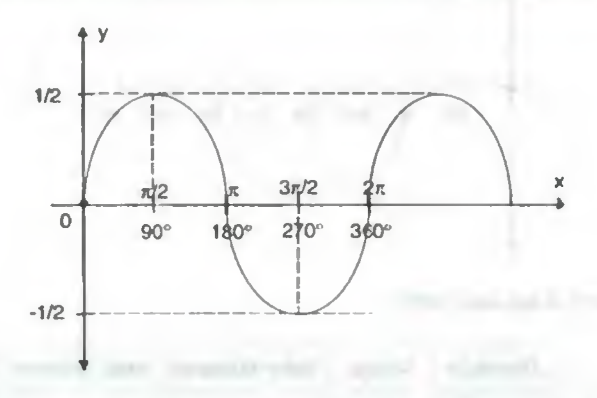
Ejercicio 2 : Graficar: y = 1/2 sen x ; luego completar la tabla:

	Dominio	Rango	Valor Máximo	Valor Mínimo	Período
y = 1/2 sen x					

Resolución:

- Por tabulación:

x	0°	90° = π/2	180° = π	270° = 3π/2	360° = 2π
y = 1/2 sen x	1/2 (0) = 0	1/2 (1) = 1/2	1/2 (0) = 0	1/2 (-1) = -1/2	1/2 (0) = 0



Ahora, completamos la siguiente tabla:

	Dominio	Rango	Valor Máximo	Valor Mínimo	Período
y = 1/2 sen x	IR	$-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$	1/2	-1/2	2π = 360°

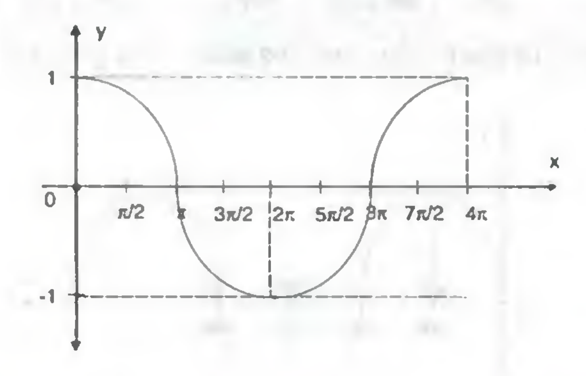
Ejercicio 3 : Graficar: y = cos 1/2 x ; luego completar la tabla:

	Dominio	Rango	Valor Máximo	Valor Mínimo	Período
y = cos 1/2 x					

Resolución:

- Por tabulación:

x	0°	90° = π/2	180° = π	270° = 3π/2	360° = 2π	450°=5π/2	540°=3π	630°=7π/2	720°=4π
y = cos 1/2 x	1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$	1



Ahora, completamos la siguiente tabla:

	Dominio	Rango	Valor Máximo	Valor Mínimo	Período
y = cos 1/2 x	IR	$-1 \le y \le 1$	1	-1	4π

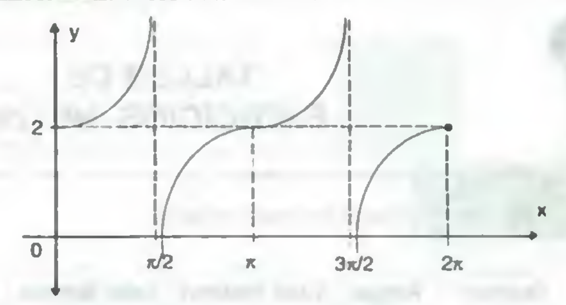
Ejercicio 4 : Graficar: y = 2 + tg x ; luego completar la tabla:

	Dominio	Rango	Valor Máximo	Valor Mínimo	Período
y = 2 + tg x					

Resolución:

- Por tabulación:

x	0°	90° = π/2	180° = π	270° = 3π/2	360° = 2π
y = 2 + tg x	y = 2 + 0 y = 2	y = 2 + ∄ y = ∄	y = 2 + 0 y = 2	y = 2 + ∄ y = ∄	y = 2 + 0 y = 2



Ahora, completamos la siguiente tabla:

	Dominio	Rango	Valor Máximo	Valor Mínimo	Período
y = 2 + tg x	$x \in \mathbb{R}$ y $x \neq (2K+1)\,\dfrac{\pi}{2}$	IR	----	----	π

- La función **tangente no alcanza** un valor máximo ni un valor mínimo.

TALLER DE EJERCICIOS Nº 26

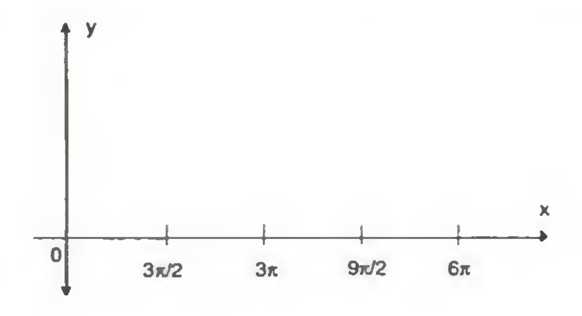
Ejercicio 1 : Graficar: $y = \text{sen}\ \frac{1}{3}x$; luego completar la tabla:

	Dominio	Rango	Valor Máximo	Valor Mínimo	Período
$y = \text{sen}\ \frac{1}{3}x$					

Resolución:

- Por tabulación:

x	0°	270°=3π/2	540° = 3π	810° = 9π/2	1 080° = 6π
$y = \text{sen}\ \frac{1}{3}x$					



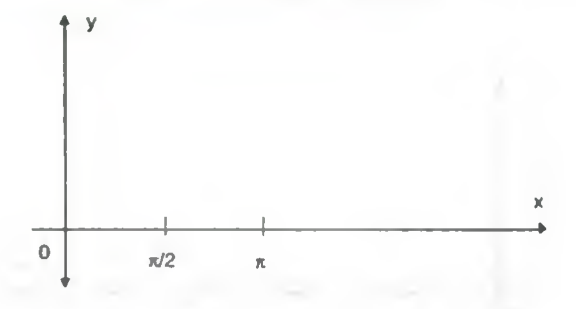
Ejercicio **2** : Graficar: $y = -1 + \cos 2x$; luego completar la tabla:

	Dominio	Rango	Valor Máximo	Valor Mínimo	Periodo
$y = -1 + \cos 2x$					

Resolución:

- Por tabulación:

x	0°	90° = π/2	180° = π
$y = -1 + \cos 2x$			



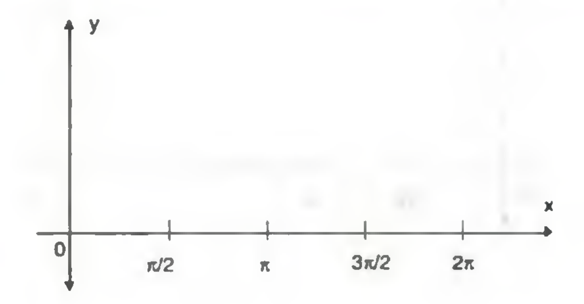
Ejercicio 3 : Graficar: $y = \text{Cotg } x - 3$; luego completar la tabla:

	Dominio	Rango	Valor Máximo	Valor Mínimo	Período
$y = \text{Cotg } x - 3$					

Resolución:

- Por tabulación:

x	0°	π/2 = 90°	π = 180°	3π/2 = 270°	2π = 360°
$y = \text{Cotg } x - 3$					



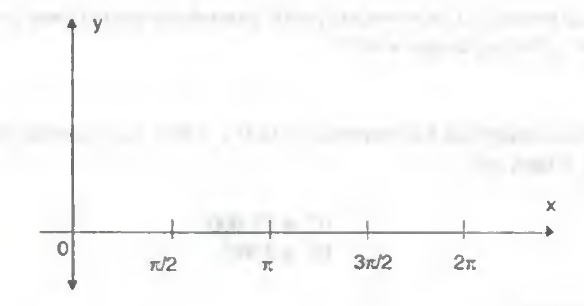
Ejercicio 4 : Graficar: $y = 1/2 + \sec x$; luego completar la tabla:

	Dominio	Rango	Valor Máximo	Valor Mínimo	Período
$y = 1/2 + \sec x$					

Resolución:

- Por tabulación:

x	0°	π/2	π	3π/2	2π
$y = 1/2 + \sec x$					



PARA RECORDAR

Si: $a \neq 0$ es real y **n** y **m** enteros, se verifica que:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Esta propiedad ya conocida puede extenderse para el caso de $a > 0$ real y *m* y *n* reales. ¿Por qué exigir $a > 0$?

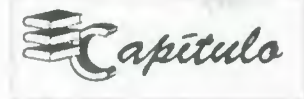
Para multiplicar los números 25 000 y 2 893, por ejemplo, buscaban los valores *a* y *b* tales que

$$10^a = 25\,000$$
$$10^b = 2\,893$$

y luego resolvían

$$10^a\,10^b = 10^{a+b}$$

con lo cual la multiplicación se transformaba en una suma. Los valores de *a* y *b* estaban en la tabla de logaritmos decimales, y con ella misma, haciendo el camino inverso encontraban el valor de 10^{a+b} que es el producto buscado.



Capítulo 8 TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS

8.1 TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS

8.1.1 TRANSFORMACIONES DE SUMA O DIFERENCIA A PRODUCTO (Factorización Trigonométrica)

Sabemos que:

$$+\begin{cases} \operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen} A \cos B + \cancel{\cos A \operatorname{sen} B} \\ \operatorname{sen}(A-B) = \operatorname{sen} A \cos B - \cancel{\cos A \operatorname{sen} B} \end{cases} \quad \text{Siendo: } A > B$$

Σ M.A.M: sen (A + B) + sen (A - B) = 2 sen A cos B

$$\therefore \quad \boxed{\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B) = 2 \operatorname{sen} A \cos B} \quad \text{...(I)}$$

$$-\begin{cases} \operatorname{sen}(A+B) = \cancel{\operatorname{sen} A \cos B} + \cos A \operatorname{sen} B \\ \operatorname{sen}(A-B) = \cancel{\operatorname{sen} A \cos B} - \cos A \operatorname{sen} B \end{cases} \quad \text{Siendo: } A > B$$

Restando M.A.M.: sen (A + B) - sen (A - B) = 2 cos A sen B

$$\therefore \quad \boxed{\operatorname{sen}(A+B) - \operatorname{sen}(A-B) = 2 \cos A \operatorname{sen} B} \quad \text{... (II)}$$

Además sabemos que:

$$+\begin{cases} \cos(A+B) = \cos A \cos B - \cancel{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B} \\ \cos(A-B) = \cos A \cos B + \cancel{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B} \end{cases} \quad \text{Siendo: } A > B$$

Σ M.A.M.: cos (A + B) + cos (A - B) = 2 cos A cos B

$$\therefore \quad \boxed{\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2 \cos A \cos B} \quad \text{...(III)}$$

$$-\begin{cases} \cos(A+B) = \cancel{\cos A \cos B} - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \\ \cos(A-B) = \cancel{\cos A \cos B} + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \end{cases} \quad \text{Siendo: } A > B$$

Restando M.A.M.: cos (A + B) - cos (A - B) = - 2sen A sen B

Cambiando el signo a todos sus términos, obtenemos:

$\therefore \quad \cos(A - B) - \cos(A + B) = 2 \text{ sen } A \text{ sen } B \quad ...(IV)$

Luego; hacemos los siguientes cambios de variables, veamos:

$$+\begin{cases} \text{i)} & A + B = x \\ \text{ii)} & A - B = y \end{cases}$$

$$\sum \text{M.A.M.: } 2A = x + y \implies A = \frac{x+y}{2} \quad ...(a)$$

De las expresiones:

$$-\begin{cases} \text{i)} & A + B = x \\ \text{ii)} & A - B = y \end{cases}$$

$$- \text{M.A.M.: } 2B = x - y \implies B = \frac{x-y}{2} \quad ...(b)$$

Luego, reemplazamos las expresiones (i), (ii), (a) y (b) en la (I), (II), (III) y (IV), obteniendo:

De (I): $\text{sen } x + \text{sen } y = 2 \text{ sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ ⟹ Siendo: $x > y$

De (II): $\text{sen } x + \text{sen } y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$ ⟹ Siendo: $x > y$

De (III): $\cos x - \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ ⟹ Siendo: $x > y$

De (IV): $\cos y - \cos x = 2 \text{ sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$ ⟹ Siendo: $x > y$

***Nota Importante:** Con el auxilio de estas fórmulas es posible pasar del producto a la suma o diferencia.*

CUADRO RESUMEN

Transformaciones Trigonométricas

1. De suma o Diferencia a Producto: (Factorización Trigonométrica)

Siendo: $x > y$

$$\text{sen } x + \text{sen } y = 2 \text{ sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos y - \cos x = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

2. De Producto a Suma o Diferencia:

Siendo: $A > B$

$2\operatorname{sen} A \,.\, \cos B = \operatorname{sen}(A + B) + \operatorname{sen}(A - B)$

$2\cos A \,.\, \operatorname{sen} B = \operatorname{sen}(A + B) - \operatorname{sen}(A - B)$

$2\cos A \,.\, \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$

$2\operatorname{sen} A \,.\, \operatorname{sen} B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Ejercicio 1: Transformar a producto las siguientes expresiones:

A) sen 18° + sen 4° **B)** sen 7° - sen 5° **C)** cos 5° + cos 3° **D)** cos 20° - cos 42°

Resolución:

A) $\operatorname{sen} 18° + \operatorname{sen} 4° = 2\operatorname{sen}\left(\frac{18° + 4°}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{18° - 4°}{2}\right)$

$\therefore \quad \operatorname{sen} 18° + \operatorname{sen} 4° = 2\operatorname{sen} 11° \cos 7°$

B) $\operatorname{sen} 7° - \operatorname{sen} 5° = 2\cos\left(\frac{7° + 5°}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{7° - 5°}{2}\right)$

$\therefore \quad \operatorname{sen} 7° - \operatorname{sen} 5° = 2\cos 6° \operatorname{sen} 1°$

C) $\cos 5° + \cos 3° = 2\cos\left(\frac{5° + 3°}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{5° - 3°}{2}\right)$

$\therefore \quad \cos 5° + \cos 3° = 2\cos 4° \cos 1°$

D) $\cos 20° - \cos 42° = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{42° + 20°}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{42° - 20°}{2}\right)$

$\therefore \quad \boxed{\cos 20° - \cos 42° = 2 \operatorname{sen} 31° \operatorname{sen} 11°}$

Ejercicio 2 : Expresar como Suma o Diferencia, según convenga las siguientes expresiones:

A) $2 \operatorname{sen} 30° . \cos 6° =$

B) $2 \operatorname{sen} 10° . \operatorname{sen} 40° =$

C) $2 \cos 50° . \cos 10° =$

D) $2 \operatorname{sen} 6° . \operatorname{sen} 3° =$

Resolución:

A) $2 \operatorname{sen} 30° . \cos 6° = \operatorname{sen}(30° + 6°) + \operatorname{sen}(30° - 6°)$

$\therefore \quad \boxed{2 \operatorname{sen} 30° . \cos 6° = \operatorname{sen} 36° + \operatorname{sen} 24°}$

B) $2 \operatorname{sen} 10° . \cos 40° = 2 \cos 40° . \operatorname{sen} 10° = \operatorname{sen}(40° + 10°) - \operatorname{sen}(40° - 10°)$

$\therefore \quad \boxed{2 \cos 40° . \operatorname{sen} 10° = \operatorname{sen} 50° - \operatorname{sen} 30°}$

C) $2 \cos 50° . \cos 10° = \cos(50° + 10°) + \cos(50° - 10°)$

$\therefore \quad \boxed{2 \cos 50° . \cos 10° = \cos 60° + \cos 40°}$

D) $2 \cos 6° \operatorname{sen} 3° = \cos(6° - 3°) - \cos(6° + 3°)$

$\therefore \quad \boxed{2 \cos 6° \operatorname{sen} 3° = \cos 3° - \cos 9°}$

Ejercicio 3 : Simplificar: $R = \cos 100° - \cos 40° + \cos 20°$

A) 1 B) 2 C) -1 D) 0 E) -2

Resolución:

Agrupando términos se tiene que:

$$R = (\cos 100° + \cos 20°) - \cos 40°$$

$$R = 2 \cos\left(\frac{100° + 20°}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{100° - 20°}{2}\right) - \cos 40°$$

$$R = 2 \cos 60° \cdot \cos 40° \; ; \; \text{Pero} : \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$R = \not{2} \cdot \frac{1}{\not{2}} \cdot \cos 40° - \cos 40° \Rightarrow \therefore \boxed{R = 0}$$ Rpta. D

Ejercicio 4: Reducir: $Q = \dfrac{\text{sen } 3\alpha + \text{sen } \alpha}{\cos 3\alpha + \cos \alpha}$

A) tg α **B)** tg 2α **C)** cotg 2α **D)** 2 tgα **E)** tg 4α

Resolución:

Aplicando formulas, se obtiene:

$$Q = \frac{\not{2}\,\text{sen}\left(\frac{3\alpha+\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{3\alpha-\alpha}{2}\right)}{\not{2}\cos\left(\frac{3\alpha+\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{3\alpha-\alpha}{2}\right)} = \frac{\text{sen } 2\alpha\cdot\cancel{\cos\alpha}}{\cos 2\alpha\cdot\cancel{\cos\alpha}}$$

$$Q = \frac{\text{sen } 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \text{tg } 2\alpha \Rightarrow \therefore \boxed{Q = \text{tg } 2\alpha}$$ **Rpta. B**

Ejercicio 5: Calcular: E = sen 20° . cos 10° + cos 50° . sen 40°

A) 2/3 **B)** 3/4 **C)** 3/2 **D)** 4/3 **E)** 2

Resolución:

Para que los términos del segundo miembro tengan la forma de las expresiones estudiadas, multiplicamos ambos miembros "x2" Asi:

$$2E = 2(\text{sen } 20°\cdot\cos 10° + \cos 50°\cdot\text{sen } 40°)$$

$$2E = 2\,\text{sen } 20°\cdot\cos 10° + 2\cos 50°\cdot\text{sen } 40°$$

$$2E = [\text{sen}(20°+10°) + \text{sen}(20°-10°)] + [\text{sen}(50°+40°) - \text{sen}(50°-40°)]$$

$$2E = \text{sen } 30° + \cancel{\text{sen } 10°} + \text{sen } 90° - \cancel{\text{sen } 10°}\text{ ; Pero :}$$

$$\text{sen } 30° = \frac{1}{2} \qquad \text{sen } 90° = 1$$

$$2E = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow \therefore \boxed{E = \frac{3}{4}}$$ **Rpta. B**

Ejercicio 6: Reducir: $T = \sqrt{1 + \text{sen } 50°} + \sqrt{1 - \text{sen } 50°}$

A) 2 cos 25° **B)** 2 sen 25° **C)** 4 cos 50° **D)** 4 sen 50° **E)** 4 sen 75°

Resolución:

Elevamos al cuadrado, ambos miembros:

$$T^2 = \left(\sqrt{1+\text{sen } 50°} + \sqrt{1-\text{sen } 50°}\right)^2 \text{ ; Pero : } (A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2\,AB$$

$$T^2 = \left(\sqrt{1+\text{sen } 50°}\right)^2 + \left(\sqrt{1-\text{sen } 50°}\right)^2 + 2\sqrt{1+\text{sen } 50°}\;\sqrt{1-\text{sen } 50°}$$

$$T^2 = 1 + \text{sen } 50° + 1 - \text{sen } 50° + 2\sqrt{(1+\text{sen } 50°)(1-\text{sen } 50°)}$$

$$T^2 = 2 + 2\sqrt{1^2 - \text{sen}^2 50°} \qquad (A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

$$T^2 = 2 + 2\sqrt{1-\text{sen}^2 50°} \text{ ; } \quad \text{Pero : } 1 - \text{sen}^2\alpha = \cos^2\alpha$$

$$\text{Donde : } 1 - \text{sen}^2 50° = \cos^2 50°$$

$$T^2 = 2 + 2\sqrt{\cos^2 50°}$$

$$T^2 = 2 + 2\cos 50° = 2(1+\cos 50°) \text{ ; Pero : } 1 = \cos 0°$$

$$T^2 = 2(\cos 0° + \cos 50°) = 2(\cos 50° + \cos 0°)$$

$$T^2 = 2\left[2\cos\left(\frac{50°+0°}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{50°-0°}{2}\right)\right] = 4\cos 25°\cdot\cos 25° = 4\cos^2 25°$$

$$T = \sqrt{4\cos^2 25°} = 2\cos 25° \quad \Rightarrow \quad \therefore \boxed{T = 2\cos 25°}$$ **Rpta. A**

Ejercicio 7 : Reducir: $\text{sen } x\ \text{sen } 2x\left[\dfrac{\text{sen } 3x - \text{sen } x}{\text{sen } 6x - \text{sen } 2x}\right]$

A) $\left(\frac{1}{2}\right)$ tgx cotg 2x B) $\left(\frac{1}{2}\right)$ tg 2x cotg 3x C) $\left(\frac{1}{4}\right)$ tg x tg 2x

D) $\left(\frac{1}{4}\right)$ tg x tg 4x E) $\left(\frac{1}{8}\right)$ cotg x tg 4x

Resolución:

- $\text{sen } 3x - \text{sen } x = 2\cos\left(\dfrac{3x+x}{2}\right)\cdot\text{sen}\left(\dfrac{3x-x}{2}\right) = 2\cos 2x\cdot\text{sen } x$

•• $\text{sen } 6x - \text{sen } 2x = 2\cos\left(\dfrac{6x+2x}{2}\right)\cdot\text{sen}\left(\dfrac{6x-2x}{2}\right) = 2\cos 4x\cdot\text{sen } 2x$

Luego: $\text{sen } x\ \text{sen } 2x\left[\dfrac{\text{sen } 3x - \text{sen } x}{\text{sen } 6x - \text{sen } 2x}\right] = \text{sen } x\ \text{sen } 2x\left[\dfrac{2\cos 2x\cdot\text{sen } x}{2\cos 4x\cdot\text{sen } 2x}\right]$

$$= \frac{\text{sen } x \cdot \text{sen } x \cdot \cos 2x}{\cos 4x}$$; multiplicamos el numerador y denominador por **"2 cos x"**

$$= \frac{\overbrace{2 \text{ sen } x \cos x}\, \text{sen } x \cos 2x}{2 \cos x \cdot \cos 4x}$$

$$= \frac{\text{sen } 2x \cdot \text{sen } x \cdot \cos 2x}{2 \cos x \cdot \cos 4x}$$; multiplicamos el numerador y denominador por **"2"**

$$= \frac{\overbrace{2 \text{ sen } 2x \cos 2x}\, \text{sen } x}{2 \cdot 2 \cos x \cdot \cos 4x} = \frac{\text{sen } 4x \text{ sen } x}{4 \cos x \cos x}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{\text{sen } x}{\cos x} \cdot \frac{\text{sen } 4x}{\cos 4x} = \boxed{\left(\frac{1}{4}\right) \text{tg } x \cdot \text{tg } 4x}$$ **Rpta. D**

Ejercicio 8 : Simplificar: $L = \dfrac{\text{sen } \theta + K\text{sen } 3\theta + \text{sen } 5\theta}{\cos \theta + K\cos 3\theta + \cos 5\theta}$

A) tg 9θ **B)** Ktg 2θ **C)** Ktg 3θ **D)** tg 6θ **E)** tg 3θ

Resolución:

$$L = \frac{(\text{sen}\theta + \text{sen}5\theta) + K\text{sen}3\theta}{(\cos\theta + \cos5\theta) + K\cos3\theta} = \frac{2 \text{ sen}\left(\frac{5\theta+\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{5\theta-\theta}{2}\right) + K\text{sen}3\theta}{2 \cos\left(\frac{5\theta+\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{5\theta-\theta}{2}\right) + K\cos3\theta}$$

$$L = \frac{2 \text{ sen}3\theta \cos2\theta + K\text{sen}3\theta}{2 \cos3\theta \cos2\theta + K\cos3\theta} = \frac{\text{sen}3\theta \,\cancel{(2 \cos2\theta + K)}}{\cos3\theta \,\cancel{(2 \cos2\theta + K)}}$$

$$L = \frac{\text{sen}3\theta}{\cos3\theta} = \text{tg } 3\theta$$

$$\therefore \boxed{L = \text{tg } 3\theta}$$ **Rpta. E**

TALLER DE EJERCICIOS Nº 27

Ejercicio 1 : La expresión:

$$M = \frac{\text{sen }\theta + \text{sen }3\theta}{\text{sen }2\theta + \text{sen }4\theta}$$; es igual a:

Resolución:

Rpta. $\text{sen }2\theta \cdot \text{cosec }3\theta$

Ejercicio 2 : La expresión:

$$\frac{\text{sen }x + \text{sen }y}{\cos x + \cos y}$$; es igual a:

Resolución:

Rpta. $\text{tg}\left(\frac{x+y}{2}\right)$

Ejercicio 3 : Simplificar:

$$E = \frac{\cos 100° + \cos 20°}{\text{sen}50°}$$

Resolución:

Rpta. $E = 1$

Ejercicio 4 : Simplificar:

$$R = \text{sen }40° - \cos 10° + \text{sen }20°$$

Resolución:

Rpta. R = Cero

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS

NIVEL I

Ejercicio 1: Reducir a monomio:

$$(\cos 6\alpha + \cos 2\alpha) \,.\, \sec 4\alpha$$

A) $2 \cos 2\alpha$ B) $4 \cos 2\alpha$ C) $2 \cos 4\alpha$
D) $\cos 4\alpha$ E) $\text{sen } 6\alpha$

Ejercicio 2: Efectuar:

$$T = \cos 4x \,.\, \text{sen } 2x + \text{sen } 5x \,.\, \cos 3x - \text{sen } 7x \,.\, \cos x$$

A) 1 B) 0 C) -1 D) 2 E) N.A.

Ejercicio 3: Simplificar:

$$A = \frac{\text{sen } x + \text{sen } 2x + \text{sen } 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x}$$

A) $\text{tg } 4x$ B) $\text{cotg } 2x$ C) $\text{cotg } x$
D) $\text{tg } 2x$ E) $\text{tg } x$

Ejercicio 4: Simplificar:

$$N = \frac{\cos 75° + \text{sen } 25° + \cos 55° + \text{sen } 45°}{\text{sen } 20° + \cos 50°}$$

A) $4 \cos 5°$ B) $2 \cos 5°$ C) $4 \cos 10°$
D) $2 \cos 10°$ E) $\cos 10°$

Ejercicio 5: Simplificar:

$$P = \text{sen } 20° \; \text{sen } 40° + \frac{3}{8} \text{cosec } 10°$$

A) $\text{cotg } 20°$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2} \text{cotg } 20°$

C) $\frac{1}{2} \text{cotg } 20°$ D) $\text{tg } 20°$

E) $\frac{\sqrt{3}}{2} \text{tg } 20°$

Ejercicio 6: Simplificar:

$$M = \frac{\cos 40° \cdot \cos 10° - \cos 50° \cdot \cos 20°}{\text{sen } 20° \cdot \text{sen } 40°}$$

A) $\text{Sen } 10°$ B) $2 \text{ sen } 10°$ C) $\text{sen } 20°$
D) $2 \cos 20°$ E) $2 \text{ sen } 20°$

Ejercicio 7: Simplificar:

$$R = \frac{\text{sen}\alpha + m \text{ sen } 2\alpha + \text{sen } 3\alpha}{\cos\alpha + m \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}$$

A) $\text{tg } 2\alpha$ B) $\text{tg } 4\alpha$ C) $\text{tg } 3\alpha$
D) $\text{tg } \alpha$ E) m

Ejercicio 8: Marque lo incorrecto:

A) $\cos 20° - \cos 80° = \text{sen } 50°$
B) $\text{sen } 40° + \text{sen } 20° = \text{sen } 80°$
C) $\cos 10° - \text{sen } 20° = \cos 50°$
D) $\cos 40° + \text{sen } 10° = \text{sen } 70°$
E) $\text{sen } 20° + \cos 40° = \text{sen } 10°$

Clave de Respuestas

1. A	2. B	3. D	4. B	5. B
6. E	7. A	8. E		

NIVEL II

Ejercicio 1: Reducir: $y = 1 + 4 \cos 20°$

A) $\sqrt{3} \text{ tg } 20°$ B) $\text{tg } 20°$ C) $\text{cotg } 20°$
D) $\sqrt{3} \text{ cotg } 20°$ E) $\sqrt{3}$

Ejercicio 1 : Transformar a producto:

$$R = \text{sen } a - \text{sen } 2a + \text{sen } 3a$$

A) $4 \text{ sen } \frac{a}{2} \cos a \cos \frac{3a}{2}$

B) $2 \text{ sen } \frac{a}{2} \cos a \cos \frac{3a}{2}$

C) $4 \cos \frac{a}{2} \cos a \cos \frac{3a}{2}$

D) $4 \text{ sen } \frac{a}{2} \text{ sen } a \text{ sen } \frac{3a}{2}$

E) N.A.

Ejercicio 2 : Diga cuáles son correctas:

I. $\text{sen}^2 20° - \text{sen}^2 10° = 0{,}5 \text{ sen } 10°$
II. $\cos^2 50° - \text{sen}^2 10° = 0{,}5 \cos 40°$
III. $\text{sen}^2 40° - \text{sen}^2 20° = 0{,}5 \text{ sen } 20°$

A) I B) I y II C) I y III D) Todas E) II

Ejercicio 3 : Calcular:

$$P = \frac{3 \text{ sen } 10° + \sqrt{3}\cos 10° + 2\sqrt{3} \cos 40°}{\cos 55° + \sqrt{3} \text{ sen } 55°}$$

A) $\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}$

Ejercicio 4 : Simplificar:

$$R = \frac{\sec 40° + \text{cosec } 10°}{1 + \text{sen } 50°}$$

A) 1/2 B) 2 C) 4 D) 8 E) 6

Ejercicio 5 : Simplificar:

$$Q = \frac{\text{sen } a}{2 \cos a} + \frac{\text{sen } 2a}{\cos 2a + \cos 4a}$$

A) tg 3a B) (1/2) tg 3a C) $\frac{\text{sen } 3a}{\cos 6a}$
D) cotg 3a E) (1/2) cotg 3a

Ejercicio 6 : Expresar como producto:

$$K = \sqrt{3} + 2 \text{ sen } 20°$$

A) 4 sen 28° cos 48° B) 4 sen 48° cos 28°
C) 2 sen 20° cos 40° D) 4 cos 40° sen 20°
E) 4 sen 40° cos 20°

Ejercicio 7 : Reducir:

$$Q = \sqrt{1 + \cos 20°} - \sqrt{1 - \cos 20°}$$

A) $2 \text{ sen}^2 35°$ B) 4 sen 35° C) 2 sen 35°
D) 4 cos 65° E) N.A.

Ejercicio 8: Hallar el valor de "R" para $\alpha = 20°$

$$R = \cos \alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha$$

A) 1/4 B) 1/2 C) 1 D) 0 E) 2

Ejercicio 10 : Reducir: A = sen 7x cos 2x + cos 8x . sen 3x

A) sen 10 x cos x B) cos 10 x sen x
C) sen 10 x sen x D) cos 10 x cos x
E) sen 8x cos 7x

Clave de Respuestas

1. D	2. A	3. B	4. A	5. C
6. B	7. E	8. C	9. D	10. A

8.2 ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Se denomina ecuación trigonométrica a la igualdad condicional que se verifica, para un determinado conjunto de valores atribuido a los ángulos.

Solución Principal: Es aquella de menor valor absoluto de todas las soluciones particulares positivas o negativas.

Solución Particular: Es el conjunto formado por todos los ángulos que satisfacen una ecuación.

Clasificación:

- Las ecuaciones trigonométricas pueden ser:

a) Ecuaciones Trigonométricas de Primer Tipo:

Son aquellas en las cuales se presentan funciones iguales o diferentes pero siempre el mismo ángulo.

Ejemplos: i) $\text{sen}^2 A - 2\,\text{sen}\,A + 1 = 0$ ii) $\text{sen}\,2b + \cos 2b = 1$

b) Ecuaciones Trigonométricas de Segundo Tipo:

Son aquellas en las cuales se presentan funciones iguales o diferentes pero siempre ángulos diferentes.

Ejemplos: i) $\text{sen}\,\theta - \text{sen}\,2\theta + \text{sen}\,3\theta = 0$ ii) $\text{tg}\,(45° + x) - \text{tg}\,2x = \text{cotg}\,x$

c) Ecuaciones Trigonométricas de Tercer Tipo:

Son aquellos en las cuales se presentan funciones circulares inversas.

Ejemplos: i) $\text{arc sec}\,(\cos x) = 0$ ii) $\text{arc tg}\,(x + 1) - \text{arc tg}\,(x - 1) = 0$

8.2.1 ECUACIÓN TRIGONOMÉTRICA ELEMENTAL

Es la ecuación más simple que se puede presentar:

Forma General: ➡ $F(x) = a$

Donde:

F = Operador Trigonométrico como: sen, cos, tg, ...
x = Valor angular como: $\alpha°$, $\beta°$, $\theta°$, ...
a = Valor numérico

Ejemplo: Resolver: $\text{Sen}\,x = \dfrac{1}{2}$

Resolución:

La solución de esta ecuación, se logra identificando el valor del ángulo veamos:

$$\text{sen } x = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen } x = \text{sen } 30° \Rightarrow \therefore \boxed{x = 30°}$$ *Solución Principal*

Nota: Es importante recalcar que si la variable no está afectada por algún operador trigonométrico, entonces esta igualdad no es una ecuación trigonométrica.

Ejemplo: $x - \text{sen}(x) = 0$ *No es una Ec. Trigonométrica*

Esta variable no esta afectada por algún Operador Trigonométrico.

FÓRMULAS GENERALES

a) Para el seno y el cosecante

$$x_g = 180° k + (-1)^k x_p$$

b) Para el coseno y secante

$$x_g = 360° k \pm x_p$$

c) Para la tangente y cotangente

$$x_g = 180° k + x_p$$

Donde: $k = 0 ; \pm 1 ; \pm 2 ; \pm 3 ; ......$

x_p = Solución Principal
x_g = Solución General

8.2.2 RECOMENDACIONES GENERALES PARA RESOLVER UNA ECUACIÓN:

1. Toda ecuación debe tratar de expresarse en términos de una sola función y de un sólo ángulo, de manera que dicha función se calcule mediante un proceso algebraico.

2. Si la ecuación es homogénea en seno y coseno se debe dividir entre el coseno elevado al grado de homogeneidad, lo cual conduce a una ecuación en la función tangente únicamente.

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Ejercicio 1: Resolver: $2 \text{ sen } \theta - 1 = 0$; para: $0° \leq \theta \leq 360°$

Resolución:

- De la ecuación: $2 \text{ sen } \theta - 1 = 0$

Obtenemos: $2 \text{ sen } \theta = 1 \Rightarrow \text{sen } \theta = \dfrac{1}{2}$; pero : $\dfrac{1}{2} = \text{sen } 30°$

$$\text{sen } \theta = \text{sen } 30°$$

$\therefore \theta = 30°$ (Solución Principal) $\Rightarrow$ $x_p = 30°$

De la Fórmula General: $x_g = 180° K + (-1)^k . x_p$

Cuando: $K = 1 \Rightarrow x = 180° (1) + (-1)^1 (30°) \Rightarrow x = 180° - 30° \Rightarrow \theta = 150°$

Cuando: $k = 2 \Rightarrow x = 180° (2) + (-1)^2 (30°) \Rightarrow x = 360° + 30° \Rightarrow \theta = 390°$

Luego, las soluciones que satisfacen dicha ecuación son: $S = \{30° ; 150°\}$ ***Rpta.***

Ejercicio 2 : Resolver: $\cos \theta - 2 \cos \theta \text{ sen } \theta = 0$; para: $0° \leq \theta \leq 360°$

Resolución:

En la ecuación dada; factorizamos "cos θ"; obteniendo:

$\cos \theta (1 - 2 \text{ sen } \theta) = 0$; igualamos cada factor a cero.

i) $\cos \theta = 0$; **ii)** $(1 - 2 \text{ sen } \theta) = 0 \Rightarrow 1/2 = \text{sen } \theta$

- De la expresión: $\cos \theta = 0$; sabemos que: $0 = \cos 90°$

$$\cos \theta = \cos 90°$$

$\therefore$ $\theta = 90°$ (Solución Principal) $x_p = 90°$

De la fórmula General para el coseno: $x_g = 360° K \pm x_p$

Cuando: K = 1 ➡ x = 360° (1) - 90° ➡ x = 360° - 90° ➡ θ = 270°

- De la expresión: $\text{sen } \theta = \frac{1}{2}$; sabemos que : $\frac{1}{2} = \text{sen } 30°$

  sen θ = sen 30° ➡ ∴ θ = 30° (Solución Principal) ➡ $x_p = 30°$

De la fórmula General para el seno: $x_g = 180° K + (-1)^k . x_p$

Cuando: K = 1 ➡ $x = 180° (1) + (-1)^1 . 30°$ ➡ x = 180° - 30° ➡ ∴ θ = 150°

Luego las soluciones que satisfacen dicha ecuación son: S = {30° ; 90° ; 150° ; 270°} **Rpta.**

Ejercicio 3 : Resolver: sen θ - sen θ cotg θ = 0 ; para: 0° ≤ θ < 360°

Resolución:

En la ecuación dada; factorizamos: "sen θ"; obteniendo:

sen θ (1 - cotg θ) = 0 ; igualamos cada factor a cero.

i) sen θ = 0 **ii)** (1 - cotg θ) = 0 ➡ cotg θ = 1

- De la expresión: sen θ = 0 ; sabemos que: 0 = sen 0°

  sen θ = sen 0° ➡ ∴ θ = 0° *(Solución Principal)*

De la Fórmula General para el seno: $x_g = 180° k + (-1)^k . x_p$

Cuando: K = 1 ➡ $x = 180° (1) + (-1)^1 . 0°$ ➡ x = 180° ➡ θ = 180°

De la expresión: cotg θ = 1; sabemos que: 1 = cotg 45°

cotg θ = cotg 45° ➡ ∴ θ = 45° *(Solución Principal)*

De la Fórmula General para la Cotangente: $x_g = 180° K + x_p$

Cuando: K = 1 ➡ x = 180° (1) + 45° ➡ x = 225° ➡ θ = 225°

Luego, las soluciones que satisfacen dicha ecuación son: S = {45° ; 225°} ***Rpta.***

Recomendación: *Estimado alumno es recomendable que verifiques dichas soluciones halladas en la ecuación dada, como observarás en éste último ejercicio al reemplazar las soluciones de 0° y 180° en la ecuación inicial o sea:* sen θ - sen θ . cotg θ = 0

sen 0° - sen 0° . cotg 0° = 0 → *Este valor no existe*

TALLER DE EJERCICIOS Nº 28

Ejercicio 1 : Resolver:

$2\cos\theta - \sqrt{3} = 0$; para: $0° \leq \theta \leq 360°$

Resolución:

Rpta. S = {30° ; 330°}

Ejercicio 2 : Resolver:

$sen^2\theta - 2\,sen\,\theta = 0$; pero: $0° \leq \theta \leq 360°$

Resolución:

Rpta. S = {0° ; 180°}

Ejercicio 3 : Resolver:

$2\,sen^2\,\theta - sen\,\theta - 1 = 0$; para: $0° \leq \theta \leq 360°$

Resolución:

Rpta. S = {90° ; 210° ; 330°}

Ejercicio 4 : Resolver:

$tg\,\theta \cdot sen\,\theta - \sqrt{3}\,sen\,\theta = 0$;

para : $0° \leq \theta \leq 360°$

Resolución:

Rpta. S = {0° ; 60° ; 180° ; 240°}

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

NIVEL I

Ejercicio 1: Resolver: $2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 = 0$; dar como respuestas el valor para "θ"

A) 0° B) 30° C) 60° D) 90° E) 45°

Ejercicio 2: Resolver: $\sec^2\alpha + tg^2\alpha = 3\,tg\,\alpha$

A) 30° B) 45° C) 60° D) 75° E) 90°

Ejercicio 3: Resolver: $sen\,2x + \cos x = 0$

A) 150° B) 210° C) 90° D) 0° E) 240°

Ejercicio 4: Resolver:

$$tg^2\theta - tg\,\theta = 0\ ;\ 180° < \theta < 270°$$

A) 185° B) 225° C) 220° D) 240° E) 260°

Ejercicio 5: Hallar el menor arco positivo que cumple:

$$tg\,2x + cotg\,x = 8\cos^2 x$$

A) $\pi/12$ B) $\pi/6$ C) $\pi/5$ D) $\pi/24$ E) $\pi/2$

Ejercicio 6: Resolver: $sen\,5x = sen\,x$

A) $(2K+1)\frac{\pi}{6}$ B) $(2K+1)\frac{\pi}{3}$; $K\frac{\pi}{2}$

C) $(2K+1)\frac{\pi}{6}$; $K\frac{\pi}{2}$ D) $(2K+1)\frac{\pi}{5}$

E) $(2K+1)\frac{\pi}{3}$; $K\frac{\pi}{4}$

Ejercicio 7: Resolver:

$$\sqrt[5]{tg\ x} + \sqrt[5]{cotg\ x} = 2$$

A) $K\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$ B) $K\pi + \frac{\pi}{4}$ C) $K\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

D) $2K\pi + \frac{\pi}{3}$ E) $K\pi + \frac{\pi}{3}$

Ejercicio 8: Resolver:

$$cotg\,x + cosec\,x = sen\,x$$

A) $(2K+1)\frac{\pi}{2}$; $(2K+1)\pi$ B) $(2K+1)\frac{\pi}{2}$

C) $(2K+1)\frac{\pi}{2}$; $2K\pi - \frac{\pi}{3}$ D) $K\pi + \frac{\pi}{3}$

E) $K\pi - \frac{\pi}{6}$

Ejercicio 9: Resolver:

$$4\cos x - 3\sec x = 2\,tg\,x$$

A) $K\pi + (-1)^K\frac{\pi}{10}$ B) $K\pi - (-1)^K\frac{3\pi}{10}$

C) $K\pi + (-1)^K\frac{\pi}{5}$ D) $K\pi + (-1)^K\frac{\pi}{10}$

E) $K\pi - (-1)^K\frac{3\pi}{5}$

Ejercicio 10: Si: $x \in [0\,;2\pi]$; Hallar el número de soluciones de:

$$1 + 2\,sen\,x = 2\cos^2 x + \cos 2x$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

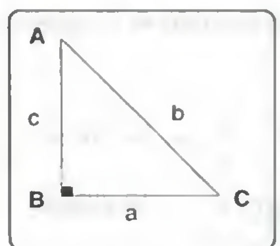
Clave de Respuestas

1. A	2. B	3. B	4. B	5. D
6. C	7. B	8. B	9. B	10. C

Resolución de Triángulos Rectángulos

- Para resolver un triángulo rectángulo basta dar dos elementos, uno de los cuales por lo menos debe ser un lado.

Previamente establecemos unas relaciones entre los elementos de un triángulo rectángulo.



Dichas relaciones son las siguientes:

I) Relación entre los tres lados:

$b^2 = a^2 + c^2$ ***Teorema de Pitágoras***

II) Relación entre los dos ángulos agudos: $\widehat{A} + \widehat{C} = 90°$

III) Relación entre la hipotenusa, un cateto y un ángulo agudo.

Del $\triangle$ ABC: $\operatorname{sen}\widehat{C} = \dfrac{c}{b} \Rightarrow c = b\operatorname{sen}\widehat{C}$ $\quad$ $\cos\widehat{A} = \dfrac{c}{b} \Rightarrow c = b\cos\widehat{A}$

Luego: $c = b\operatorname{sen}\widehat{C} = b\cos\widehat{A}$

También: $\cos\widehat{C} = \dfrac{a}{b} \Rightarrow a = b\cos\widehat{C}$ $\quad$ $\operatorname{sen}\widehat{A} = \dfrac{a}{b} \Rightarrow a = b\operatorname{sen}\widehat{A}$

Luego: $a = b\cos\widehat{C} = b\operatorname{sen}\widehat{A}$

IV) Relación entre los dos catetos y un ángulo agudo del mismo $\triangle$ ABC:

$\operatorname{tg}\widehat{C} = \dfrac{c}{a} \Rightarrow c = a\operatorname{tg}\widehat{C}$ $\quad$ $\operatorname{cotg}\widehat{A} = \dfrac{c}{a} \Rightarrow c = a\operatorname{cotg}\widehat{A}$

Luego: $c = a\operatorname{tg}\widehat{C} = a\operatorname{cotg}\widehat{A}$

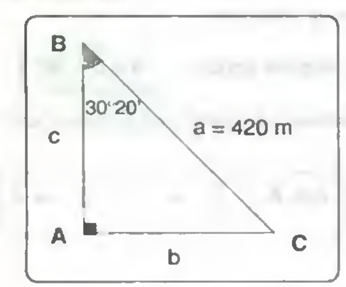
También: $\cot g\ \hat{C} = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c\ \cot g\ \hat{C}$ $\operatorname{tg}\ \hat{A} = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c\ \operatorname{tg}\ \hat{A}$

Luego: $a = c\ \cot g\ \hat{C} = c\ \operatorname{tg}\ \hat{A}$

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Problema 1 : Resuelve el triángulo rectángulo BAC, con el ángulo recto en A, sabiendo que $a = 420$ m y $\angle B = 30°20'$.

Resolución:



- En el ◺ BAC: $\operatorname{sen} B = \frac{b}{a} \Rightarrow \operatorname{sen} 30°20' = \frac{b}{420}$

Donde: $420 \cdot \operatorname{sen} 30°20' = b$ — *(Ver en tabla)*

$420\ (0{,}505\ 0) = b \quad \therefore \quad b = 212{,}10$ m

Además: $\cos B = \frac{c}{a} \Rightarrow \cos 30°20' = \frac{c}{420}$

Donde: $420 \cos 30°20' = c$ — *(Ver en tabla)* $\quad 420\ (0{,}863\ 1) = c \Rightarrow \therefore \quad c = 362{,}50$ m

Problema 2 : Resuelve el triángulo rectángulo BAC; con el ángulo recto en B, sabiendo que el cateto $c = 20$ m y el ángulo A mide $40°10'$.

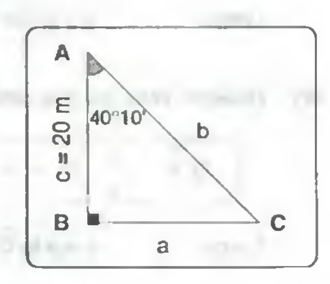
Resolución:

- En el ◺ BAC: $\operatorname{tg} A = \frac{a}{c} \Rightarrow \operatorname{tg} 40°10' = \frac{a}{20}$

Donde: $20 \cdot \operatorname{tg} 40°10' = a$

$20\ (0{,}844\ 1) = a \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad a = 16{,}88$ m

Además: $\sec A = \frac{b}{c} \Rightarrow \sec 40°10' = \frac{b}{20}$

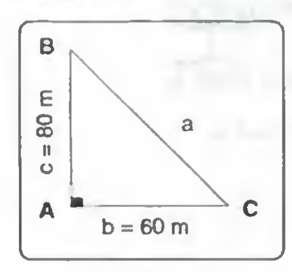


Donde: $20 \cdot \sec 40°10' = b$

$20\,(1{,}308\,6) = b \Rightarrow \therefore\ b = 26{,}17$ m

Problema 3 : Resuelve el triángulo BAC; con el ángulo recto en A, cuyos catetos miden 80 m y 60 m respectivamente.

Resolución:



- Por el teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$

Luego: $a^2 = (80)^2 + (60)^2 \Rightarrow a^2 = 6\,400 + 3\,600$

$a^2 = 10\,000 \Rightarrow a = \sqrt{10\,000}$

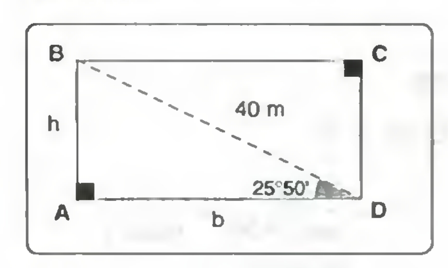
$\therefore\ a = 100$ m

En el ◺ BAC: $\text{tg } B = \dfrac{b}{c} \Rightarrow \text{tg } B = \dfrac{60}{80} = \dfrac{3}{4}$

$\text{tg } B = 0{,}75$ ***(Ver tabla)*** $\Rightarrow \therefore\ B = 36{,}86° \ 37°$

Problema 4 : La diagonal de un rectángulo mide 40 m y forma con la base un ángulo de 25°50'. Calcula el área del rectángulo.

Resolución:



- En el ◺ BAD:

$\text{sen } 25°50' = \dfrac{h}{40}$

$h = 40 \text{ sen } 25°50'$

$h = 40\,(0{,}435\,8)$

$\therefore\ h = 17{,}432$ m

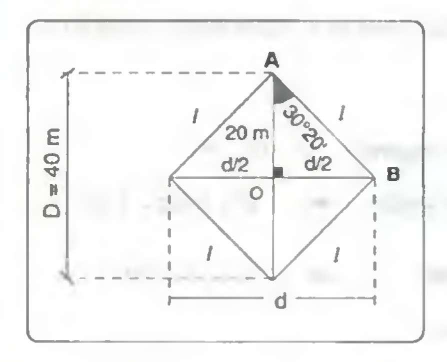
Además: $\cos 25°50' = \dfrac{b}{40}$

$b = 40 \cos 25°50' \Rightarrow b = 40\,(0{,}900\,1) \Rightarrow \therefore\ b = 36{,}004$ m

Luego: Área ▭ $= b \cdot h = 36{,}004 \text{ m} \times 17{,}432 \text{ m} \Rightarrow$ Área ▭ $= 627{,}622 \text{ m}^2$

Problema 5: Una de las diagonales de un rombo mide 40 m y forma con uno de los lados del mismo un ángulo de 30°20'. Calcular la otra diagonal y el perímetro del rombo.

Resolución:



- En el ◺ AOB: $\operatorname{tg} 30°20' = \dfrac{\frac{d}{2}}{20} = \dfrac{d}{40}$

Donde: $d = 40 \times \operatorname{tg} 30°20'$

$d = 40 \times (0{,}585\ 1)$

$\therefore\quad d = 23{,}404 \text{ m}$

Además: $\sec 30°20' = \dfrac{L}{20}$

Donde: $L = 20 \times \sec 30°20'$ ➡ $L = 20 \times (1{,}158\ 6)$ ➡ $\therefore$ $L = 23{,}172 \text{ m}$

Luego: Perímetro del rombo = 4L = 4 (23,172 m)

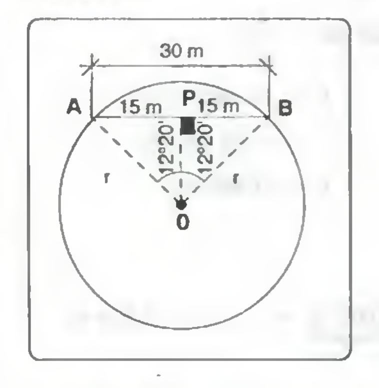
$\therefore$ Perímetro del rombo = 92,688 m

Recuerda que:

En un rombo los 4 lados son iguales y las diagonales se cortan perpendicularmente en su punto medio.

Problema 6: Hallar el área de un círculo en el que una cuerda de 30 m de largo subtiende un ángulo central de 24°40'.

Resolución:



- En el ◺ POB:

$\operatorname{sen} 12°20' = \dfrac{15}{r}$

$r = \dfrac{15}{\operatorname{sen} 12°20'} = \dfrac{15}{0{,}213\ 6}$

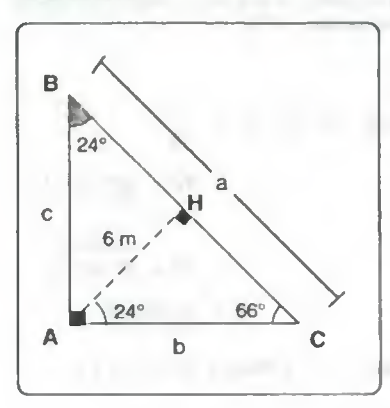
$\therefore\quad r = 70{,}22 \text{ m}$

Luego: Área del círculo = $\pi r^2 = 3{,}14\ (70{,}22 \text{ m})^2$

$\therefore$ Área del círculo = $15\ 482{,}86 \text{ m}^2$

Problema 7: Determinar las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo ABC, sabiendo que la altura correspondiente a la hipotenusa BC mide 6 m y forma un ángulo de 24° con el cateto "b"

Resolución:



- En el ◺ AHC: $\cos 24° = \dfrac{6}{b}$

$$b = \frac{6}{\cos 24°} = \frac{6}{0{,}913\ 5}$$

$$\therefore \quad b = 6{,}568\ 1 \text{ m}$$

- En el ◺ BAH: $\text{sen } 24° = \dfrac{6}{c}$

$$c = \frac{6}{\text{sen } 24°} = \frac{6}{0{,}406\ 7}$$

$$\therefore \quad c = 14{,}752\ 8 \text{ m}$$

- En el ◺ BAC: $\text{sen } 24° = \dfrac{b}{a}$

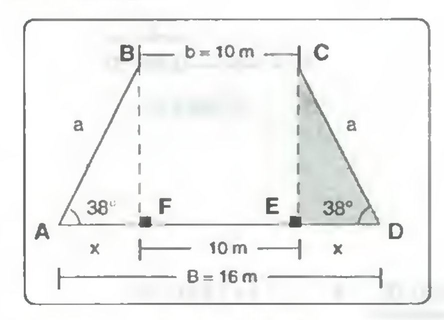
$$a = \frac{b}{\text{sen } 24°} = \frac{6{,}568\ 1}{0{,}406\ 7} \Rightarrow \therefore \quad a = 16{,}149\ 7 \text{ m}$$

Luego, las longitudes de los lados del triángulo ABC son:

$a = 16{,}149\ 7$ m ; $b = 6{,}568\ 1$ m y $c = 14{,}752\ 8$ m

Problema 8 : En un trapecio isósceles el ángulo en la base mayor mide 38° y las bases del trapecio miden 10 m y 16 m respectivamente. ¿Cuánto mide el perímetro del trapecio?

Resolución:



- De la figura: $x + 10 \text{ m} + x = 16 \text{ m}$

$$2x = 6\text{m} \Rightarrow x = 3\text{m}$$

- En el ◺ CED: $\cos 38° = \dfrac{x}{a} = \dfrac{3 \text{ m}}{a}$

$$a = \frac{3 \text{ m}}{\cos 38°} = \frac{3 \text{ m}}{0{,}788}$$

$$\therefore \quad a = 3{,}807\ 1 \text{ m}$$

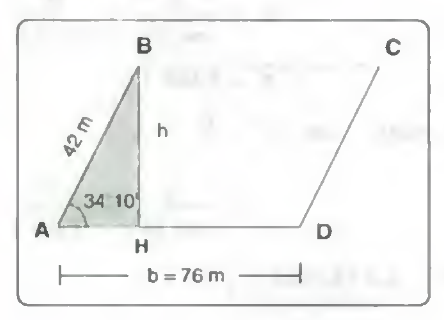
Luego: Perímetro del trapecio = suma de sus 4 lados

Perímetro ⏢ $= B + b + 2a = 16 \text{ m} + 10 \text{ m} + 2\,(3{,}807\ 1 \text{ m})$

$\therefore$ Perímetro ⏢ $= 33{,}614\ 2$ m

Problema 9 : Los lados consecutivos de un paralelogramo miden 76 m y 42 m respectivamente Hallar su área, si el ángulo comprendido entre dichos lados es de: 34°10'.

Resolución:



- En el ⊿ AHB: $\text{sen } 34°10' = \dfrac{h}{42}$

$h = 42 \times \text{sen } 34°10'$

$h = 42 \times (0{,}561\,6)$

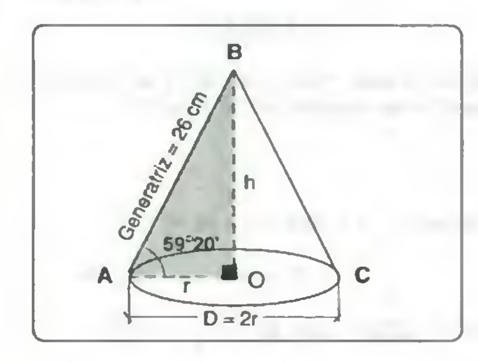
$\therefore \; h = 23{,}587\,2 \text{ m}$

Luego: Área ▱ = Base x altura = b x h

Área ▱ = 76 m x 23,587 2 m ➡ ∴ **Área ▱ = 1 792,627 2 m²**

Problema 10 : Hallar la altura y el diámetro de la base de un cono recto, cuya generatriz mide 26 cm la cual forma con la base un ángulo de 59°20'.

Resolución:



- En el ⊿ BOA:

$\text{sen } 59°20' = \dfrac{h}{26}$

$h = 26 \times \text{sen } 59°20'$

$h = 26 \times (0{,}860\,1)$

$\therefore \; h = 22{,}3626 \text{ cm}$

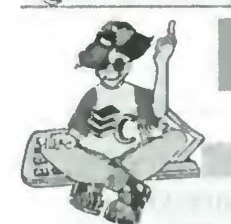
- En el ⊿ BOA: $\cos 59°20' = \dfrac{r}{26}$

$r = 26 \times \cos 59°20' \Rightarrow r = 26 \times (0{,}510\,0) \Rightarrow \therefore \; r = 13{,}26 \text{ cm}$

Luego: Diámetro del cono recto = 2r = 2 (13,26 cm)

∴ **D = 26,52 cm**

PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS



NIVEL I

Problema 1: Resuelve el triángulo rectángulo ABC, recto en B, sabiendo que: a = 20 m. $\angle A = 32°20'$.

Problema 2: Resuelve el triángulo rectángulo BAC, con el ángulo recto en "C", sabiendo que el cateto b = 40 m. y el ángulo "A" mide 30°40'.

Problema 3: Resuelve el triángulo rectángulo BAC, con el ángulo recto en "B", cuyos catetos miden 13 m y 5 m respectivamente.

Problema 4: La diagonal de un rectángulo mide 25 m y forma con la altura un ángulo de 67°50'. Calcular el área del rectángulo.

Problema 5: Una de las diagonales de un rombo mide 60 m y forma con uno de los lados del mismo un ángulo de 32°40'. Calcular la otra diagonal y el área del rombo.

Problema 6: Hallar el área de un círculo en el que una cuerda de 40 m de largo, subtiende un ángulo central 46°20'.

Problema 7: Determine la longitud de los lados de un triángulo rectángulo ABC, sabiendo que la altura correspondiente a la hipotenusa AB mide 4 m y forma un ángulo de 63° con el cateto "a".

Clave de Respuestas

1. b = 37,39 m y c = 31,59 m
2. a = 23,72 m y c = 46,50 m
3. Uno de sus ángulos = 21° y b = 13,93 m
4. 218,36 m^2
5. Diagonal = 32,38 m y área = 971,4 m^2
6. 8 119,42 m^2
7. a = 8,81 m; b = 4,48 m y c = 9,86 m

NIVEL II

Problema 8: En un trapecio isósceles el ángulo en la base mayor mide 34° si las bases del trapecio miden 12 m y 18 m, respectivamente. ¿Cuánto mide el área del trapecio?

Problema 9: Los lados consecutivos de un paralelogramo miden 70 m y 36 m respectivamente. Hallar su área si el ángulo comprendido entre dichos lados es de 26°20'.

Problema 10: Hallar el diámetro de la base de un cono recto, cuya generatriz mide 28 cm la cual forma con la base un ángulo de 45°40'.

Problema 11: El perímetro de un rombo es de 160 m y uno de sus ángulos es de 36°40'. ¿Cuánto miden sus diagonales?

Problema 12: La altura y la base menor de un trapecio isósceles miden 8 m y 14 m respectivamente si uno de los ángulos obtusos es de 126°. ¿Cuánto mide la mediana?

Problema 13: ¿Cuánto mide el lado de un exágono regular, inscrito en un círculo de 6,2 m de radio?

Clave de Respuestas

8.	30,345 m^2	**9.**	1 117,85 m^2
10.	39,13 m		
11.	d = 25,16 m y		D = 75,93 m
12.	19,81 m	**13.**	6,2 m

UN NÚMERO MISTERIOSO

Un naturalista del siglo XVIII, el conde Buffon, realizó muchos experimentos, el más famoso de los cuales es el "Problema de la Aguja".

Una superficie plana está dividida por líneas paralelas (como se muestra en la figura), separadas entre sí por una distancia H; tomando una aguja de longitud L, menor que H, Buffon la dejaba caer sobre la superficie rayada. Consideraba que la caída era favorable cuando la aguja quedaba atravesando una raya y desfavorable cuando caía entre dos rayas. Su sorprendente descubrimiento fue que la razón de éxitos a fracasos era una expresión en la que aparecía π.

En caso de que L sea igual a H, la probabilidad de un éxito es $2/\pi$.

A medida que aumentaba el número de pruebas, tanto más se aproximaba el resultado al valor de π.

Experimentos más completos fueron realizados en el año 1 901 por un matemático italiano, Lazzerini, quien dejó caer la aguja 3408 veces y obtuvo para π un valor igual a 3.1415929, con un error de sólo 0.0000003.

Resulta notable que el número π aparezca en muchas experiencias además de la conocida relación entre el diámetro y la longitud de la circunferencia.

ÁNGULOS HORIZONTALES

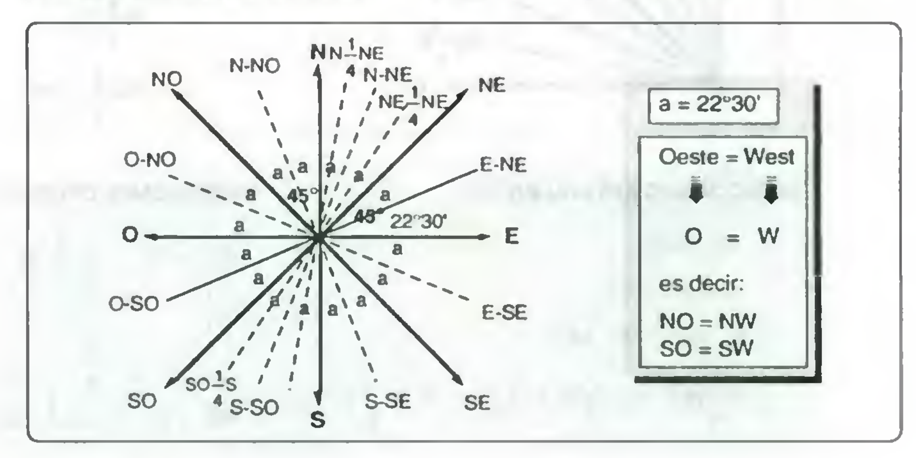
10.1 DEFINICIÓN:

Son aquellos ángulos, cuya medición se realiza en un plano horizontal. El instrumento de medición para estos ángulos se llama **Brújula.**

Su estudio también está basado en la resolución de triángulos rectángulos y por ende la aplicación de Razones Trigonométricas.

10.1.1 CONCEPTOS PRELIMINARES:

Rosa Naútica (o Rosa de los Vientos).- Es el plano, en el cual están contenidos las 32 direcciones notables de la brújula.



10.1.2 DIRECCIONES:

A. Principales.- Se evaluan a 90°

Ejemplos: N ; S ; E ; O

B. **Secundarias.-** Se evaluan a 45°

Ejemplos:

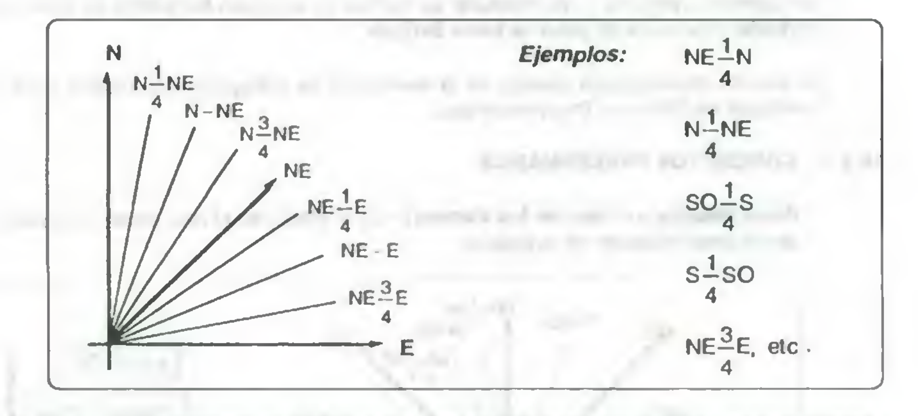
NE = Nor - Este	;	SO = Sur = Oeste
SE = Sur - Este	;	NO = Nor - Oeste

C. **Terciarias.-** Se evaluan a 22°30'

Ejemplos:

N - NE = Nor - Nor - Este	;	O -SO = Oeste - Sur - Oeste
E - NE = Este - Nor - Este	;	O - NO = Oeste - Nor - Oeste
S - SE = Sur - Sur - Este	;	N - NO = Nor - Nor - Oeste
S - SO = Sur - Sur - Oeste		

D. **Cuaternarias.-** Se evaluan a 11°5'



DIRECCIONES EQUIVALENTES

NE < > EN

S - SE < > S.E.

N - NO < > N - NO

$N\frac{1}{4}NO$ < > N N N E < > $NE\frac{3}{4}N$

DIRECCIONES OPUESTAS

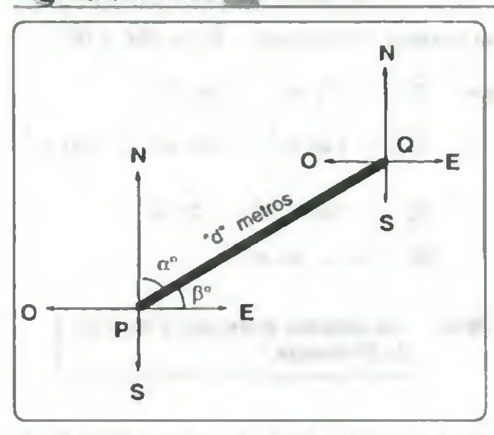
SO – O ; $E\frac{1}{4}NE$

↓ ↓

NE – E ; $O\frac{1}{4}SO$

10.1.3 RUMBO O DIRECCIÓN

Es la desviación angular que sufre la Rosa Naútica con respecto a las dos direcciones principales, al ubicar un punto.



NOMENCLATURAS:

a) El punto "Q" se encuentra en la dirección β° al Norte del Este y a "d" metros del punto "P".

b) El punto "Q" se encuentra en la dirección α° al Este del Norte y a "d" metros del punto "P".

c) El punto "Q" se encuentra en la dirección N α° E y a "d" metros del punto "P".

d) El punto "Q" se encuentra en la dirección E β° N y a "d" metros del punto "P".

Otros Ejemplos:

◆ El punto "A" se encuentra en la dirección S 20° E. N, O, E, 20°, S, A	◆◆ El punto "R" se encuentra en la dirección O 40° N y el punto "P" en la dirección NE. N, R, P, 45°, 40°, O, E, S	N, Nβ°O, Nα°E, β°, α°, O, E, θ, ϕ, Sθ°O, S, Sϕ°E

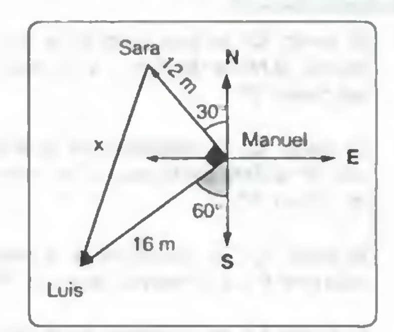
PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE ÁNGULOS HORIZONTALES

Problema 1: Luis se encuentra a 16 m de Manuel en la dirección S 60° O y Sara se encuentra a 12 m de Manuel en la dirección N 30° O. Hallar la distancia entre Luis y Sara.

Resolución:

Sea: **x** = La distancia entre Luis y Sara.

- En el ⊿ LMS, calculamos "x". Aplicando el teorema de Pitágoras: $\overline{SL}^2 = \overline{SM}^2 + \overline{ML}^2$



Donde: $\overline{SL}^2 = (12\ m)^2 + (16\ m)^2$

$\overline{SL}^2 = 144\ m^2 + 256\ m^2 = 400\ m^2$

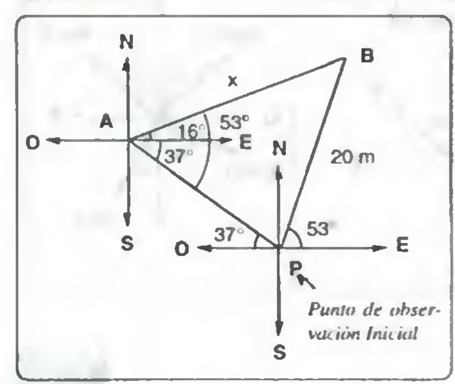
$\overline{SL}^2 = \sqrt{400\ m^2} = 20\ m$

$\therefore\ \overline{SL} = x = 20\ m$

Rpta. La distancia entre Luis y Sara es de 20 metros.

Problema 2 : Si desde un punto se observan dos árboles "A" y "B" en los rumbos O 37° N y E 53° N respectivamente. ¿Cuál debe ser la distancia entre los dos árboles, si desde "A" se vuelve a observar "B" a 16° al Norte del Este y la distancia del punto de observación inicial al árbol "B" es de 20 metros?

Resolución:



De la figura: $\angle OPA = \angle PAE = 37°$

(Por Alternos Internos)

- Por deducción el ∠ APB es igual a 90°.

Sea: x = distancia entre los dos árboles.

Luego: En el ⊿ APB:

$$\text{sen } 53° = \frac{\overline{PB}}{\overline{AB}} = \frac{20\ m}{x}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{20\ m}{x}$$

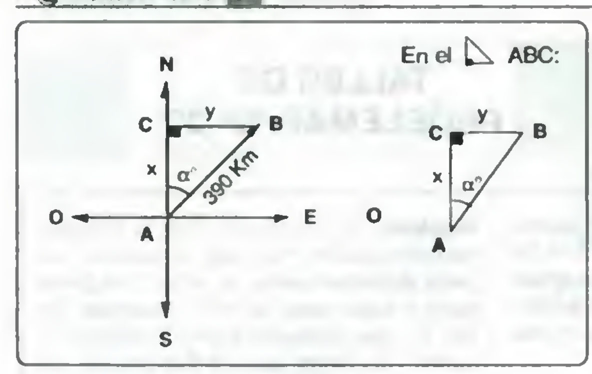
Donde: $x = \dfrac{5 \cdot 20\ m}{4} = 25\ m$

Rpta. La distancia entre los dos árboles es de 25 metros

Problema 3 : Un móvil se desplaza 390 km, según la dirección N α E. Con respecto a un punto inicial "A". Hallar cuántos km se ha desplazado hacia el Norte. Sabiendo que la tg α = 5/12.

Resolución:

Del Gráfico: $\cos\alpha = \dfrac{x}{390} \Rightarrow x = 390 \cos\alpha$ ...(1)

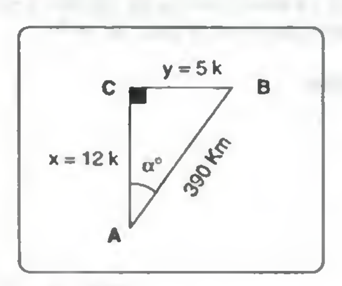


$$\tan\alpha = \frac{y}{x}$$

Pero : $\tan\alpha = \frac{5}{12} = \frac{5\,k}{12\,k}$

$$\frac{5\,k}{12\,k} = \frac{y}{x} \Rightarrow \begin{matrix} y = 5\,k \\ x = 12\,k \end{matrix}$$

- Por el Teorema de Pitágoras:



$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$$

$$(12\,k)^2 + (5\,k)^2 = \overline{AB}^2$$

$$144\,k^2 + 25\,k^2 = \overline{AB}^2 \qquad 169\,k^2 = \overline{AB}^2$$

$$\sqrt{169\,k^2} = \overline{AB} \qquad \therefore \quad 13\,k = \overline{AB}$$

Según el Gráfico: $\overline{AB} = 390$ Km

$13\,k = 390$ Km $\Rightarrow$ $k = 30$ Km

Rpta. El número de km que se ha desplazado hacia el norte dicho móvil es $x = 12\,k = 12\,(30\text{ km}) = 360$ km

TALLER DE PROBLEMAS Nº 29

Problema 1 : Una persona se encuentra alejada 105 Km, en dirección N 37° O de un pueblo situado a orillas de un rio, cuyas aguas corren en dirección E - O. Determinar la mínima distancia que deberá caminar la persona para llegar al río.

Resolución:

Rpta. 84 Km

Problema 2 : Un explotador parte de su campamento recorriendo 20 Km en dirección N 78° E, luego se dirige al S 42° E y recorre la misma distancia. En este punto decide regresar a su campamento. ¿Qué dirección debe tomar?

Resolución:

Rpta. N 72° O

Problema 3 : Un barco parte de su terminal con rumbo N α° E; luego de recorrer una cierta distancia cambia de rumbo y se dirige hacia el Este, luego de haber navegado 100 Km. En esta dirección vuelve a cambiar su rumbo y se dirige hacia el Sur después de navegar 80 Km, se detiene y observa que se encuentra exactamente al Este de su punto de partida y a una distancia de 160 Km. ¿Hallar apróximadamente el valor de "α"?

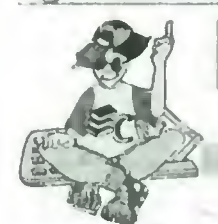
Resolución:

Rpta. $\alpha = 37°$

Problema 4 : Un móvil parte de un punto en la dirección S 60° O y recorre una distancia de 40 Km, luego cambia de dirección y toma el rumbo 60° al Oeste del Norte para recorrer 20 Km. Determinar el desplazamiento total que efectuó el móvil.

Resolución:

Rpta. $20\sqrt{7}$ m



PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE ÁNGULOS HORIZONTALES

NIVEL I

Problema 1: Nataly se encuentra a 80 metros de su casa en la dirección **SE** (Sur-Este) y Vanessa se encuentra a 60 metros de su casa en la dirección **NE** (Nor-Este). Hallar la distancia entre Nataly y Vanessa.

A) 40 m **B)** 50 m **C)** 100 m **D)** 120 m **E)** 90 m

Problema 2: Si desde un punto se observan dos personas A y B en los rumbos **S 33° O** y **S 57° E** respectivamente. ¿Cuál debe ser la distancia entre las dos personas, si desde B se vuelve a observar a "A" a 20° al sur del Oeste y la distancia del punto de observación inicial a la persona "A" es 64 metros.

A) 48 m **B)** 80 m **C)** 90 m **D)** 56 m **E)** 72 m

Problema 3: Un móvil se desplaza 300 Km, según la dirección **O α N**. Con respecto a un punto inicial "A". Hallar cuántos Km se ha desplazado hacia el **Oeste**. Sabiendo que la cotg = 7/24.

A) 288 Km **B)** 144 Km **C)** 84 Km
D) 100 Km **E)** 200 Km

Problema 4: Un móvil se desplaza 7 Km hacia el oeste con respecto a un punto inicial, luego se desplaza $5\sqrt{2}$ Km hacia el Noroeste con respecto a su nueva ubicación. Hallar su desplazamiento total.

A) 11 Km **B)** $\left(5+\sqrt{2}\right)$Km **C)** 7 Km
D) 13 Km **E)** 16 Km

Problema 5: Si desde **P** se observan los puntos **Q, R y T** en las direcciones **E - NE , N - NO** y **S - SO** respectivamente, cuál de las siguientes afirmaciones es Verdadera **(V)** y cuál es Falsa **(F)**.

a) ( ) P se encuentra al **N - NE** de **T**
b) ( ) P se encuentra al **S - SO** de **R**
c) ( ) P se encuentra al **O - SO** de **Q**

A) VVV **B)** FFF **C)** VVF **D)** VFF **E)** FVV

Problema 6: Un barco navega en la dirección **S 30° E** y otro barco lo hace en la dirección **N 30° E** en un instante dado el segundo barco se encuentra al Norte del primero y a 60 Km. Calcular la separación del primero con respecto del punto **A**, si ambos partieron simultáneamente de **A**.

A) $10\sqrt{3}$ Km **B)** 20 Km **C)** $20\sqrt{3}$ Km
D) 10 Km **E)** Faltan Datos

Clave de Respuestas

1. C	2. B	3. C
4. D	5. D	6. C

10.2 ÁNGULOS VERTICALES

DEFINICIÓN: Se llama así a todos aquellos que se denominan en un plano vertical. El instrumento para medir estos ángulos se llama **TEODOLITO.**

Clases:

Hay 2 clases de ángulos verticales:
- **Ángulos de Elevación**
- **Ángulos de Depresión**

10.2.1 ÁNGULO DE ELEVACIÓN:

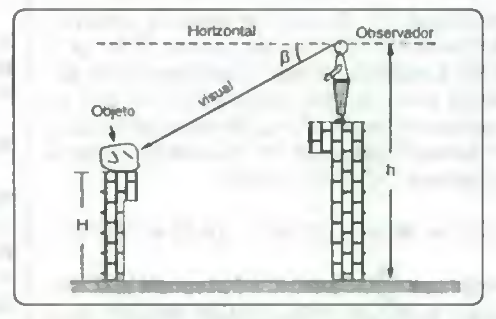
Es aquel, cuya medición se realiza entre la linea visual y la linea horizontal; pero cuando el objeto se encuentra por encima del horizontal.

$\alpha°$ = ángulo de elevación

10.2.2 ÁNGULO DE DEPRESIÓN:

Es aquel, cuya medición se realiza entre la liena visual y la linea horizontal; pero cuando el objeto se encuentra por debajo del horizontal.

$\beta°$ = ángulo de depresión



Observación: Para desarrollar problemas con estos ángulos (Elevación y Depresión), debemos recurrir a los criterios antes mencionados; es decir, buscar triángulos rectángulos y resolverlos. La diferencia aquí, es que sus enunciados son más amplios.

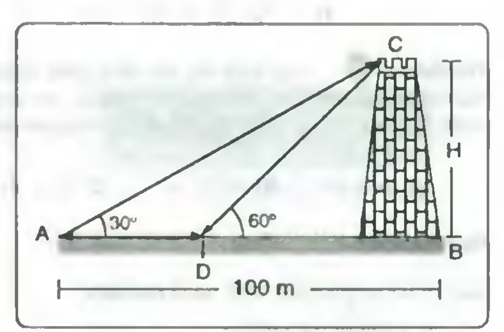
A continuación desarrollaremos algunos problemas, que servirán de ayuda en la comprensión de este tema.

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE ÁNGULOS VERTICALES

Problema 1 : El ángulo de elevación de la parte superior de una torre es de 30° acercándose 100 m. Se encuentra que el ángulo de elevación es de 60°. ¿Cuál es la altura de la torre?

A) 50 m B) 100 m C) $50\sqrt{3}$ D) $100\sqrt{3}$m E) 200 m

Resolución:



- En el ◺ CBD:

$$\text{cotg } 60° = \frac{\overline{BD}}{CB} = \frac{\overline{BD}}{H} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\overline{BD}}{H}$$

$$\overline{BD} = \frac{H}{\sqrt{3}} = \frac{H\sqrt{3}}{3}$$

- En el ◺ ABC: $\text{tg } 30° = \frac{\overline{BC}}{AB} = \frac{H}{\left(100 + \frac{H\sqrt{3}}{3}\right)} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{H}{\left(100 + \frac{H\sqrt{3}}{3}\right)}$

Donde: $100 + \frac{H\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}H \Rightarrow 300 + H\sqrt{3} = 3\sqrt{3}\ H$

$$300 = 2\sqrt{3}\ H \Rightarrow 150 = \sqrt{3}\ H \Rightarrow H = \frac{150}{\sqrt{3}}$$

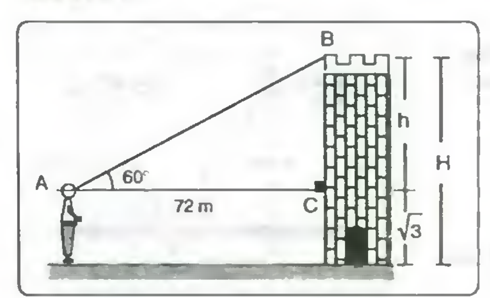
Racionalizando, esta expresión obtenemos:

$$H = \frac{150\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{150\sqrt{3}}{\sqrt{3\times 3}} = \frac{150\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \therefore\ H = 50\sqrt{3}$$ **Rpta. C**

Problema 2 : El ángulos de elevación de la cúspide de una torre es de 60° a 72 m de ella, estando el ojo del observador a $\sqrt{3}$ m sobre el suelo. La altura de la torre es aproximadamente.

A) 72 m B) $73\sqrt{3}$ C) 71 m D) 73 m E) $72\sqrt{3}$ m

Resolución:



De la figura: $H = h + \sqrt{3}$ ...(I)

- En el ◺ ABC

$$\text{tg } 60° = \frac{\overline{BC}}{AC} = \frac{h}{72}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{72} \Rightarrow h = 72\sqrt{3}\ \text{... (II)}$$

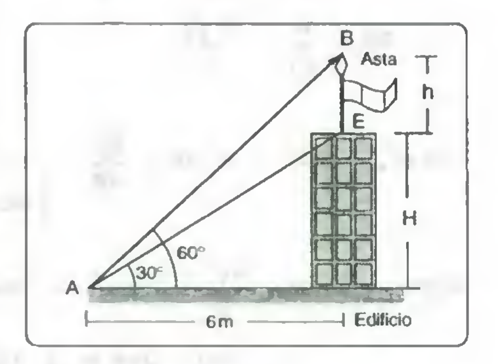
Reemplazamos (II) en (I)

$$H = 72\sqrt{3} + \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad \boxed{H = 73\sqrt{3}\ m} \quad \textbf{Rpta. B}$$

Problema 3 : Una asta de bandera está clavada verticalmente en lo alto de un edificio a 6 metros de distancia de la base del edificio, los ángulos de elevación, de la punta del asta y de la parte superior del edificio de 60° y 30° respectivamente. ¿Hállese la longitud del asta?

A) $2\sqrt{3}$ m **B)** $4\sqrt{3}$ m **C)** $6\sqrt{3}$ m **D)** $8\sqrt{3}$ m **E)** $3\sqrt{3}$ m

Resolución:



Sea: h = Longitud del asta de la bandera

H = Altura del edificio

- En el ⊿ ACB: $\operatorname{tg} 60° = \dfrac{\overline{BC}}{AC} = \dfrac{h + H}{6}$

$$\sqrt{3} = \frac{h + H}{6}$$

$$\boxed{h + H = 6\sqrt{3}}$$

- En el ⊿ ACE: $\operatorname{tg} 30° = \dfrac{\overline{EC}}{AC} = \dfrac{H}{6} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{H}{6} \Rightarrow H = 2\sqrt{3}$

Reemplazamos: (II) en (I):

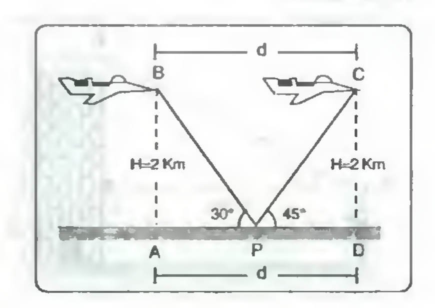
$$h + 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad \boxed{h = 4\sqrt{3}} \quad \textbf{Rpta. B}$$

Problema 4 : Hallar la distancia que vuela un avión si es observado desde un punto en el suelo inicialmente con 30° y luego con 45° de ángulo de elevación, suponga que vuela horizontalmente a una altura de 2 km.

A) $2\left(\sqrt{3}+1\right)$ Km **B)** $2\left(\sqrt{3}-1\right)$ Km **C)** $2\sqrt{3}$ Km **D)** 2 Km **E)** Hay 2 respuestas

Resolución:

Para este tipo de problemas se presentan 2 formas de resolver, depende del gráfico que se construya.



Primera Forma:

- En el ⊿ CDP: $\operatorname{tg}45° = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{PD}} = \dfrac{2\ Km}{PD}$

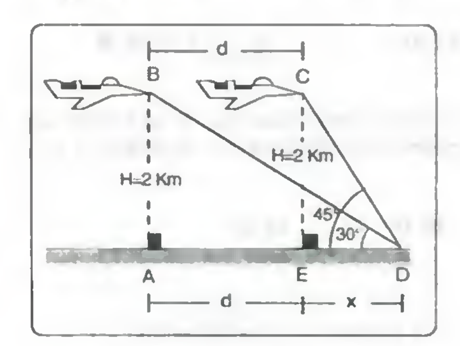
$$1 = \frac{2}{\overline{PD}} \quad \therefore \quad \overline{PD} = 2\ Km$$

- En el ◺ BAP: $\cot g\ 30° = \dfrac{\overline{AP}}{2\ Km} \Rightarrow \therefore\ \overline{AP} = 2\sqrt{3}\ Km$

De la figura: $\overline{AD} = \overline{AP} + \overline{PD}$; reemplazando valores, obtenemos:

$$d = 2\sqrt{3}\ Km + 2\ Km \Rightarrow \therefore\ d = 2\left(\sqrt{3}+1\right) Km$$ **Rpta.**

Segunda Forma:



- En el ◺ CED: $tg\ 45° = \dfrac{\overline{CE}}{\overline{ED}} = \dfrac{2\ Km}{x}$

$$1 = \frac{2\ Km}{x} \Rightarrow x = 2\ Km$$

- En el ◺ BAD: $tg\ 30° = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \dfrac{2\ Km}{d + x}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\ Km}{d + 2\ Km}$$

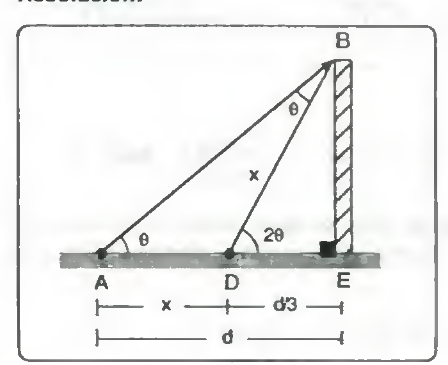
Donde: $d + 2\ Km = 2\sqrt{3}\ Km \Rightarrow d = 2\sqrt{3}\ Km - 2\ Km$

$$\therefore\ d = 2\left(\sqrt{3}-1\right) Km$$ **Rpta. E**

Problema 5 : Una persona observa un poste con un ángulo de elevación "θ", cuando la distancia que los separa se ha reducido a la tercera parte, el ángulo de elevación se ha duplicado. ¿Cuál es el valor del ángulo "θ"?

A) 15° **B)** 30° **C)** 45° **D)** 60° **E)** 37°

Resolución:



- En el △ ABD: Por ángulo exterior:

$$\angle BAD + \angle ABD = 2\theta$$

$$\theta + \angle ABD = 2\theta$$

$$\therefore\ \angle ABD = \theta$$

Como se observará el △ ABD, resulta ser isósceles, siendo: $\overline{AD} = \overline{DB} = x$

- De la figura: $x + \frac{d}{3} = d \Rightarrow x = \frac{2}{3}d$

- En el ⊿ BCD: $\cos 2\theta = \frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} = \frac{\frac{d}{3}}{\frac{2}{3}d} = \frac{1}{2}$

$\cos 2\theta = \frac{1}{2}$; Pero : $\frac{1}{2} = \cos 60°$

$\cos 2\theta = \cos 60° \Rightarrow 2\theta = 60° \Rightarrow \therefore \theta = 30°$ **Rpta. B**

Problema 6 : Desde un punto del suelo se observa el techo del noveno piso de un edificio con ángulo de elevación de 37° y la parte superior del mismo con un ángulo de elevación de 53°. ¿Cuántos pisos tiene el edificio?

A) 12 **B)** 14 **C)** 16 **D)** 18 **E)** 20

Resolución:

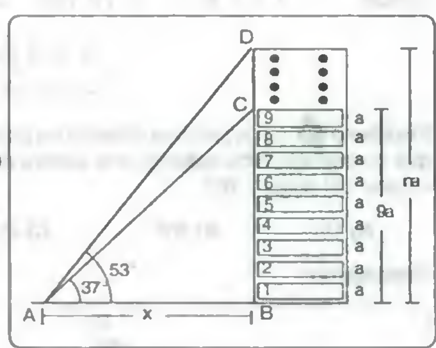
Sea:

a = altura de cada piso del edificio.	n = número de pisos del edificio.

- En el ⊿ ABC: $\text{tg } 37° = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{9a}{x}$

$\frac{3}{4} = \frac{9a}{x}$

$3x = 36a \Rightarrow x = 12a$ ...(I)



- En el ⊿ ABD: $\text{tg } 53° = \frac{\overline{DB}}{\overline{AB}} = \frac{na}{x}$

$\frac{4}{3} = \frac{na}{x}$ ...(II)

Reemplazamos (I) en (II):

$\frac{4}{3} = \frac{na}{12a} \Rightarrow 48 = 3n \Rightarrow \frac{48}{3} = n \Rightarrow \therefore n = 16$ **Rpta. C**

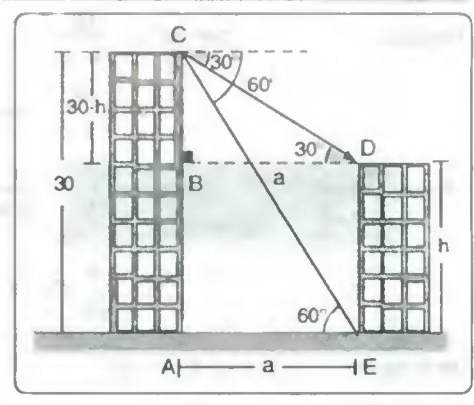
Problema 7 : Desde la parte más alta de un edificio de 30 m de altura se observa con ángulos de depresión de 30° y 60° la parte superior e inferior de otro edificio. ¿Calcular la altura de dicho edificio?

A) 20 m **B)** 10 m **C)** 15 m **D)** 50 m **E)** 40 m

Resolución:

- Hacemos que: $\overline{AE} = a$

De la figura: $\boxed{\overline{AE} = \overline{BD} = a}$ **(por ser paralelos)**



- En el ◺ CAE: $\text{tg } 60° = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{AE}} = \dfrac{30 \text{ m}}{a}$

$$\sqrt{3} = \frac{30 \text{ m}}{a}$$

$$\therefore \quad a = \frac{30}{\sqrt{3}} \text{ m} \quad \ldots \text{(I)}$$

- En el ◺ CBD: $\text{tg } 30° = \dfrac{\overline{CB}}{\overline{BD}} = \dfrac{30 - h}{a} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{30 - h}{a} \quad \ldots\text{(II)}$

Reemplazamos (I) en (II):

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{30 - h}{\left(\dfrac{30}{\sqrt{3}}\right)} \Rightarrow \frac{30}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30 - h$$

$$\frac{30}{\sqrt{3 \times 3}} = 30 - h \Rightarrow \frac{30}{3} = 30 - h \Rightarrow 10 = 30 - h \quad \therefore \quad \boxed{h = 20 \text{ m}}$$ **Rpta. A**

Problema 8 : Una niña observa la cabeza de su padre con un ángulo de elevación 53° y los pies con un ángulo de depresión 30°. si las cabezas de ambos están distanciados 10 metros. ¿Hallar en metros la estatura del padre?

A) $\left(6 + \sqrt{3}\right)$ m **B)** $4\left(2 + \sqrt{3}\right)$ m **C)** $2\left(4 + \sqrt{3}\right)$ m

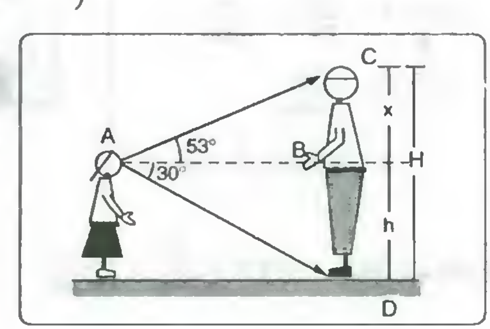
D) $2\left(2 + \sqrt{3}\right)$ m **E)** $\left(4\sqrt{3} - 2\right)$ m

Resolución:

- En el ◺ ABC:

$$\text{sen } 53° = \frac{\overline{BC}}{AC} = \frac{x}{10 \text{ m}}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{x}{10 \text{ m}} \Rightarrow \therefore \quad x = 8\text{m}$$



También: $\cos 53° = \dfrac{\overline{AB}}{10\ m}$

$\dfrac{3}{5} = \dfrac{\overline{AB}}{10\ m} \Rightarrow \boxed{AB = 6m}$

- En el ◺ABD: $tg\ 30° = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \dfrac{h}{6\ m} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{h}{6\ m}$

$h = \dfrac{6}{\sqrt{3}}\ m \Rightarrow h = \dfrac{6\sqrt{3}}{3} \quad \therefore \quad \boxed{h = 2\sqrt{3}}$

De la figura: $\boxed{H = x + h}$ ...(I)

Reemplazando valores en (I), obtenemos:

$H = 8\ m + 2\sqrt{3}\ m \quad \therefore \quad \boxed{H = 2\left(4 + \sqrt{3}\right)\ m}$ **Rpta. C**

Problema 9 : Un farolero situado a 1 800 m sobre el nivel del mar observa un barco con un ángulo de depresión "α", 6 minutos más tarde en la misma dirección al barco, ahora observa con un ángulo de depresión "θ". ¿Calcular la velocidad del barco en Km/h, sabiendo que: $\cot g\ \alpha = \sqrt{3} - 1$ y $\cot g\ \theta = \sqrt{3} + 1$

A) 9 Km/h **B)** 36 Km/h **C)** 24 Km/h **D)** 12 Km/h **E)** 180 Km/h

Resolución:

Altura del faro = 1 800 m

Incógnita = V_b = velocidad del barco

- En el ◺ FAB:

$\cot g\ \alpha = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{FA}} = \dfrac{a}{1\ 800}$

$\left(\sqrt{3} - 1\right) = \dfrac{a}{1\ 800}$

$\therefore \quad a = 1\ 800\left(\sqrt{3} - 1\right)$ ...(I)

- En el ◺ FAC: $\cot g\ \theta = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{FA}} = \dfrac{(a + b)}{1\ 800} \Rightarrow \therefore\ a + b = 1\ 800\left(\sqrt{3} + 1\right)\ m$ ...(II)

Reemplazando (I) en (II):

$$1\,800\left(\sqrt{3}-1\right)\text{ m} + b = 1\,800\left(\sqrt{3}+1\right)\text{ m}$$

$$\cancel{1\,800\sqrt{3}\text{ m}} - 1\,800\text{ m} + b = \cancel{1\,800\sqrt{3}\text{ m}} + 1\,800\text{ m} \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad b = 3\,600\text{ m} \quad \ldots\text{(III)}$$

Luego, sabemos que el espacio que recorre el barco de "B" a "C" es "b" metros y lo hace en 6 minutos.

$$\text{Velocidad} = \frac{\text{Espacio}}{\text{Tiempo}} = \frac{b\text{ m}}{6\text{ min}} \quad \ldots\text{(IV)}$$

Reemplazando (III) en (IV):

$$V_b = \frac{3\,6\cancel{00}\text{ m}}{\cancel{6}\text{ min}} = 600\text{ m/min}$$

$$V_b = \frac{600\text{ m}}{\text{min}} \times \frac{1\text{ Km}}{1\,000\text{ m}} \times \frac{60\text{ min}}{1\text{ h}} = 36\text{ Km/h}$$

Convertimos los:

m/min a Km/h

$\therefore$ $V_b = 36\text{ Km/h}$ **Rpta. B**

TALLER DE PROBLEMAS Nº 30

Problema 1 : Una persona observa la parte alta de una torre; con un ángulo de 37°; luego se acerca 25 m y ahora la observa con un ángulo de 74°. Hallar la distancia que le falta para llegar a la base de la torre.

Resolución:

Rpta. 7 m

Problema 2 : Una persona se encuentra exactamente entre dos edificios de altura H h (H > h) y observa la parte más alta de éstos con ángulos de elevación α y β respectivamente. Determinar la distancia que existe entre los edificios.

Resolución:

Rpta. H cotgα + h cotgβ

Problema 3 : Jaimito curiosamente desde la parte superior del octavo piso de un edificio, observa a Juanita que se encuentra a 21 metros del edificio con un ángulo de depresión de 53°; luego se pregunta cuánto mide la altura de cada piso, si todos son iguales.

Resolución:

Rpta. 3,5 m

Problema 4 : Desde un punto se observa la parte más alta de un muro con un ángulo de elevación "θ", si en la misma dirección nos acercamos al muro una distancia igual a su altura, el nuevo ángulo de elevación es el complemento del anterior. Hallar el valor de:
$M = \text{tg}\,\theta + \text{cotg}\,\theta$

Resolución:

Rpta. $\sqrt{5}$

PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE ÁNGULOS VERTICALES

NIVEL I

Problema 1: ¿Cuánto mide la sombra proyectada por una torre de 30 metros de altura, si el ángulo de elevación es de 30°?

A) $15\sqrt{3}$ m **B)** 60 m **C)** $30\sqrt{3}$ m
D) $20\sqrt{3}$ m **E)** 15 m

Problema 2: A 120 metros del pie de un edificio su ángulo de elevación es de 60°. ¿Cuál es la altura del edificio?

A) $40\sqrt{3}$ m **B)** $60\sqrt{3}$ m **C)** $80\sqrt{3}$ m
D) $120\sqrt{3}$ m **E)** 180 m

Problema 3: Un avión pasa sobre una ciudad de 4 Km de altura, 3 minutos después el ángulo de elevacion del avión es de 53°. ¿Cuál es la velocidad del avión en Km/h?

A) 1 Km/h **B)** 3 Km/h **C)** 6 Km/h
D) 60 Km/h **E)** 12 Km/h

Problema 4: Un árbol quebrado por el viento, forma un triángulo rectángulo con el suelo. ¿Cual era la altura del árbol, si la parte que ha caido hacia el suelo forma con éste un ángulo de 37° y la parte del tronco que ha quedado en pie tiene una altura de 30 metros?

A) 10 m **B)** 60 m **C)** 80 m **D)** 50 m **E)** 90 m

Problema 5: A 20 metros de un poste, se ve el foco de la parte superior con un ángulo de elevación que tiene como tangente 0,5. Cuánto habrá que acercarse al poste en la misma dirección, para ver el foco con un ángulo de elevación complemento del anterior.

A) 5 m **B)** 10 m **C)** 15 m
D) 20 m **E)** 12,5 m

Problema 6: Una antena de televisión se encuentra situado en lo alto de un edificio de 18 metros de altura. Si un hombre ve con un ángulo de elevación de 53° a la antena y con un ángulo de 45° el edificio. Hallar la altura de la antena.

A) 6 m **B)** 8 m **C)** 10 m **D)** 12 m **E)** 16 m

Problema 7: El ángulo de elevación de un edificio es de 22°30', nos acercamos a una distancia "m" y el nuevo ángulo de elevación es de 45°. Hallar: "m" si la altura del edificio es de 10 metros.

A) 10 m **B)** 20 m **C)** $10\sqrt{2}$ m
D) $10\sqrt{3}$ m **E)** $20\sqrt{2}$ m

Problema 8: La distancia entre dos edificios es de 60 metros. Desde la azotea del menor de los edificios, cuya altura es de 40 metros se observa la azotea del otro; con un ángulo de elevación de 60°. ¿Cuál es la altura del edificio más alto?

A) $30\left(2+\sqrt{3}\right)$m **B)** $20\left(2+3\sqrt{3}\right)$m

C) $20\left(3+2\sqrt{3}\right)$m **D)** $10\left(6+3\sqrt{3}\right)$m

E) $30\left(\sqrt{3}+1\right)$m

Clave de Respuestas

1. C	2. D	3. D	4. C
5. C	6. A	7. C	8. B

NIVEL II

Problema 1: Desde un punto se observa la parte superior de una torre con un ángulo de elevacion "α" y desde el punto medio de la distancia que separa el pie de la torre, el ángulo de elevación es el complemento de "α". Hallar la tangente del segundo ángulo?

A) $\sqrt{3}$ **B)** 1 **C)** $\sqrt{3}/3$
D) $\sqrt{2}$ **E)** $\sqrt{2}/2$

Problema 2: Una niña colocada a la orilla de un rio, ve un árbol plantado sobre la rivera opuesta bajo un ángulo de 60°, se aleja 40 m y este ángulo no mide más de 30°. ¿Cuál es la altura del árbol?

A) 43,6 m **B)** 30,6 m **C)** 34,6 m
D) 36,4 m **E)** 38,4 m

Problema 3: Un avión que está por aterrizar observa en su misma trayectoria la pista de aterrizaje de extensión igual al doble de la altura a que se encuentra. Si ve el extremo más alejado con ángulo de depresión de 22°30'. Calcular el ángulo de depresión con que observa al otro extremo.

A) 45° **B)** 60° **C)** 54° **D)** 67°30' **E)** 75°

Problema 4: Una persona de altura "x" metros desea calcular la longitud de un árbol, para ello se coloca a una distancia "y" metros de dicho árbol y observa su parte más alta con un ángulo de elevación "α". Calcular en términos de los datos la longitud del árbol.

A) x + y tgα **B)** x + y cotgα **C)** x tgα + y
D) x cotgα + y **E)** (x + y) tgα

Problema 5: Una persona que se desplaza por un camino que forma 30° con la horizontal, observa la parte superior de una torre con un ángulo de elevación de 45°, luego de subir $2\sqrt{3}$ m hacia la torre el nuevo ángulo de elevación mide 60°. Hallar la altura de la torre.

A) 1 m **B)** $2\sqrt{3}$ m **C)** $\sqrt{3}$ m
D) $3\sqrt{3}$ m **E)** 2 m

Problema 6: Una persona observa al norte de ella y con un ángulo de elevación de 45° la cima de una montaña. Otra persona situada 30 metros al sur de la primera observa la cima de la misma montaña con un ángulo de elevación de 30°. Determinar usted la altura de la montaña.

A) $15\sqrt{3}$ m **B)** $30\sqrt{3}$ m
C) $30(\sqrt{3}+1)$ m **D)** $15(\sqrt{3}+1)$ m
E) $30(\sqrt{3}-1)$ m

Problema 7: Una persona se encuentra entre 2 edificios "A" y "B"; cuando está a "x" metros de "B" observa la parte más alta de este con un ángulo de elevación de 40° y la del otro con un ángulo de 30°. Pero cuando se encuentra a "x" metros de "A" observa la parte más alta de este con un ángulo de elevación de 70°. ¿Con qué ángulo de elevación observa la parte más alta de "B".

A) 5° **B)** 10° **C)** 20° **D)** 30° **E)** 40°

Clave de Respuestas

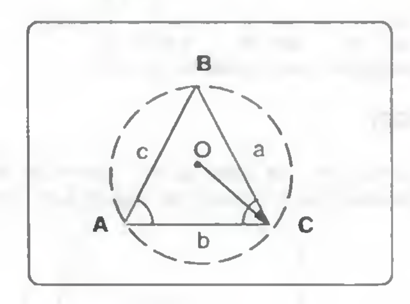
1. D	2. C	3. D	4. A
5. E	6. D	7. B	

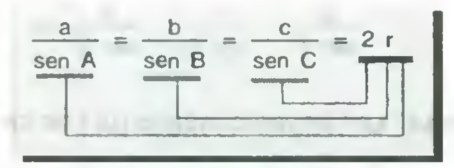
10.3 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

La resolución de un triángulo de este tipo exige conocer tres de sus elementos (puede ser dos lados y un ángulo, tres lados, un lado y dos ángulos). Siguiendo las mismas normas que en los triángulos rectángulos estableceremos primero unas fórmulas que relacionan los elementos de un triángulo, de los cuales se deducen en cada caso las fórmulas necesarias para resolver el triángulo.

10.3.1 LEY DE SENOS (LEY DE BRIGGS)

"En todo triángulo los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos y la constante de proporcionalidad es el diámetro de la circunferencia que circunscribe a dicho triángulo".

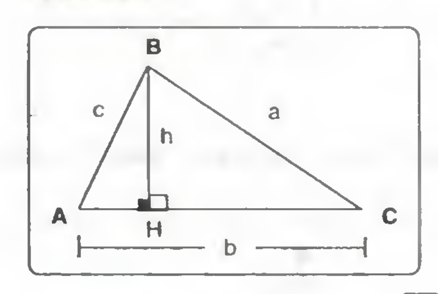




$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} = 2r$$

Donde: $a = 2r \text{ sen } A$
$b = 2r \text{ sen } B$
$c = 2r \text{ sen } C$

Demostración:



Sea ABC un triángulo rectángulo cualquiera, trazamos su altura BH.

- En el ◺ AHB: $\text{sen } A = \frac{\overline{BH}}{c}$

$$\overline{BH} = c \text{ sen } A \quad ...(1)$$

- En el ◺ BHC: $\text{sen } C = \frac{\overline{BH}}{a}$

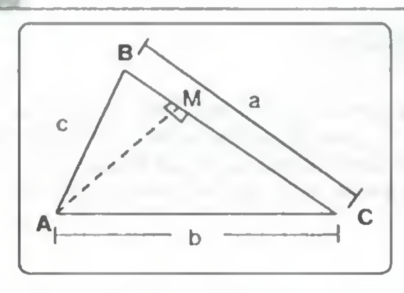
$$\overline{BH} = a \text{ sen } C \quad ...(2)$$

Igualamos las expresiones (2) y (1): $a \text{ sen } C = c \text{ sen } A$

Donde: $$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C} \quad ...(I)$$

Análogamente trazando la altura desde el vértice "A", se obtiene:

- En el ◺ AMB: $\text{sen } B = \frac{\overline{AM}}{c} \Rightarrow \overline{AM} = c \text{ sen } B \quad ...(3)$



- En el △ AMC: $\text{sen } C = \dfrac{\overline{AM}}{b}$

$$\overline{AM} = b \text{ sen } C \quad ...(4)$$

Igualamos las expresiones (3) y (4):

$$\boxed{b \text{ sen } C = c \text{ sen } B}$$

$$\frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow \frac{c}{\text{sen } C} = \frac{b}{\text{sen } B} \quad ...(II)$$

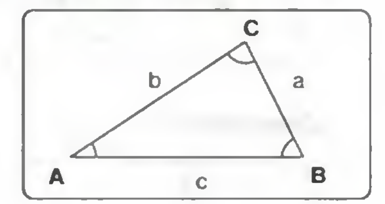
De las expresiones (I) y (II), obtenemos:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C} = \frac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow \therefore \boxed{\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}} \quad \text{L.q.q.d}$$

10.3.2 LEY DE LOS COSENOS (LEY DE CARNOT)

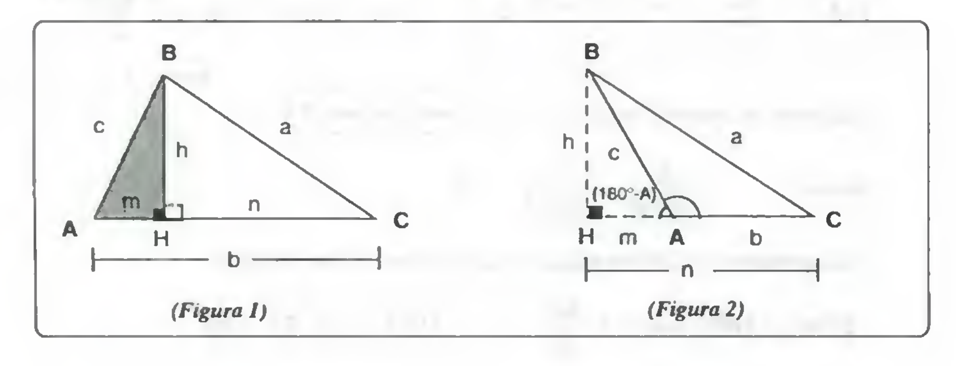
"En todo triángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo que forman".

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



Demostración:

Consideramos un triángulo acutángulo (Figura 1) y otro obtúsangulo (Figura 2). Construyamos sus alturas BH:



(Figura 1) *(Figura 2)*

- Si el ángulo "A" es agudo, sabemos por geometría plana que: $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bm$ ...(1)

y si el ángulo "A" es obtuso: $a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$ ...(2)

De la figura (1): En el ⊿ AHB: $\cos A = \dfrac{m}{c} \Rightarrow m = c\cos A$ ...(3)

De la figura (2): En el ⊿ BHA: $\cos BHA = \dfrac{m}{c} \Rightarrow \cos(180° - A) = \dfrac{m}{c}$

$$-\cos A = \frac{m}{c} \Rightarrow \therefore\ m = -c\cos A \quad ...(4)$$

Reemplazamos (3) en (1), resultando: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ ...(5)

y reemplazamos (4) en (2), resultando:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2b(-c\cos A) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad ...(6)$$

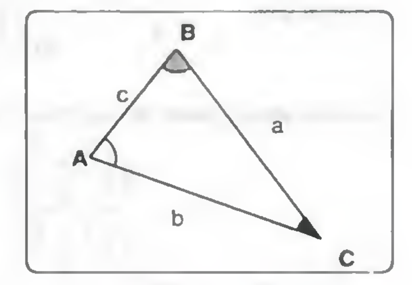
Como se observará (5) y (6) son idénticos, llegando a la conclusión de que cualquiera sea el ángulo "A" (agudo u obtuso) la ley de cosenos se cumple.

10.3.3 LEY DE LAS TANGENTES:

En todo triángulo la suma de dos lados es a su diferencia como la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos a dichos lados es proporcional a la tangente de la semidiferencia de los mismos ángulos.

Por ley de senos; se tiene que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen}\hat{A}}{\operatorname{sen}\hat{B}}$$



Recuerda que:

Dada la proporción: $\dfrac{n}{m} = \dfrac{p}{q}$ *Por propiedad:* $\dfrac{n+m}{n-m} = \dfrac{p+q}{p-q}$

Luego: $$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{sen}\hat{A} + \operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{A} - \operatorname{sen}\hat{B}}$$

Transformamos a producto al numerador y denominador de la fracción del segundo miembro, obteniendo:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\right)}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = tg\left(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right) cotg\left(\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\right) \quad ; \quad \text{Pero : } cotg\left(\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\right) = \frac{1}{tg\left(\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\right)}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = tg\left(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right)\left[\frac{1}{tg\left(\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\right)}\right] \Rightarrow \quad \therefore \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{tg\left(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right)}{tg\left(\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\right)}$$

También: $$\frac{a+c}{a-c} = \frac{tg\left(\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}\right)}{tg\left(\frac{\hat{A}-\hat{C}}{2}\right)} \qquad \frac{b+c}{b-c} = \frac{tg\left(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\right)}{tg\left(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\right)}$$

Para su mejor comprensión resolvermos algunos ejemplos, veamos:

Ejemplo 1 : Dado un triángulo ABC, reducir la siguiente expresión: $E = \left(\frac{a+c}{a-c}\right) \times tg\left(\frac{\hat{A}-\hat{C}}{2}\right)$

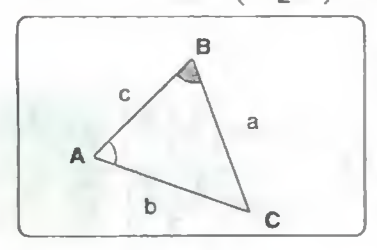
Expresar la respuesta en función de $cotg\,\frac{\hat{B}}{2}$

Resolución:

Sabemos que: $$\frac{a+c}{a-c} = \frac{tg\left(\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}\right)}{tg\left(\frac{\hat{A}-\hat{C}}{2}\right)} \quad \ldots(I)$$

Reemplazamos el valor de expresión (I) en la expresión "E":

$$E = \frac{tg\left(\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}\right)}{tg\left(\frac{\hat{A}-\hat{C}}{2}\right)} \times tg\left(\frac{\hat{A}-\hat{C}}{2}\right) = tg\left(\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}\right) \quad \ldots (II)$$



Del ABC; sabemos que : $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180°$

Donde: $\hat{A}+\hat{C} = (180° - \hat{B})$

Dividimos entre 2 a los dos miembros:

$$\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2} = \frac{180° - \hat{B}}{2} \Rightarrow \frac{\hat{A}+\hat{C}}{2} = \left(90° - \frac{\hat{B}}{2}\right)$$

Tomamos la función "tg" a ambos miembros:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}\right) = \underbrace{\operatorname{tg}\left(90° - \frac{\hat{B}}{2}\right)}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}\right) = \operatorname{cotg}\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) \quad ...(III)$$

Por Co-razón:

tg (90° - x) = ctg x

Reemplazamos la expresión (III) en (II); obtenemos: $E = \operatorname{cotg}\frac{B}{2}$ **Rpta.**

Ejemplo 2 : Dado un triángulo ABC; reducir la siguiente expresión:

$$Q = \left(\frac{b-c}{b+c}\right) \times \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right);\ \text{Si } \hat{B} - \hat{C} = 2\hat{A}$$

A) cosec A **B)** cos A **C)** sec A **D)** 2 sec A **E)** sec2 A

Resolución:

Por la ley de las tangentes: $\dfrac{b-c}{b+c} = \dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\right)} \quad ...(I)$

Reemplazamos la expresión (I); en la expresión "Q".

$$Q = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\right)} \times \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right);\ \text{Por dato: } \hat{B} - \hat{C} = 2\hat{A}$$

Luego: $Q = \dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{2\hat{A}}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\right)} \times \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \dfrac{\operatorname{tg}\hat{A}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\right)} \times \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) \quad ...(I)$

Del Δ ABC: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$ ➡ $\hat{B} + \hat{C} = 180° - \hat{A}$

Dividimos entre 2 a los dos miembros: $\dfrac{\hat{B}+\hat{C}}{2} = \dfrac{180° - \hat{A}}{2} \Rightarrow \dfrac{\hat{B}+\hat{C}}{2} = \left(90° - \dfrac{\hat{A}}{2}\right)$

Tomamos la función "tg" a ambos miembros:

$$\text{tg}\left(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\right) = \text{tg}\left(90° - \frac{\hat{A}}{2}\right)$$

Por Co-razón:

$$\text{tg}\left(90° - \frac{\hat{A}}{2}\right) = \text{cotg}\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \text{tg}\left(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\right) = \text{cotg}\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) \quad \ldots\text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I):

$$Q = \frac{\text{tg}\,\hat{A}}{\text{cotg}\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)} \times \text{cosec}^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)$$

$$Q = \frac{\left(\frac{\text{sen}\,\hat{A}}{\cos\hat{A}}\right)}{\left(\frac{\cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)}\right)} \times \frac{1}{\text{sen}^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)} = \frac{\text{sen}\,\hat{A}}{\cos\hat{A}\left(\text{sen}\,\frac{\hat{A}}{2}\cdot\cos\frac{\hat{A}}{2}\right)}$$

$$Q = \frac{2\,\text{sen}\,\hat{A}}{\cos\hat{A}\left(2\,\text{sen}\,\frac{\hat{A}}{2}\cdot\cos\frac{\hat{A}}{2}\right)} = \frac{2\,\text{sen}\,\hat{A}}{\cos\hat{A}\,(\text{sen}\,\hat{A})}$$

$$Q = \frac{2}{\cos\hat{A}} = 2\times\left(\frac{1}{\cos\hat{A}}\right) \Rightarrow \quad \therefore \quad Q = 2\sec\hat{A}$$

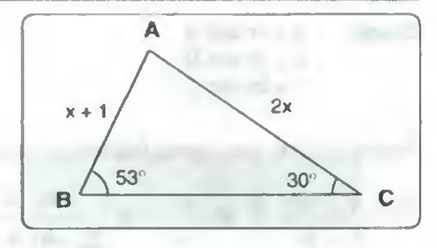
Rpta. D

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE RESOLUCÍON DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Problema : En la figura mostrada, hallar "x"

Resolución:

Por ley de senos: $\dfrac{2x}{\text{sen } 53^\circ} = \dfrac{x+1}{\text{sen } 30^\circ}$



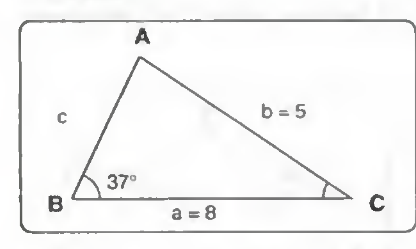
Pero: $\text{sen } 53^\circ = \dfrac{4}{5}$ $\quad$ $\text{sen } 30^\circ = \dfrac{1}{2}$

Luego: $\dfrac{2x}{\left(\frac{4}{5}\right)} = \dfrac{x+1}{\left(\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow \dfrac{10}{4}x = 2(x+1)$

$$10x = 8x + 8 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 4}$$

Problema 2 : En un triángulo ABC, se tiene: $a = 8$; $b = 5$ y $\hat{B} = 37^\circ$. Hallar: "tg A".

Resolución:



Por la ley de senos: $\dfrac{5}{\text{sen } 37^\circ} = \dfrac{8}{\text{sen } A}$

Donde:

$$\text{sen } A = \frac{8}{5}\,\text{sen } 37^\circ$$

$$\text{sen } A = \frac{8}{5}\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{24}{25} \Rightarrow \therefore \ \text{sen } A = \frac{24}{25}$$

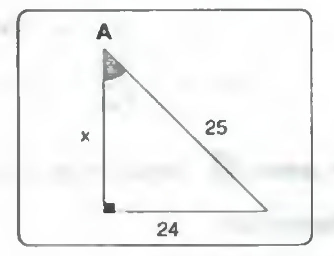
El valor de "sen A", hallado lo llevamos a un triángulo, veamos:

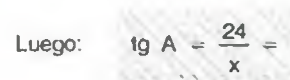
- Por el teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 25^2 - 24^2$$

$$x^2 = 625 - 576 = 49 \Rightarrow x = \pm\sqrt{49}$$

$x = \pm 7$ (Sólo tomamos el valor positivo)



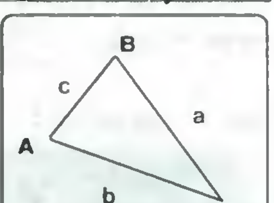
Luego:  $\text{tg } A = \dfrac{24}{x} = \dfrac{24}{7}$ **Rpta.**

Problema 3 : En el triángulo ABC: $\dfrac{\text{sen } A + \text{sen } B}{a + b} - \dfrac{\text{sen } C}{c}$; Es igual a:

Resolución:

Por ley de senos: $\dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{b}{\text{sen } B} = \dfrac{c}{\text{sen } C} = 2r$

Donde: $a = 2r\,\text{sen}\,A$
$b = 2r\,\text{sen}\,B$
$c = 2r\,\text{sen}\,C$



Reemplazando los valores hallados en la expresión inicial:

$$\frac{\text{sen}\,A + \text{sen}\,B}{a+b} - \frac{\text{sen}\,C}{c} = \frac{(\text{sen}\,A + \text{sen}\,B)}{2r\,\text{sen}\,A + 2r\,\text{sen}\,B} - \frac{\text{sen}\,C}{2r\,\text{sen}\,C}$$

$$\frac{\text{sen}\,A + \text{sen}\,B}{a+b} - \frac{\text{sen}\,C}{c} = \frac{(\text{sen}\,A + \text{sen}\,B)}{2r\,(\text{sen}\,A + \text{sen}\,B)} - \frac{1}{2r}$$

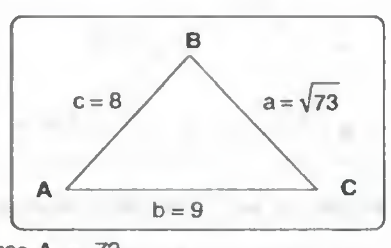
$$\frac{\text{sen}\,A + \text{sen}\,B}{a+b} - \frac{\text{sen}\,C}{c} = \frac{1}{2r} - \frac{1}{2r} \Rightarrow \therefore \quad \boxed{\frac{\text{sen}\,A + \text{sen}\,B}{a+b} - \frac{\text{sen}\,C}{c} = 0} \text{ Rpta.}$$

Problema 4 : En un triángulo sus lados son: 8 ; $\sqrt{73}$ y 9; hallar el coseno del ángulo opuesto a $\sqrt{73}$

Resolución:

Aplicamos ley de cosenos, obtenemos que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\cos A$$



Luego: $\left(\sqrt{73}\right)^2 = 9^2 + 8^2 - 2 \times 9 \times 8 \times \cos A$

$$73 = 81 + 64 - 144\,\cos A \Rightarrow 144\,\cos A = 72$$

$$\cos A = \frac{72}{144} = \frac{1}{2} \Rightarrow \therefore \quad \boxed{\cos A = \frac{1}{2}}$$

Problema 5 : Reducir la siguiente expresión: $K = \dfrac{2bc\,\cos A + 2ac\,\cos B + 2ab\,\cos C}{a^2 + b^2 + c^2}$

Resolución:

Por ley de cosenos:

i) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\cos A$

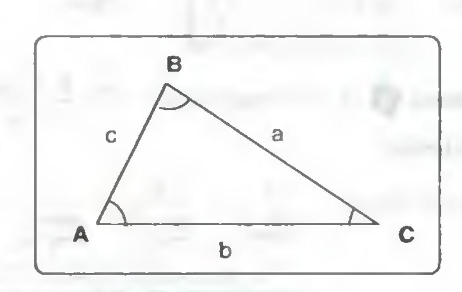
$2bc\,\cos A = (b^2 + c^2 - a^2)$

ii) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,\cos B$

$2ac\,\cos B = (a^2 + c^2 - b^2)$

iii) $c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\,\cos C$

$2ba\,\cos C = (b^2 + a^2 - c^2)$

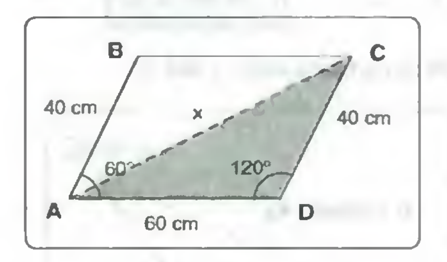


Luego, reemplazamos los valores hallados en "K"

$$K = \frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)+\left(a^2+c^2-b^2\right)+\left(b^2+a^2-c^2\right)}{a^2+b^2+c^2} = \frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} \Rightarrow \therefore \boxed{K=1}$$

Problema 6 : Dos lados y el ángulo comprendido de un paralelogramo miden 40 cm; 60 cm y 60° respectivamente. Hallar la longitud de su diagonal mayor.

Resolución:



Por propiedad: $\hat{A} + \hat{D} = 180°$

$60° + \hat{D} = 180°$

$\therefore \boxed{D = 120°}$

Nota: Recordar que a mayor lado se opone mayor ángulo y a menor lado se opone menor ángulo.

- En el △ ADC: Por ley de cosenos:

$$x^2 = (60)^2 + (40)^2 - 2\,(60)\,(40)\,\cos 120°$$

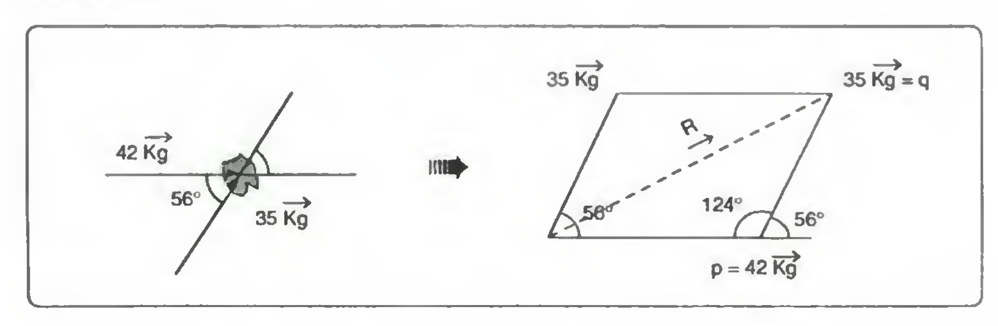
$$x^2 = 3\,600 + 1\,600 - 2\,(2\,400)\,(-\cos 60°)$$

$$x^2 = 5\,200 + 2\,(2\,400)\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x^2 = 7\,600$$

$$x = \sqrt{7\,600} \Rightarrow x = \sqrt{400 \times 19} \Rightarrow x = 20\sqrt{19} \Rightarrow \therefore \boxed{x \approx 87{,}17 \text{ cm}}$$

Problema 7 : Dos fuerzas de 35 $\overrightarrow{Kg}$ y de 42 $\overrightarrow{Kg}$ actúan sobre un cuerpo, si sus direcciones forman un ángulo de 56°. Hallar su resultante y el ángulo que forma con la fuerza mayor.

Resolución:



- En el triángulo achurado, aplicamos ley de cosenos:

$$R^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cos 124°$$

$$R^2 = (42)^2 + (35)^2 - 2\,(42)\,(35) \times [\cos (180° - 56°)]$$

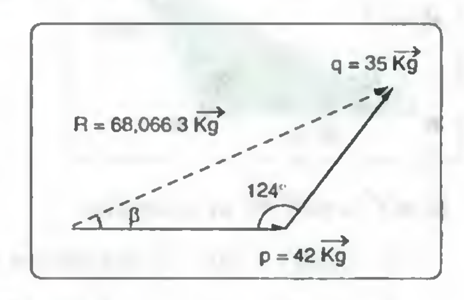
$$R^2 = (42)^2 + (35)^2 - 2\,(42)\,(35) \times [\cos (-56)°]$$

$$R^2 = 1\,764 + 1\,225 + 2\,940 \times (0{,}559\,1)$$

$$R^2 = 4\,633{,}027\,1 \Rightarrow R = \sqrt{4\,633{,}027\,1} \Rightarrow \therefore \boxed{R = 68{,}066\,3\ \overrightarrow{Kg}}$$

Luego, calculamos el ángulo que forma la resultante (R) con la fuerza mayor o sea "b"

Por ley de senos:



$$\frac{68{,}006\,3\ \overrightarrow{Kg}}{\text{sen } 124°} = \frac{35\ \overrightarrow{Kg}}{\text{sen } \beta}$$

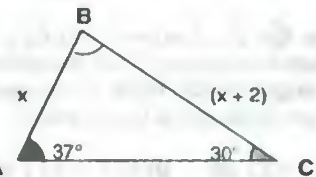
$$\text{sen } \beta = \frac{35\ (\text{sen } 124°)}{68,\ 006\ 3}$$

$$\text{sen } \beta = \frac{35\ (0{,}829\ 037\ 5)}{68,\ 066\ 3}$$

$$\text{sen } \beta = 0{,}426\ 294\ 8 \Rightarrow \boxed{\beta = 25°13'}$$ **Rpta.**

TALLER DE PROBLEMAS Nº 31

Problema 1 : De la figura mostrada. Hallar "x".



Resolución:

Rpta. $x = 10$

Problema 2 : En un triángulo ABC; se tiene que: a = 24 ; b = 12 y A = 30°. Hallar: "tg B"

Resolución:

Rpta. 0,258 1

Problema 3 : En un triángulo ABC; se tiene que: b = 8 ; c = 4 y B = 53°. Hallar: "cos C"

Resolución:

Rpta. 0,916 5

Problema 4 : En un triángulo ABC; se tiene que: a = 12 ; c = 20 y C = 120°. Hallar: "sec A".

Resolución:

Rpta. 1,170 4

PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

NIVEL I

Ejercicio 1 : Si los lados de un triángulo ABC; son: a = 7 ; b = 5 y c = 6. Reducir:

$$E = \frac{\text{sen } A + \text{sen } C}{\text{sen } C - \text{sen } B}$$

A) 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 15 **E)** 16

Ejercicio 2 : En un triángulo se tiene por lados 5; 7 y 9. Hallar el coseno del menor ángulo.

A) 0,79 **B)** 0,83 **C)** 0,89 **D)** 0,78 **E)** N.A

Ejercicio 3 : En un Δ ABC; simplifica:

$$M = \frac{a + b + c}{\text{sen } A + \text{sen } B + \text{sen } C}$$

A) r **B)** 3r **C)** 4r **D)** 2r **E)** N.A.

Ejercicio 4 : En un triángulo sus lados son: 25; 39 y 40. Hallar el ángulo opuesto a 39.

A) 96° **B)** 69° **C)** 72° **D)** 68° **E)** 46°

Ejercicio 5 : Hallar el equivalente de:

$$M = (a \cos B + b \cos A)(c \cos A + a \cos C)$$

A) bc **B)** ca **C)** ab **D)** b^2 **E)** c^2

Ejercicio 6 : Dos lados y la diagonal mayor de un paralelogramo miden: 12 m ; 8 m y 7 m. Hallar la longitud de su diagonal menor.

A) 16 m **B)** 11 m **C)** 15 m **D)** 14 m **E)** 9 m

Ejercicio 7: Dos fuerzas de 23 $\overrightarrow{Kg}$ y 36 $\overrightarrow{Kg}$ actuan sobre un cuerpo; si sus direcciones forman un ángulo de 62°. Hallar su resultante y el ángulo que forma con la fuerza menor.

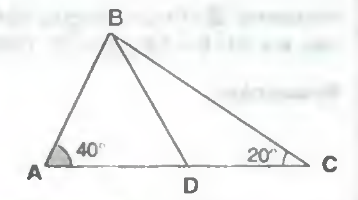
A) 51,041 Kg y 39° **B)** 51,410 Kg y 38,5°
C) 53,041 Kg y 35,8° **D)** 51,041 Kg y 38,5°
E) N.A.

Ejercicio 8 : Sobre un objeto actuan dos fuerzas de 215 $\overrightarrow{Kg}$ y 115 $\overrightarrow{Kg}$, que tiene por resultante 275 Kg. Hallar el ángulo que forma la resultante y la fuerza mayor.

A) 37° **B)** 30° **C)** 24° **D)** 23° **E)** 60°

Ejercicio 9 : De la figura. Hallar BD donde AB = DC = 8 m.

A) 10 m
B) 8 m
C) 5 m
D) 7 m
E) 12 m



Clave de Respuestas

1. C	2. B	3. D	4. B	5. A
6. B	7. D	8. D	9. B	

NIVEL II

Problema 1 : En un triángulo ABC; cuyos lados son: a; b y c respectivamente, se cumple que la altura relativa al lado AB tiene la misma medida que este. Hallar: "sen C".

A) $\frac{a^2}{bc}$ **B)** $\frac{c^2}{ab}$ **C)** $\frac{b^2}{ac}$

D) $\frac{a + c}{b + c}$ **E)** $\frac{a - c}{b - c}$

Problema : En un triángulo ABC; se tiene que: b = 3a y que el ángulo c = 60°. Hallar: "cosec A"

A) $\frac{2\sqrt{21}}{3}$ B) $\frac{3\sqrt{21}}{2}$ C) $3\sqrt{21}$

D) $2\sqrt{21}$ E) $\sqrt{21}$

Problema : En un triángulo ABC; simplificar:

$$M = \frac{\text{sen } A + \text{sen } B}{\text{sen } B + \text{sen } C} + \frac{c - a}{b + c}$$

A) 2 B) 1 C) a/b D) b/c E) 3

Problema : Dado un Δ ABC, reducir la siguiente expresión:

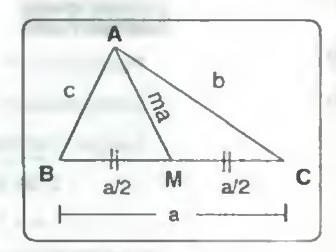
$$E = \left(\frac{a + b}{a - b}\right) \times \sec^2 \frac{C}{2}; \text{ Si: } \hat{A} - \hat{B} = 2\hat{C}$$

A) $2 \text{ cosec}^2 C$ B) $2 \cos C \,.\, \text{cosec}^2 C$
C) $2 \cos^2 C \,.\, \text{cosec } C$ D) $2 \text{ sen } C \,.\, \sec^2 C$
E) $\text{sen } C \,.\, \text{cosec}^2 C$

Problema : En el Δ ABC; se cumple:

$m_a = \sqrt{bc \cos A + 1}$; Hallar el valor del lado "a".

A) $\sqrt{3}$
B) $2\sqrt{2}$
C) $3\sqrt{2}$
D) 2
E) 3/2



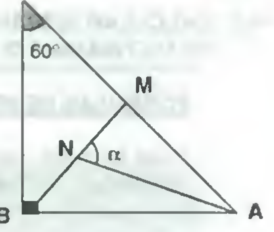
Problema : En la figura:

BM : Mediana del ◺ ABC
AN : Mediana del Δ ABM $\hat{C} = 60°$.
Hallar: "cos α"

A) 2/7 B) $\frac{1}{\sqrt{7}}$

C) $\frac{2}{\sqrt{7}}$ D) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

E) $\frac{2}{\sqrt{5}}$



Problema : Dado un triángulo ABC; reducir la siguiente expresión:

$$R = \frac{b - c}{b + c} \cdot \text{colg}\left(\frac{\hat{B} + \hat{C}}{2}\right)$$

A) $\text{tg } \frac{\hat{A}}{2}$ B) $\text{cotg } \frac{\hat{A}}{2}$ C) $\sec \frac{\hat{A}}{2}$

D) $\text{sen } \frac{\hat{A}}{2}$ E) $\cos \frac{\hat{A}}{2}$

Problema : En un Δ ABC; simplificar:

$$n = \frac{(a + b - c)(a + b + c)}{1 + \cos C}$$

A) ab B) 2ab C) 2a D) 2b E) 2c

Problema : En la figura.

Hallar la relación: $\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$

A) 5/6
B) 6/5
C) 3/5
D) 4/5
E) 5/2

Clave de Respuestas

1. B	2. A	3. B	4. B	5. D
6. A	7. A	8. B	9. A	

10.4 CALCULAR SEMIÁNGULOS EN FUNCIÓN DE LOS LADOS Y DEL SEMIPERÍMETRO DE UN TRIÁNGULO.

FÓRMULAS DE BRIGGS

Estas fórmulas relacionan las Funciones Trigonométricas de la mitad de los ángulos de un triángulo con los lados de dichos triángulos.

10.4.1 Dado un Δ ABC. Expresar: Cos $\frac{A}{2}$ en función de los lados (a, b y c) y el semiperímetro (p)

Resolución:

- En el Δ ABC; Por la ley de cosenos se tiene:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Donde: $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$1 + \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + 1 \qquad \text{Sumamos "1" a ambos miembros}$$

$$2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{b^2+c^2-a^2+2bc}{2bc} = \frac{\left(b^2+2bc+c^2\right)-a^2}{2bc}$$

$$2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

$$2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc} \quad \ldots(1)$$

Perímetro = P

Semiperímetro = p

Luego: Perímetro = 2p

Σ de lados = 2p

∴ a + b + c = 2p

Sabemos que: $2p = a + b + c$ ...(2)

De donde: $2p - a = b + c$ ...(3)

Reemplazando (2) y (3) en (1):

$$2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{(2p)(2p-a-a)}{2bc}$$

$$2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{p(2p-2a)}{bc} \Rightarrow 2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{2p(p-a)}{bc}$$

$$\therefore \cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

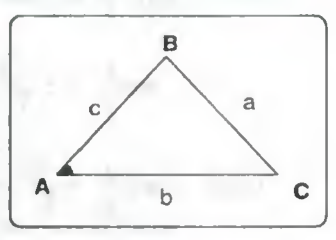
(sólo se tomará el valor positivo)

Luego: $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p\,(p-a)}{bc}}$ $\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p\,(p-b)}{ac}}$ $\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p\,(p-c)}{ab}}$

10.4.2 Dado un Δ ABC; Expresar: sen $\frac{A}{2}$; en función de los lados (a, b, c) y el semiperímetro (p)

Resolución:

- En el Δ ABC; Por la ley de Cosenos, se tiene:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Donde:

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$; multiplicamos por "-1" a ambos miembros:

$$(-1)\cos A = (-1)\left[\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right]$$

$$-\cos A = \frac{-b^2-c^2+a^2}{2bc}$$

Sumamos "1" a ambos miembros:

$$1-\cos A = \frac{-b^2-c^2+a^2}{2bc} + 1 \Rightarrow 1-\cos A = \frac{-b^2-c^2+a^2+2bc}{2bc}$$

$$1-\cos A = \frac{a^2-\left(b^2-2bc+c^2\right)}{2bc} \Rightarrow 1-\cos A = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$1-\cos A = \frac{(a+b-c)\,(a-b+c)}{2bc}$$

Recuerda que:

$$1-\cos A = 1-\left(1-2\,\text{sen}^2\frac{A}{2}\right)$$

$$1-\cos A = 2\,\text{sen}^2\frac{A}{2}$$

$$2\,\text{sen}^2\frac{A}{2} = \frac{(a+b-c)\,(a+c-b)}{2bc} \quad \ldots(1)$$

Pero: $a+b+c = 2p$ ...(2)

$$\begin{cases} a+b = 2p-c & \ldots(3) \\ a+c = 2p-b & \ldots(4) \end{cases}$$

Reemplazando (3) y (4) en (1):

$$2\ \text{sen}^2\frac{A}{2} = \frac{(2p-c-c)(2p-b-b)}{2bc} = \frac{(2p-2c)(2p-2b)}{2bc}$$

$$\not{2}\ \text{sen}^2\frac{A}{2} = \frac{\not{4}(p-c)(p-b)}{\not{2}bc} = \frac{2(p-c)(p-b)}{bc}$$

$$\text{sen}^2\frac{A}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$$

$$\therefore\ \text{sen}\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$ *(Sólo se tomará el valor positivo)*

Luego: $$\text{sen}\ \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \qquad \text{sen}\ \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$$

$$\text{sen}\ \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

10.4.3 Dado un Δ ABC; Expresar: $\text{tg}\ \frac{A}{2}$ en función de los lados (a, b , c) y el semiperímetro (p).

Resolución:

Sabemos que: $\text{sen}\ \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ ...(1) $\quad \cos\ \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ ...(2)

Dividimos miembro a miembro (1) : (2); obteniendo:

$$\frac{\text{sen}\ \frac{A}{2}}{\cos\ \frac{A}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}{\frac{p(p-a)}{bc}}} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \quad \therefore \quad \text{tg}\ \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

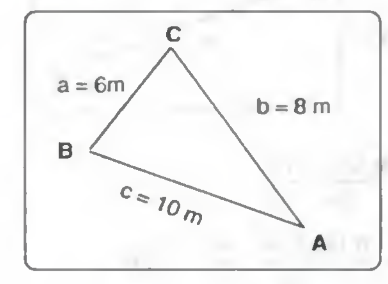
Por simple Deducción:

$$\text{tg}\ \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \qquad \text{tg}\ \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

Ejemplo 1 : Dado un Δ ABC; cuyos lados miden 6, 8 y 10 metros respectivamente.

Calcular: sen $\frac{A}{2}$ y cos $\frac{C}{2}$

Resolución:



- En primer lugar, calculamos el semiperímetro del Δ ABC.

$$\underbrace{\text{Semiperímetro } \Delta \text{ ABC}}_{p} = \frac{\text{Perímetro } \Delta \text{ ABC}}{2}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{6+8+10}{2}$$

$$\therefore \quad p = 12$$

- En segundo lugar, aplicamos la fórmula:

$$\text{sen}\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

Remplazando valores se tiene:

$$\text{sen}\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(12-8)(12-10)}{8\cdot 10}} = \sqrt{\frac{4\cdot 2}{8\cdot 10}} = \sqrt{\frac{1}{10}}$$

$$\text{sen}\,\frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \quad \therefore \quad \text{sen}\,\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Luego, calculamos: $\cos\frac{C}{2}$

Por fórmula: $\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$

Reemplazando valores se tiene:

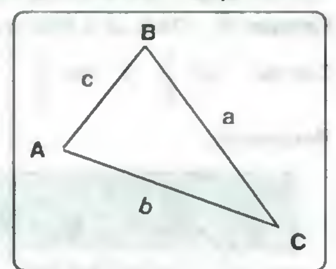
$$\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{12(12-10)}{6\cdot 8}} = \sqrt{\frac{2(2)}{8}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\cos\frac{C}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \quad \therefore \quad \cos\frac{C}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ejemplo 2 : Dado un Δ ABC; Reducir la siguiente expresión: $M = a\cos^2\frac{B}{2} + b\cos^2\frac{A}{2}$

Resolución:

- Del Δ ABC, se tiene que:



i) $\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p\,(p-b)}{ac}} \Rightarrow \cos^2\frac{B}{2} = \frac{p\,(p-b)}{ac}$ ...(1)

ii) $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p\,(p-a)}{bc}} \Rightarrow \cos^2\frac{a}{2} = \frac{p\,(p-a)}{bc}$ ...(2)

Reemplazando (1) y (2) en "M"

$$M = a\cdot\left(\frac{p\,(p-b)}{ac}\right) + b\cdot\left(\frac{p\,(p-a)}{bc}\right)$$

$$M = \frac{p\,[(p-b)+(p-a)]}{c} = \frac{p\,(2p-a-b)}{c} \quad ...(3)$$

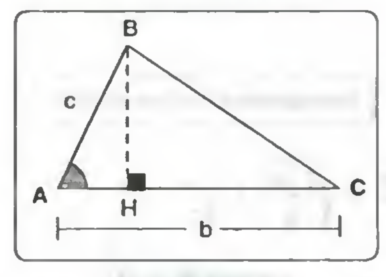
Pero: $2p = a + b + c$ ... (4)

Reemplazando (4) en (3):

$$M = \frac{p\,(a+b+c-a-b)}{c} = \frac{pc}{c} = p \Rightarrow \therefore M = p$$ **Rpta.**

10.5 FÓRMULAS DEL TRIÁNGULO

I. La superficie de todo triángulo es igual al semiproducto de dos de sus lados por el Seno del ángulo comprendido entre ellos.



Por Geometría: $S = \frac{\text{base} \times \text{allura}}{2}$

$S = \frac{b \times \overline{BH}}{2}$ ...(1)

- En el ⊿ AHB: $\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{\overline{BH}}{c}$

Donde: $\overline{BH} = c\,.\,\operatorname{sen}\hat{A}$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1): $S = \frac{b\cdot c\cdot \operatorname{sen} A}{2} \Rightarrow \therefore S = \frac{b\cdot c}{2}\cdot \operatorname{sen} A$ **(Fórmula)**

II. Si: $S = \frac{b\cdot c}{2}\cdot \operatorname{sen}\hat{A}$ ...(1)

Por la ley de Senos: $\dfrac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \dfrac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = 2R$

De donde: $\dfrac{a}{\text{sen } A} = 2R \Rightarrow \text{sen } A = \dfrac{a}{2R}$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1): $S = \dfrac{bc}{2}\cdot\left(\dfrac{a}{2R}\right) \Rightarrow \therefore\ \boxed{S = \dfrac{abc}{4R}}$ **(Fórmula)**

III. Si: $\boxed{S = \dfrac{b\cdot c}{2}\cdot \text{sen}\,\hat{A} \quad ...(\theta)}$

- Por ángulo mitad: $\text{sen}\,\hat{A} = 2\,\text{sen}\,\dfrac{\hat{A}}{2}\cdot\cos\dfrac{\hat{A}}{2}$ ...(β)

Reemplazando (β) en (θ): $S = \dfrac{bc}{\not{2}}\cdot\left(2\,\text{sen}\,\dfrac{\hat{A}}{2}\cdot\cos\dfrac{\hat{A}}{2}\right)$

$$S = bc\cdot\left(\text{sen}\,\dfrac{\hat{A}}{2}\cdot\cos\dfrac{\hat{A}}{2}\right) \quad ...(\omega)$$

- De las fórmulas de Briggs.

$$\boxed{\text{sen}\,\dfrac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}} \quad y \quad \boxed{\cos\dfrac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}}$$

Reemplazando el valor de estas fórmulas en (v):

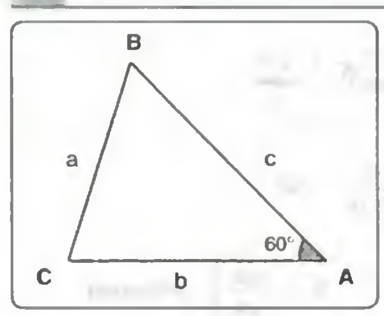
$$S = bc\cdot\left(\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}\right)$$

$$S = bc\cdot\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)\,p\,(p-a)}{(bc)^2}} = \not{bc}\cdot\dfrac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{\not{bc}}$$

$$\therefore\ \boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$ ***(Fórmula)***

Ejemplo 1 : En un triángulo ABC, el ángulo $\hat{A}$ mide 60°. Hallar su área si se tiene que $(b+c)^2 = a^2 + 4$.

Resolución:



- Por ley de Cosenos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 60°$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \; a^2 = b^2 + c^2 - bc \quad ...(I)$$

De la condición: $(b + c)^2 = a^2 + 4$; obtenemos:

$$b^2 + c^2 + 2bc = a^2 + 4 \quad ...(II)$$

Reemplazando (I) en (II): $b^2 + c^2 + 2bc = b^2 + c^2 - bc + 4$

$$3bc = 4 \quad \Rightarrow \quad \therefore \; bc = \frac{4}{3} \quad ...(III)$$

Luego, calculamos el área del triángulo ABC

$$\text{área } \Delta \text{ ABC} = \frac{AC \times AB}{2} \text{ sen } 60°$$

$$\text{área } \Delta \text{ ABC} = \frac{b \times c}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = bc \times \frac{\sqrt{3}}{4} \quad ...(IV)$$

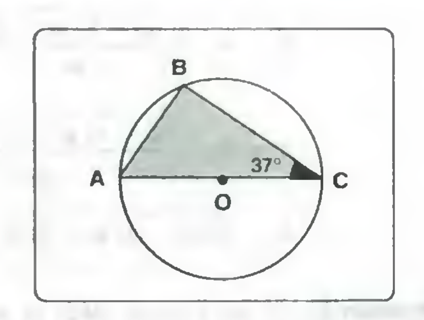
Reemplazamos (III) en (IV): $\text{área } \Delta \text{ ABC} = \frac{4}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\therefore \; \text{área } \Delta \text{ ABC} = \frac{\sqrt{3}}{3} \, u^2 \quad \textit{Rpta.}$$

Ejemplo 2 : En la figura mostrada: Hallar el valor del área del triángulo ABC.

Si: AB = 12.

Además: "O" es el centro del círculo.



Resolución:

- Todo Δ inscrito en medio círculo es un triángulo rectángulo; en el Δ ABC ($\hat{B} = 90°$)

Por ley de Senos: $\frac{\overline{AB}}{\text{sen } 37°} = \frac{\overline{AC}}{\text{sen } 90°}$

Donde: $\dfrac{12}{\text{sen } 37°} = \dfrac{\overline{AC}}{1}$; Pero : $\boxed{\text{sen } 37° = \dfrac{3}{5}}$

$$\frac{12}{\left(\frac{3}{5}\right)} = \overline{AC} \Rightarrow \therefore \overline{AC} = 20$$

- En el Δ ABC : $\boxed{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°}$

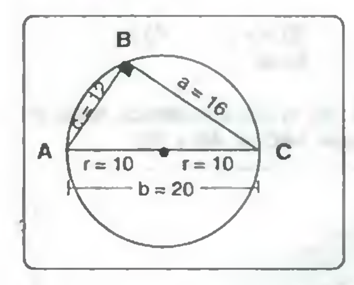
$$\hat{A} + 90° + 37° = 180° \Rightarrow \hat{A} + 127° = 180° \Rightarrow \therefore \boxed{\hat{A} = 53°}$$

Luego: $\text{área } \Delta \text{ ABC} = \dfrac{\overline{AC} \times \overline{AB}}{2} \text{ sen } \hat{A}$

$$\text{área } \Delta \text{ ABC} = \frac{20 \times 12}{2} \cdot \text{sen } 53° \text{ ; Pero : sen } 53° = \frac{4}{5}$$

$$\text{área } \Delta \text{ ABC} = 10 \times 12 \times \left(\frac{4}{5}\right) = 96 \text{ u}^2 \Rightarrow \therefore \boxed{\text{área } \Delta \text{ ABC} = 96 \text{ u}^2}$$ ***Rpta.***

Otra Forma:



- Por el Teorema de Pitágoras:

$$\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2$$

$$\overline{BC}^2 + (12)^2 = (20)^2$$

$$\overline{BC}^2 = 400 - 144 = 256$$

$$\overline{BC} = \sqrt{256} \Rightarrow \overline{BC} = 16$$

Luego; Aplicamos la Fórmula: $\boxed{S = \dfrac{abc}{4\ r}}$

Reemplazando valores en está fórmula, obtenemos:

$$S = \frac{16 \times 20 \times 12}{4 \times 10} = \frac{16 \times 2 \times 12}{4} = 16 \times 2 \times 3 = 96 \text{ u}^2 \Rightarrow \therefore \boxed{S = 96 \text{ u}^2}$$ ***Rpta.***

Otra Forma:

Aplicando la fórmula: $\text{área } \Delta \text{ ABC} = \sqrt{p\ (p - a)\ (p - b)\ (p - c)}$

Pero: $p = \dfrac{a + b + c}{2} \Rightarrow p = \dfrac{16 + 20 + 12}{2} \Rightarrow \therefore \boxed{p = 24}$

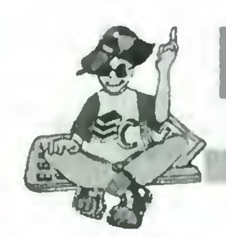
Reemplazando valores en la fórmula, obtenemos:

$$\text{área } \Delta \text{ ABC} = \sqrt{24\ (24-16)\ (24-20)\ (24-12)}$$

$$\text{área } \Delta \text{ ABC} = \sqrt{24\ (8)\ (4)\ (12)} = \sqrt{(12\times 2)\times 8\times 4\times 12}$$

$$\text{área } \Delta \text{ ABC} = \sqrt{(12)^2\times (8)^2} = 12\times 8 = 96\ u^2 \Rightarrow \therefore \text{ área } \Delta \text{ ABC} = 96\ u^2$$

Observación: *Este problema se ha resuelto de estas 3 formas pues con la intención es de darnos cuenta como se aplican las fórmulas estudiadas.*



PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE FÓRMULAS DE TRIÁNGULOS

NIVEL I

Problema 1 : Dado un triángulo ABC, sus lados miden 7, 12 y 13 m respetivamente.

Calcular: $\operatorname{sen}\frac{A}{2}$ y $\cos\frac{B}{2}$

A) $\frac{\sqrt{13}}{13}$ y $\frac{8\sqrt{91}}{91}$ **B)** $\frac{\sqrt{13}}{13}$ y $\frac{4\sqrt{91}}{13}$

C) $\frac{\sqrt{13}}{31}$ y $\frac{2\sqrt{91}}{31}$ **D)** $\frac{\sqrt{31}}{13}$ y $\frac{8\sqrt{91}}{19}$ **E)** N.A.

Problema 2 : Dado un Δ ABC; Reducir la siguiente expresión:

$$R = a + p \cdot \operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot \operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

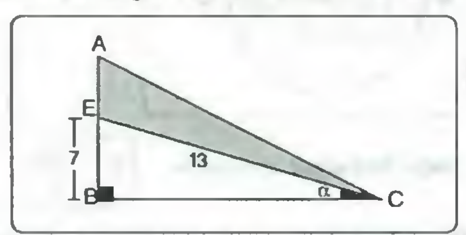
A) R = a **B)** R = b **C)** R = c
D) R = p **E)** R = 2p

Problema 3 : Dado un triángulo ABC; Reducir la siguiente expresión:

$$M = \left[bc\cdot \operatorname{sen}^2\frac{\hat{A}}{2} - ac\cdot \operatorname{sen}^2\frac{\hat{B}}{2}\right]\times\left(\frac{1}{p-c}\right)$$

A) a - b **B)** a + b **C)** a - c
D) a + c **E)** ab

Problema 4 : En la figura mostrada; hallar el área del triángulo AEC; si: AB = BC.

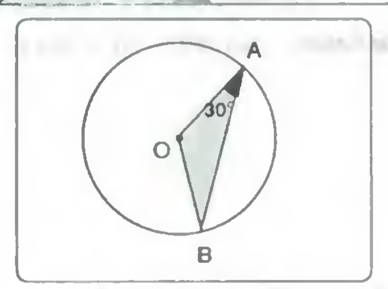


A) $\frac{65}{3}\cos\alpha$ **B)** $\frac{65}{2}\operatorname{sen}\alpha$

C) $\frac{65}{2}\cos\alpha$ **D)** $\frac{65}{4}\cos\alpha$

E) $\frac{65}{2}\sec\alpha$

Problema 5 : En la figura mostrada. Hallar el área del triángulo AOB, si: AB = 60 m; "O" es el centro del circulo.



A) $200\sqrt{3}\ m^2$ B) $300\sqrt{3}\ m^2$

C) $100\sqrt{3}\ m^2$ D) $600\sqrt{3}\ m^2$

E) $600\ m^2$

Clave de Respuestas

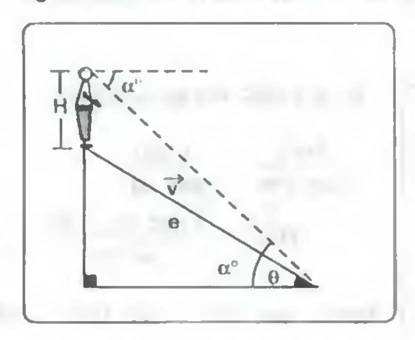
1. A | 2. D | 3. A | 4. C | 5. B

10.6 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Resolver un triángulo es dar 3 elementos principales uno de ellos por lo menos es el lado Hallar los demas elementos.

La ley de Senos, y la ley de Cosenos es lo mas usual para estos problemas.

Problema 1 : Qué tiempo emplea en descender por el plano inclinado el observador de la figura mostrada:



A) $t = \dfrac{H \operatorname{sen}(90°-\alpha) \cdot \cos(\alpha-\theta)}{V}$

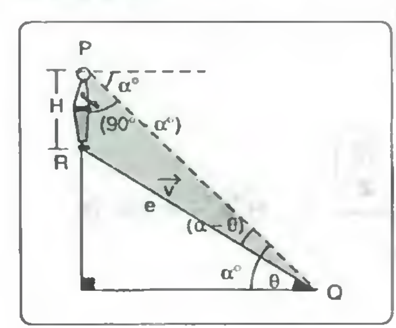
B) $t = \dfrac{H \cos(90°-\alpha) \cdot \sec(\alpha-\theta)}{V}$

C) $t = \dfrac{H}{V} \cos\alpha \cdot \operatorname{cosec}(\alpha-\theta)$

D) $t = \dfrac{H}{V} \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{cosec}(\theta-\alpha)$

E) $t = \dfrac{H}{V} \operatorname{sen}\alpha \cdot \sec(\alpha-\theta)$

Resolución:



Sabemos que: Espacio = Velocidad x Tiempo

De donde: $\text{Tiempo} = \dfrac{\text{Espacio}}{\text{Velocidad}}$

$$t = \frac{e}{V} \quad \ldots \text{(I)}$$

- En el Δ RPQ: Por la ley de Senos; se tiene:

$$\frac{H}{\operatorname{sen}(\alpha-\theta)} = \frac{e}{\operatorname{sen}(90°-\alpha)}$$

$$e = \frac{H \text{ sen } (90° - \alpha)}{\text{sen } (\alpha - \theta)}$$ ➡ ***Por Co-Razón:*** $\text{sen } (90° - \alpha) = \cos \alpha$

$$\therefore \quad e = \frac{H \cos \alpha}{\text{sen } (\alpha - \theta)} \quad ...(II)$$

Reemplazando (II) en (I):

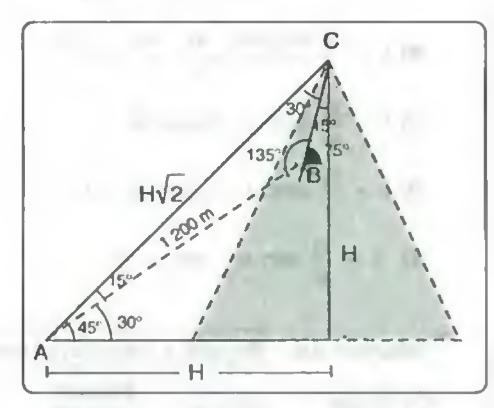
$$t = \frac{\left(\dfrac{H \cos \alpha}{\text{sen } (\alpha - \theta)}\right)}{V} = \frac{H \cos \alpha}{V \cdot \text{sen } (\alpha - \theta)} = \frac{H}{V} \cos \alpha \cdot \frac{1}{\text{sen } (\alpha - \theta)}$$

$$\therefore \quad t = \frac{H}{V} \cos \alpha \cdot \text{cosec } (\alpha - \theta)$$ ***Rpta. C***

Problema 2 : Desde el punto "A" de la base de una montaña se observa su Cima con un ángulo de 45°, luego se avanza hacia la montaña 1 200 metros por una pendiente de 30° y se observa nuevamente la Cima con un ángulo de 75°. Calcular la altura de la montaña.

A) 1 400 m B) 1 200 m C) 1 500 m D) 1 000 m E) 600 m

Resolución:



- En el Δ ABC: Por ley de Senos:

$$\frac{H\sqrt{2}}{\text{sen } 135°} = \frac{1\,200}{\text{sen } 30°}$$

$$H\sqrt{2} = \frac{1\,200 \text{ sen } 135°}{\text{sen } 30°} \quad ...(I)$$

Pero: $\text{sen } 135° = \text{sen } (180° - 135°)$

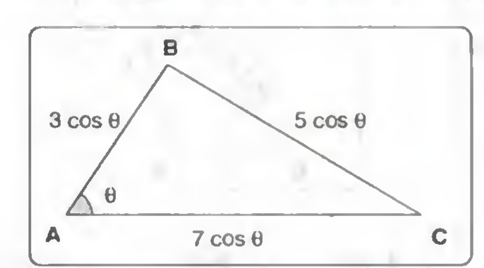
$$\text{sen } 135° = \text{sen } 45° \quad ...(II)$$

Reemplazando (II) en (I):

$$H\sqrt{2} = \frac{1\,200 \text{ sen } 45°}{\text{sen } 30°} = \frac{1\,200\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\dfrac{1}{2}} \Rightarrow H\sqrt{2} = 1\,200\sqrt{2}$$

$$\therefore \quad H = 1\,200 \text{ m}$$ ***Rpta. B***

Problema 3 : Hallar el perímetro del triángulo ABC.



A) 105/4 B) 165/14 C) 115/14
D) 125/14 E) 185/14

Resolución:

Por la "ley de Cosenos", se tiene que:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\hat{A}$$

Donde:

$$(5\cos\theta)^2 = (3\cos\theta)^2 + (7\cos\theta)^2 - 2(3\cos\theta)(7\cos\theta)\cos\theta$$

$$25\cos^2\theta = 9\cos^2\theta + 49\cos^2\theta - 42\cos^2\theta\cdot\cos\theta$$ Simplificamos "$\cos^2\theta$"

$$25 = 9 + 49 - 42\cos\theta \Rightarrow 42\cos\theta = 58 - 25 \Rightarrow 42\cos\theta = 33$$

$$\cos\theta = \frac{33}{42} \Rightarrow \quad \therefore \boxed{\cos\theta = \frac{11}{14}}$$

Luego: Perímetro del Δ ABC = Suma de sus tres lados

Perímetro del Δ ABC = AB + BC + AC = $3\cos\theta + 5\cos\theta + 7\cos\theta$

Perímetro del Δ ABC = $15\cos\theta$

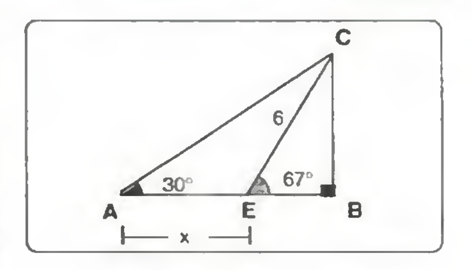
Perímetro del Δ ABC = $15\times\frac{11}{14} = \frac{165}{14}$

$\therefore$ Perímetro del Δ ABC = $\frac{165}{14}$ ***Rpta. B***

PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE RESOLUCÍON DE TRIÁNGULOS

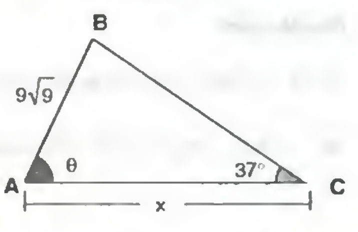
NIVEL I

Problema 1: En la figura, calcular "x". (Usar: sen 37° = 0,6)



A) 8 **B)** 7 **C)** 9 **D)** $\sqrt{5}$ **E)** 36/5

Problema 2: Sabiendo que: tg θ = 2/5. Halle el valor de "x" en la figura mostrada:

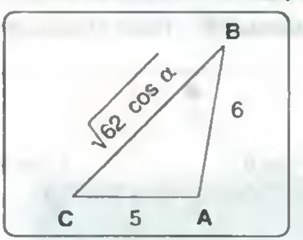


A) 35 **B)** 53 **C)** 69 **D)** 96 **E)** 89

Problema 3: En un triángulo equilátero ABC; se toman los puntos P y Q en $\overline{BC}$ de tal manera que BP = PQ = QC. Calcular: cos $\widehat{PAQ}$ (AB = 6)

A) 13/14 **B)** 14/15 **C)** 17/19
D) 16/19 **E)** N.A.

Problema 4: En la figura mostrada. Hallar: "sen θ"



A) $\dfrac{2\sqrt{93}}{13}$ **B)** $\dfrac{3\sqrt{39}}{31}$ **C)** $\dfrac{3\sqrt{93}}{13}$

D) $\dfrac{3\sqrt{93}}{31}$ **E)** $\dfrac{13\sqrt{93}}{3}$

Clave de Respuestas

1. E | 2. C | 3. A | 4. D

11 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Son aquellas relaciones que se logran con los datos: Valor Natural y Función Circular

a) Si: $\underset{\text{F.C}}{\underline{\text{Sen}}}\ \overset{\text{F.C.I}}{x} = \underset{\text{Valor Natural}}{\frac{-3}{5}}$	b) Si: $\underset{\text{F.C}}{\underline{\text{tg}}}\ \overset{\text{F.C.I}}{\alpha} = \underset{\text{Valor Natural}}{\sqrt{3}}$
F.C.I.: Función Circular Inversa	**F.C.:** Función Circular

SIMBOLOGÍA: Existen 2 formas de abreviaturas matemáticas para una función circular inversa. Francesa e Inglesa.

a) $\text{Cos}\ \theta = \frac{4}{5} \Rightarrow \theta = \begin{cases} \text{arc Cos}\ \frac{4}{5} = \text{arc Cos}\ 0,8 \longrightarrow \textit{Representación Francesa} \\ \text{Cos}^{-1}\ \frac{4}{5} = \text{Cos}^{-1} 0,8 \longrightarrow \textit{Representación Inglesa} \end{cases}$

b) $\text{Sec}\ \beta = \frac{3}{2} \Rightarrow \beta = \begin{cases} \text{arc Sec}\ \frac{3}{2} = \text{arc Sec}\ 1,5 \longrightarrow \textit{Representación Francesa} \\ \text{Sec}^{-1}\ \frac{3}{2} = \text{Sec}^{-1}\ 1,5 \longrightarrow \textit{Representación Inglesa} \end{cases}$

Observación:

La expresión: $\theta = \text{Cos}^{-1}\text{N}$*; significa función inversa del Coseno y No:* $\frac{1}{\text{Cos N}}$*; o función inversa algebraica.*

$$\text{Cos}^{-1}\ \frac{4}{5} \neq \frac{1}{\text{Cos}\ \frac{4}{5}}$$

$$\therefore\ \text{Cos}^{-1}\ \frac{4}{5} \neq \text{Sec}\ \frac{4}{5}\ \textbf{\textit{(No confundir)}}$$

SUGERENCIAS PARA RESOLVER PROBLEMAS CON FUNCIONES INVERSAS:

I) Es conveniente aplicar este capítulo cuando el valor natural no es notable.

II) Los problemas los podemos resolver por 2 procedimientos:

a) Con fórmulas o identidades del presente capítulo.
b) Por cambio de variable, con este procedimiento un problema se identifica con algún capítulo tratado anteriormente.

Fórmula Importante: Sea: $\text{Sen}\alpha = \textbf{N}$; por inversas se obtiene:
$\alpha = \text{arc Sen } \textbf{N}$ ó $\text{arc Sen } \textbf{N} = \alpha$

Tomamos "Sen" a ambos miembro: $\text{Sen (arc Sen N)} = \text{Sen } \alpha$

Generalizando:

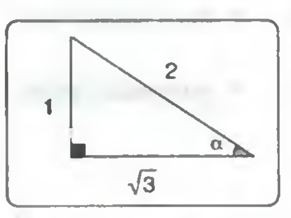
$$\underbrace{\text{F.T. (arc. F.T.N)}}_{\textbf{N}} = \text{Sen } \alpha$$

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Ejercicio **1:** Calcular los valores de: **a)** $\text{Cotg}\left(\text{arc Sen}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

Resolución:

Hacemos que: $\text{arc Sen}\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha \Rightarrow \frac{1}{2} = \text{Sen } \alpha$ (Graficamos en un ◺)



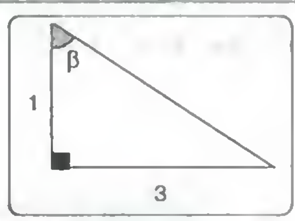
Donde: $\text{Cotg } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

$$\text{Cotg}\left(\text{arc Sen}\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \sqrt{3}$$ ***Rpta.***

b) $\text{tg}\left(\text{arc Cotg}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$

Resolución:

Hacemos que: $\text{arc Cotg}\left(\frac{1}{3}\right) = \beta \Rightarrow \frac{1}{3} = \text{Cotg } \beta$ (Graficamos en un ◺)



Donde: $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{3}{1} = 3$

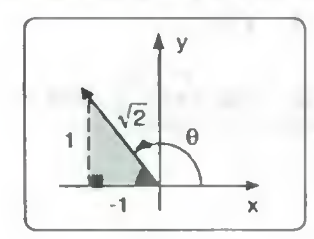
$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\ Cotg}\left(\frac{1}{3}\right)\right) = 3$$ ***Rpta.***

c) $\operatorname{Sen}\left(\operatorname{arc\ Cos}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$

Resolución:

Hacemos que: $\operatorname{arc\ Cos}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \theta \Rightarrow -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \operatorname{Cos}\theta$ ("θ" ∈ al Q_2 ó Q_3)

Graficamos el valor de "Cosθ" en el Q_2.



$\operatorname{Sen}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

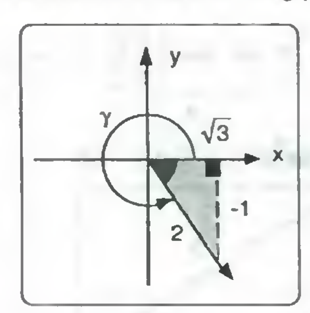
$$\operatorname{Sen}\left(\operatorname{arc\ Cos}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$ ***Rpta.***

d) $\operatorname{Cosec}\left(\operatorname{arc\ Cotg}\left(-\sqrt{3}\right)\right)$

Resolución:

Hacemos que: $\operatorname{arc\ Cotg}\left(-\sqrt{3}\right) = \gamma \Rightarrow -\sqrt{3} = \operatorname{Cotg}\gamma$ ("γ" ∈ al Q_2 ó Q_4)

Graficamos el valor de "Cotg γ" en el Q_4.



$\operatorname{Cotg}\gamma = -\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{-1}$

$\operatorname{Cosec}\gamma = \dfrac{2}{-1} = -2$

$$\operatorname{Cosec}\left(\operatorname{arc\ Cotg}\left(-\sqrt{3}\right)\right) = -2$$ ***Rpta.***

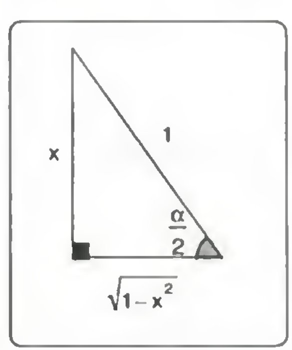
Ejercicio 2: Sen (2 arc Sen x) es idéntico a:

A) $2x\sqrt{1-x^2}$ B) $2x\sqrt{x^2-1}$ C) $x\sqrt{1+x^2}$ D) $(1-x^2)\sqrt{2x}$ E) $(x^2-1)\sqrt{2x}$

Resolución:

En la expresión: $\text{Sen}\,(\underbrace{2\,\text{arc Sen}\,x}_{\alpha}) = \text{Sen}\,\alpha$

Hacemos que: $2\,\text{arc Sen}\,x = \alpha \Rightarrow \text{arc Sen}\,x = \dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow \therefore\; x = \text{Sen}\,\dfrac{\alpha}{2}$ (Graficamos en un ◺)



$$\text{Sen}\frac{\alpha}{2} = x = \frac{x}{1}$$

$$\text{Cos}\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1-x^2}$$

Luego: $\text{Sen}\,\alpha = 2\,\text{Sen}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\text{Cos}\,\dfrac{\alpha}{2}$

$$\text{Sen}\,\alpha = 2\cdot x\cdot\sqrt{1-x^2}$$

$$\therefore\; \text{Sen}\,(2\,\text{arc Sen}\,x) = 2x\sqrt{1-x^2}$$ ***Rpta. A***

Ejemplo 3: Calcular: $R = \text{Cos}\left[3\,\text{Arc Sen}\left(\dfrac{2}{3}\right)\right]$

A) $\pm\dfrac{7\sqrt{5}}{27}$ B) $\dfrac{-7\sqrt{5}}{27}$ C) $\dfrac{7\sqrt{5}}{27}$ D) $\pm\dfrac{5\sqrt{5}}{27}$ E) $\dfrac{5\sqrt{5}}{27}$

Resolución:

Hacemos que: $\text{Arc Sen}\left(\dfrac{2}{3}\right) = \alpha \Rightarrow \dfrac{2}{3} = \text{Sen}\,\alpha$

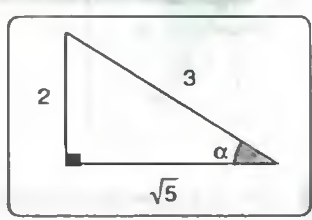
Luego la expresión dada, se transforma en: $R = \text{Cos}\left[3\,\underbrace{\text{Arc Sen}\left(\dfrac{2}{3}\right)}_{\alpha}\right] = \text{Cos}\,[3\alpha]$

$$R = 4\,\text{Cos}^3\alpha - 3\,\text{Cos}\alpha \quad ...(I)$$

El valor de "Sen α" lo graficamos en un ◺.

$$\text{Sen}\,\alpha = \frac{2}{3}$$

$$\text{Cos}\,\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad ...(II)$$



Reemplazamos (II) en (I):

$$R = 4\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

$$R = 4\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) - 3\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{20}{27}\sqrt{5} - \sqrt{5} \Rightarrow \therefore\ R = -\frac{7\sqrt{5}}{27}$$ **Rpta. B**

Ejemplo 4: Hallar "x" si: $\text{arc tg } x = \text{arc Cos}\left(\frac{3}{4}\right)$

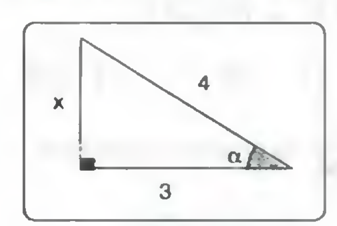
A) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ B) $\sqrt{7}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{5}{3}$

Resolución:

De la expresión: $\text{arc tg } x = \text{arc Cos}\left(\frac{3}{4}\right)$; hacemos que cada miembro sea igual a "α"

Luego:	i) $\text{arc tg } x = \alpha \Rightarrow x = \text{tg }\alpha$	ii) $\text{arc Cos}\left(\frac{3}{4}\right) = \alpha \Rightarrow \frac{3}{4} = \text{Cos }\alpha$

Graficando el valor de "Cos α" en un ◺; obtenemos:



$\text{Cos }\alpha = \frac{3}{4}$ → ***Cateto Adyacente*** (3) / ***Hipotenusa*** (4)

Por el Teorema de Pitágoras: $4^2 = 3^2 + x^2$

$$\therefore\ x = \sqrt{7}$$ **Rpta. B**

Ejemplo 5: Calcular: $E = \text{Sen}\left\{\text{arc Cotg}\left[5\ \text{Cosec}\left(\text{arc Cos }\frac{2}{3}\right)\right]\right\}$

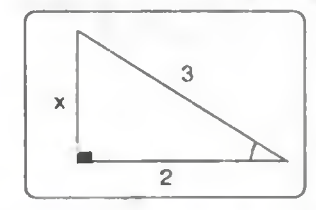
A) $\frac{2\sqrt{46}}{13}$ B) $\frac{3\sqrt{46}}{46}$ C) $\frac{\sqrt{23}}{23}$ D) $\frac{\sqrt{46}}{46}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

Resolución:

De la expresión dada, es recomendable empezar a trabajar de lo último hacia adelante, veamos:

$$E = \text{Sen}\left\{\text{arc Cotg}\left[5\ \text{Cosec}\underbrace{\left(\text{arc Cos}\ \frac{2}{3}\right)}_{\alpha}\right]\right\}$$

hacemos que: $\text{arc Cos}\ \frac{2}{3} = \alpha \Rightarrow \frac{2}{3} = \text{Cos}\ \alpha$ (Lo graficamos en un ◺)



Por el Teorema de Pitágoras: $x^2 = 3^2 - 2^2$

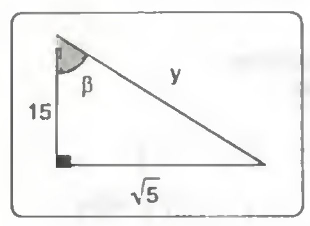
$\therefore\ x = \sqrt{5}$

Donde: $\text{Cosec}\ \alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}$

Reemplazamos el valor de "Cosec α" en la expresión "E".

$$E = \text{Sen}\left\{\text{arc Cotg}\left[5 \times \frac{3}{\sqrt{5}}\right]\right\} \Rightarrow E = \text{Sen}\left\{\underbrace{\text{arc Cotg}\ \frac{15}{\sqrt{5}}}_{\beta}\right\} \quad ...(I)$$

Hacemos que: $\text{arc Cotg}\ \frac{15}{\sqrt{5}} = \beta \Rightarrow \frac{15}{\sqrt{5}} = \text{Cotg}\ \beta$ (Lo graficamos en un ◺)



Por el Teorema de Pitagoras: $y^2 = 15^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2$

$y^2 = 230 \Rightarrow \therefore\ y = \sqrt{230}$

Donde: $\text{Sen}\ \beta = \frac{\sqrt{5}}{y} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{230}}$; racionalizando obtenemos:

$$\text{Sen}\ \beta = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{230}} \times \frac{\sqrt{230}}{\sqrt{230}} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{5 \times 46}}{230} = \frac{5\sqrt{46}}{230} \Rightarrow \therefore\ \text{Sen}\ \beta = \frac{\sqrt{46}}{46} \quad ...\ (II)$$

Reemplazamos (II) en (I): $E = \text{Sen}\ \beta \Rightarrow \therefore\ E = \frac{\sqrt{46}}{46}$ ***Rpta. D***

Ejercicio 6: El valor de: $E = \text{arc tg} x + \text{arc Cotg}\ x$; es:

A) 0° **B)** 45° **C)** 90° **D)** 180° **E)** 360°

Resolución:

De la expresión: $E = \underbrace{\text{arc tg } x}_{\alpha} + \underbrace{\text{arc cotg } x}_{\beta}$, hacemos $E = \alpha + \beta$ ...(I)

Luego: **i)** arc tg x = α → $x = \text{tg } \alpha$ **ii)** arc cotg x = β → $x = \text{cotg } \beta$

De las expresiones (i) y (ii), obtenemos que: $\text{tg } \alpha = \text{cotg } \beta \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$ ...(II)

Reemplazamos (II) en (I): ➡ ∴ $E = 90°$ ***Rpta. C***

Ejercicio 7: ¿A qué es igual?: $K = 2 \text{ arc tg}\left[2 \text{ Sen}\left(2 \text{ arc tg } \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$

A) 15° **B)** 30° **C)** 45° **D)** 60° **E)** 120°

Resolución:

Empezamos a trabajar de lo último hacia adelante, veamos:

$$K = 2 \text{ arc tg}\left[2 \text{ Sen}\left(\underbrace{2 \text{ arc tg } \frac{\sqrt{3}}{3}}_{\alpha}\right)\right] \quad ...(I)$$

i) $\text{arc tg } \frac{\sqrt{3}}{3}) \ \alpha \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \text{tg}\alpha \Rightarrow \text{tg } 30° = \text{tg } \alpha \Rightarrow \alpha = 30°$

Reemplazamos el valor de "α" en (I):

$$K = 2 \text{ arc tg}\left[2 \ \underbrace{\text{Sen } (2 \times 30°)}\right] = 2 \text{ arc tg}\left[2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

$$K = 2 \ \underbrace{\text{arc tg}\left(\sqrt{3}\right)}_{\beta} \quad ...(II)$$

ii) $\text{arc tg}\left(\sqrt{3}\right) = \beta \Rightarrow \sqrt{3} = \text{tg } \beta \Rightarrow \text{tg } 60° = \text{tg } \beta \Rightarrow \beta = 60°$

Reemplazamos el valor de "β" en (II): $K = 2\,(60°)$ ➡ ∴ $K = 120°$ ***Rpta. E***

Ejercicio 8: Calcular: $E = \text{Sen}\left(2 \text{ arc tg } \frac{1}{5} - \text{arc tg } \frac{5}{12}\right)$

A) 1/2 B) $\sqrt{2}/2$ C) $\sqrt{3}/2$ D) 0 E) 1

Resolución:

Hacemos los siguientes cambios de variables, veamos:

$$E = \text{Sen}\left(2\underbrace{\text{arc tg}\frac{1}{5}}_{\alpha} - \underbrace{\text{arc tg}\frac{5}{12}}_{\beta}\right) \quad ...(I)$$

Donde: **i)** $\text{arc tg}\dfrac{1}{5} = \alpha \rightarrow \boxed{\dfrac{1}{5} = \text{tg }\alpha}$ **ii)** $\text{arc tg}\dfrac{5}{12} = \beta \rightarrow \boxed{\dfrac{5}{12} = \text{tg }\beta}$

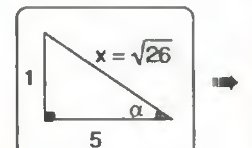
Reemplazamos valores hallados en (I):

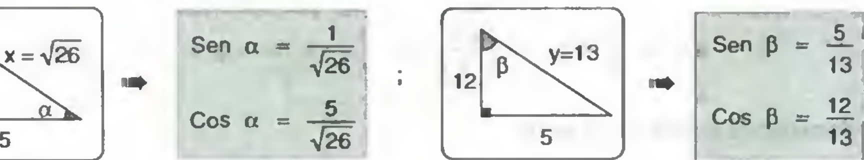
$$E = \text{Sen}(2\alpha - \beta)$$

$$E = \underline{\text{Sen }2\alpha}\,\text{Cos }\beta - \underline{\text{Cos }2\alpha}\,.\,\text{Sen }\beta$$

$$E = (2\,\text{Sen }\alpha\,\text{Cos }\alpha)\,\text{Cos }\beta - (1 - 2\,\text{Sen}^2\alpha)\,.\,\text{Sen }\beta \qquad ...(II)$$

Los valores de $\text{tg }\alpha = \dfrac{1}{5}$ y $\text{tg }\beta = \dfrac{5}{12}$, los graficamos en un ◺.





Reemplazamos valores en (II), obtenemos:

$$E = \left(2\times\frac{1}{\sqrt{26}}\times\frac{5}{\sqrt{26}}\right)\times\frac{12}{13} - \left(1 - 2\times\left(\frac{1}{\sqrt{26}}\right)^2\right)\times\frac{5}{13}$$

$$E = \frac{10\times12}{26\times13} - \left(1 - \frac{2}{26}\right)\times\frac{5}{13}$$

$$E = \frac{60}{169} - \frac{60}{169} = 0 \Rightarrow \therefore \boxed{E = 0}$$ ***Rpta. D***

Ejercicio 9 : Calcular: $K = \text{Sen}\left\{\dfrac{1}{2}\,\text{arc Cotg}\left(-\dfrac{3}{4}\right)\right\}$

A) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ B) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ C) $\dfrac{3}{4}$ D) $\dfrac{-3}{4}$ E) $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$

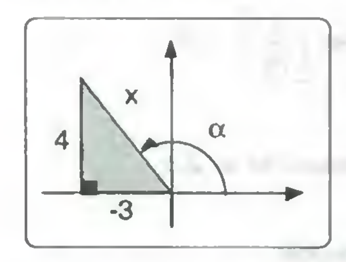
Resolución:

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$$K = \text{Sen}\left\{\underbrace{\frac{1}{2}\text{ arc Cotg}\left(-\frac{3}{4}\right)}_{\alpha}\right\} \Rightarrow K = \text{Sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \ldots(\text{I})$$

De la expresión: $\text{arc Cotg}\left(-\frac{3}{4}\right) = \alpha \Rightarrow \boxed{-\frac{3}{4} = \text{Cotg } \alpha}$ $(\alpha \in \text{al } Q_2 \text{ ó } Q_4)$

- Ubicamos "α" en el Q_2.



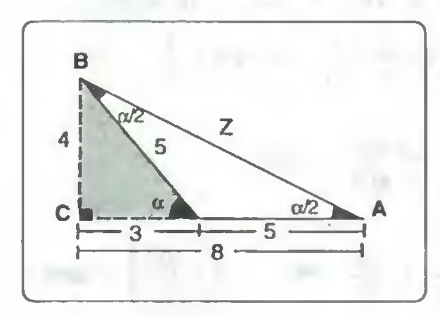
Calculamos "x" por el Teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 4^2 + (-3)^2$$

$$\therefore \quad \boxed{x = 5}$$

Siendo: $\boxed{\text{Sen } \alpha = \frac{4}{5}}$

El valor de "Sen α" lo graficamos en el siguiente triángulo.



Por el Teorema de Pitágoras:

$$Z^2 = 4^2 + 8^2$$

$$Z^2 = 80 \Rightarrow \therefore \boxed{Z = 4\sqrt{5}}$$

Siendo: $\underbrace{\text{Sen } \frac{\alpha}{2}} = \frac{4}{Z} = \frac{4}{4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

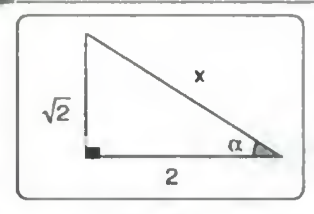
$$\therefore \quad \boxed{K = \frac{\sqrt{5}}{5}}$$ ***Rpta. A***

Ejercicio 10 : Calcular: $E = \text{tg}\left\{2 \text{ arc Sen}\left[\frac{1}{2}\text{ Cos}\left(\text{arc tg } \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]\right\}$

A) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

Resolución:

Llamamos a: $\text{arc tg } \frac{\sqrt{2}}{2} = \alpha \Rightarrow \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} = \text{tg } \alpha}$ (Graficamos en un ◺)



Por el Teorema de Pitágoras:

$$x^2 = \sqrt{2}^2 + 2^2 \Rightarrow \therefore \boxed{x = \sqrt{6}}$$

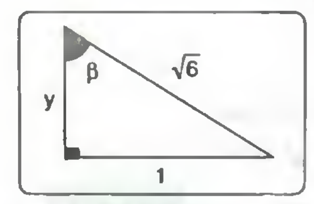
Siendo: $\text{Cos } \alpha = \frac{2}{x} = \frac{2}{\sqrt{6}}$ ...(I)

Reemplazamos (I) en la expresión "E":

$$E = \text{tg}\left\{2 \text{ arc Sen}\left[\frac{1}{2}\text{ Cos}\underbrace{\left(\text{arc tg } \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{\alpha}\right]\right\}$$

$$E = \text{tg}\left\{2 \text{ arc Sen}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right]\right\} = \text{tg}\left\{2 \underbrace{\text{arc Sen}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)}_{\beta}\right\} \text{ ...(II)}$$

Hacemos que: $\text{arc Sen}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \beta \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{6}} = \text{Sen } \beta}$ (Graficamos en un ◺)



Por el Teorema de Pitágoras:

$$y^2 = \sqrt{6}^2 - 1^2 \Rightarrow \therefore \boxed{y = \sqrt{5}}$$

Siendo: $\text{tg } \beta = \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \text{tg } \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ...(III)

De la expresión (II), obtenemos: $E = \text{tg }\{2\beta\} = \frac{2\text{tg}\beta}{1-\text{tg}^2\beta}$ ...(IV)

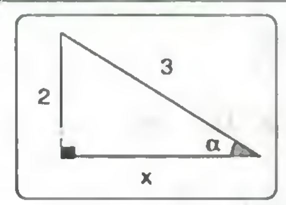
Reemplazamos (III) en (IV): $E = \frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{4}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \therefore \boxed{E = \frac{\sqrt{5}}{2}}$ ***Rpta. D***

Ejercicio 11: Calcular: $R = \text{Cos}\left[3 \text{ arc Sen}\left(\frac{2}{3}\right)\right]$

A) $\pm\frac{7\sqrt{5}}{27}$ B) $-\frac{7\sqrt{5}}{27}$ C) $\frac{7\sqrt{5}}{27}$ D) $\pm\frac{5\sqrt{5}}{27}$ E) $\frac{5\sqrt{5}}{27}$

Resolución:

Hacemos que: $\text{arc Sen}\left(\frac{2}{3}\right) = \alpha \Rightarrow \boxed{\frac{2}{3} = \text{Sen } \alpha}$ (Graficamos en un ◺)



Por el Teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 3^2 - 2^2 \Rightarrow \therefore \boxed{x = \sqrt{5}}$$

$$\text{Siendo: } \cos\alpha = \frac{x}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}} \quad \ldots(I)$$

De la expresión:
$$R = \cos\left[3\underbrace{\text{arc Sen}\left(\frac{2}{3}\right)}_{\alpha}\right]$$

$R = \cos 3\alpha$; por fórmula de arco triple, obtenemos:

$$\boxed{R = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha} \quad \ldots(II)$$

Reemplazamos (I) en (II):

$$R = 4\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

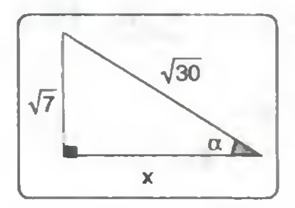
$$R = \frac{\sqrt{5}}{3}\left[4\times\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - 3\right] = \frac{\sqrt{5}}{3}\left[\frac{20}{9} - 3\right] \Rightarrow \therefore \boxed{R = -\frac{7\sqrt{5}}{27}}$$ ***Rpta. B***

Ejercicio 12: Calcular: $R = \text{Cotg}\left\{\frac{1}{2}\text{arc tg}\left[\cos\left(2\text{ arc Sen}\sqrt{\frac{7}{30}}\right)\right]\right\}$

A) 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 10

Resolución:

Hacemos que: $\text{arc Sen}\sqrt{\frac{7}{30}} = \alpha \Rightarrow \sqrt{\frac{7}{30}} = \text{Sen }\alpha \Rightarrow \therefore \boxed{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{30}} = \text{Sen }\alpha}$ (Graficamos en un ◺)



Por el Teorema de Pitágoras:

$$x^2 = \sqrt{30}^2 - \sqrt{7}^2 \Rightarrow \therefore \boxed{x = \sqrt{23}}$$

$$\text{Siendo: } \cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{30}} \Rightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{30}}} \quad \ldots(II)$$

De la expresión "E" obtenemos:
$$R = \text{Cotg}\left\{\frac{1}{2}\text{arc tg}\left[\cos\left(2\underbrace{\text{arc Sen}\sqrt{\frac{7}{30}}}_{\alpha}\right)\right]\right\}$$

$$R = \text{Cotg}\left\{\frac{1}{2}\ \text{arc tg}\ \underbrace{[\text{Cos } 2\alpha]}\right\}$$

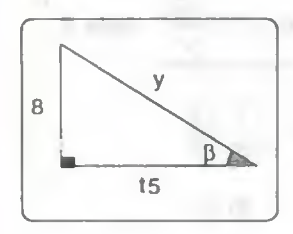
$$R = \text{Cotg}\left\{\frac{1}{2}\ \text{arc tg}\left(2\ \text{Cos}^2\alpha - 1\right)\right\} \quad \ldots\text{(III)}$$

Reemplazamos (II) en (III): $R = \text{Cotg}\left\{\frac{1}{2}\ \text{arc tg}\left[2\times\left(\frac{\sqrt{23}}{\sqrt{30}}\right)^2 - 1\right]\right\}$

$$R = \text{Cotg}\left\{\frac{1}{2}\ \underbrace{\text{arc tg}\left(\frac{8}{15}\right)}_{\beta}\right\} \quad \ldots\text{(IV)}$$

Hacemos que: $\text{arc tg}\left(\frac{8}{15}\right) = \beta \Rightarrow \boxed{\frac{8}{15} = \text{tg } \beta}$ (Graficamos en un ◺).

Por el Teorema de Pitágoras: $y^2 = 8^2 + 15^2 \Rightarrow \therefore \boxed{y = 17}$



Siendo: $\text{Cos}\beta = \frac{15}{y} \Rightarrow \boxed{\text{Cos } \beta = \frac{15}{17}} \quad \ldots\text{(V)}$

De la expresión (IV), obtenemos:

$$R = \text{Cotg}\left\{\frac{1}{2}\ \underbrace{\text{arc tg}\left(\frac{8}{15}\right)}_{\beta}\right\} = \text{Cotg}\left\{\frac{1}{2}\ \beta\right\}$$

$$R = \text{Cotg}\ \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1+\text{Cos } \beta}{1-\text{Cos } \beta}} \quad \ldots\text{(VI)}$$

Reemplazamos (V) en (V): $R = \sqrt{\frac{1+\frac{15}{17}}{1-\frac{15}{17}}} = \sqrt{\frac{32}{2}} = 4 \Rightarrow \therefore \boxed{R = 4}$ ***Rpta. B***

Ejercicio 13 : Si: $x = \text{arc tg } 3 + \text{arc tg } 2 + \text{arc tg } 1$. Calcular: "tg x"

A) 0 **B)** 1 **C)** -1 **D)** 2 **E)** $-\sqrt{3}/3$

Resolución:

Hacemos que:

i) $\text{arc tg } 3 = \alpha \rightarrow \boxed{3 = \text{tg } \alpha}$

ii) $\text{arc tg } 2 = \beta \rightarrow \boxed{2 = \text{tg } \beta}$

iii) $\text{arc tg } 1 = \theta \rightarrow \boxed{1 = \text{tg } \theta}$

De la expresión: $x = \text{arc tg } 3 + \text{arc tg } 2 + \text{arc tg } 1$; obtenemos: $x = \alpha + \beta + \theta$

Donde: $x - \alpha = \beta + \theta$; tomamos "tg" a ambos miembros $\text{tg}(x - \alpha) = \text{tg}(\beta + \theta)$

$$\frac{\text{tg}x - \text{tg}\alpha}{1 + \text{tg}x \cdot \text{tg}\alpha} = \frac{\text{tg}\beta + \text{tg}\theta}{1 - \text{tg}\beta \cdot \text{tg}\theta}$$; reemplazamos valores, obtenemos:

$$\frac{\text{tg}x - 3}{1 + 3\text{tg}x} = \frac{2+1}{1 - 2 \cdot 1}$$

$$\frac{\text{tg}x - 3}{1 + 3\text{tg}x} = \frac{3}{-1} \Rightarrow 3 - \text{tg}x = 3 + 9\text{tg } x$$

$$0 = 10\text{tg}x \Rightarrow \therefore \boxed{\text{tg } x = 0}$$ ***Rpta. A***

Ejercicio 14 : Sabiendo que: $\alpha = \text{arc Cotg}\left[2 \text{ Sen}\left(\text{arc Cos } \frac{1}{2}\right)\right]$

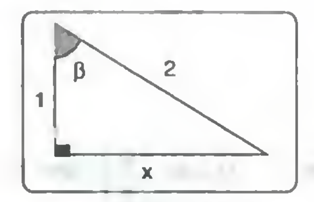
Calcular: $V = \frac{\text{Sen } 2\alpha}{2 \text{ Sen } \alpha} + \frac{2 \text{ Cos}\alpha}{\text{Cos } 2\alpha}$

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

Resolución:

En la expresión: $\alpha = \text{arc Cotg}\left[2 \text{ Sen}\underbrace{\left(\text{arc Cos } \frac{1}{2}\right)}_{\beta}\right]$ ...(I)

Hacemos: $\text{arc Cos } \frac{1}{2} = \beta \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} = \text{Cos } \beta}$ (Graficamos en un ⊿).



Por el Teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 2^2 - 1^1 \Rightarrow \therefore \boxed{x = \sqrt{3}}$$

Siendo: $\text{Sen } \beta = \frac{x}{2} \Rightarrow \boxed{\text{Sen}\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}}$ ...(II)

Reemplazamos (II) en (I): $\alpha = \text{arc Cotg}\left[\cancel{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right)\right]$

$$\alpha = \text{arc Cotg } \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3} = \text{Cotg } \alpha$$

$$\text{Cotg } 30° = \text{Cotg } \alpha \Rightarrow \therefore \boxed{\alpha = 30°}$$

Reemplazamos el valor de "α" en la expresión "V"

$$V = \frac{\text{Sen } 60°}{2\text{Sen } 30°} + \frac{2\text{Cos } 30°}{\text{Cos } 60°}$$

$$V = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} \Rightarrow \therefore \; V = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$ ***Rpta. E***

Ejercicio 15: Calcular: $M = \text{arc tg } \frac{1}{3} + \text{arc tg } \frac{1}{5} + \text{arc tg } \frac{1}{7} + \text{arc tg } \frac{1}{8}$

A) $\frac{5\pi}{8}$ B) $\frac{3\pi}{8}$ C) $\frac{\pi}{6}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{3}$

Resolución:

Aplicando la fórmula: $\text{arc tg } x \pm \text{arc tg } y = \text{arc tg } \frac{x \pm y}{1 \mp xy}$; obtenemos:

$$M = \underbrace{\text{arc tg } \frac{1}{3} + \text{arc tg } \frac{1}{5}} + \underbrace{\text{arc tg } \frac{1}{7} + \text{arc tg } \frac{1}{8}}$$

$$M = \text{arc tg}\left(\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{5}}\right) + \text{arc tg}\left(\frac{\frac{1}{7} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{7} \times \frac{1}{8}}\right)$$

$$M = \underbrace{\text{arc tg}\left(\frac{4}{7}\right) + \text{arc tg}\left(\frac{3}{11}\right)}$$; nuevamente aplicamos la fórmula anterior

$$M = \text{arc tg}\left(\frac{\frac{4}{7} + \frac{3}{11}}{1 - \frac{4}{7} \times \frac{3}{11}}\right) = \text{arc tg } (1)$$

$$M = \text{arc tg } (1) \Rightarrow 1 = \text{tg } M \Rightarrow \text{tg } 45° = \text{tg } M \Rightarrow \therefore \; M = 45° = \frac{\pi}{4}$$ ***Rpta. D***

TALLER DE EJERCICIOS Nº 32

Ejercicio 1 : Calcular:

$M = \text{Sec}\,(\text{arc tg } 2\sqrt{5})\ \text{cosec}\,(\text{arc cotg } 5\sqrt{2})$

Resolución:

Rpta. $M = 3\sqrt{119}$

Ejercicio 2 : ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

A) $\text{arc tg}\,(3/4) = 53°$

B) $\text{arc cos}\left(\sqrt{3}/2\right) = \text{arc tg}\left(\sqrt{3}\right)$

C) $\text{arc sen}\,(4/5) - \text{arc tg}\,(4/3) = 0$

D) $\text{arc cos}\left(\sqrt{8}/3\right) = \text{arc sen}\left(\sqrt{8}/9\right)$

E) $6\ \text{arc cosec}\,(5/2) = 1/6\ \text{arc sen}\,(2/5)$

Resolución:

Rpta. C

Ejercicio 3 : Cos (2 arc sen 2x) es equivalente a:

Resolución:

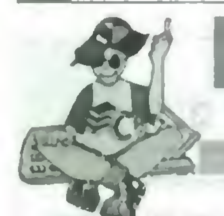
Rpta. $1 - 8x^2$

Ejercicio 4 : Calcular:

$$y = \text{sen}\left\{\text{arc cos}\left[\text{sen}\left(\text{arc tg } \frac{1}{4}\right)\right]\right\}$$

Resolución:

Rpta. $y = 4/\sqrt{17}$



PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

NIVEL I

Ejercicio 1: Cuál o cuáles son correctas:

I. $\text{arc tg}(1) = 45°$

II. $\text{arc sen}\left(\sqrt{2}\right) = 45°$

III. $\text{arc sec}(2) = 60°$

IV. $\text{arc cosec}\left(2/\sqrt{3}\right) = 30°$

A) I, II y III B) I, III y IV C) II y IV
D) I y III E) Todas

Ejercicio 2: Reducir:

$$R = \frac{\frac{1}{4}\text{arc sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \text{arc tg}(1)}{\frac{1}{2}\text{arc sen}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{arc cos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

A) 1 B) 1/4 C) 1/8 D) -1 E) -1/4

Ejercicio 3: Calcular:

$$A = \text{arc cosec}\left(\frac{\sqrt{13}}{3}\right) - \text{arc cotg}(5)$$

A) 60° B) 30° C) 45° D) 37° E) 53°

Ejercicio 4: El valor de:

$E = \text{arc tg } x + \text{arc cotg } x$; es:

A) 0° B) 45° C) 90° D) 180° E) 360°

Ejercicio 5: ¿A qué es igual?

$$K = 2\,\text{arc tg}\left[2\,\text{sen}\left(2\,\text{arc tg}\sqrt{3}/3\right)\right]$$

A) 15° B) 30° C) 45° D) 60° E) 120°

Ejercicio 6: Hallar el valor de:

$$M = \frac{2\,\text{tg}^2\left(\text{arc sen}\sqrt{2}/2\right) - 3\,\text{sen}^2\left(\text{arc tg}\sqrt{3}/3\right)}{4\cos^2(\text{arc sec } 2)}$$

A) 5/4 B) 5/2 C) 1/6 D) 5/6 E) 3/2

Ejercicio 7: Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

I. $\text{arc cotg}x = \text{arc cosec}\sqrt{1-x^2}$

II. $\sec(\text{arc sen } 0{,}6) = 1{,}20$

III. $\text{arc cosec}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\text{cotg } 45°\right) = \text{arc tg}\sqrt{3}$

A) I y II B) II y III C) III D) I E) II

Ejercicio 8: Marque lo incorrecto:

A) $\text{sen}(\text{arc sen}1/2) = 1/2$

B) $\cos(\text{arc tg}\sqrt{3}) = 1/2$

C) $\text{cotg}(\text{arc tg } 1/\sqrt{3}) = \sqrt{3}/3$

D) $\text{arc ctg}(1) + \text{arc tg}(\sqrt{3}) = \frac{7\pi}{12}$

E) $\text{arc tg}(3) - \text{arc tg}(2) = 8°$

Ejercicio 9: Si:

$$A = \text{sen}\left[\text{arc tg}\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)\right] \text{ y}$$

$$B = \cos\left[\text{arc tg}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\right]$$

Siendo: a > b; se puede afirmar que:

A) A . B = 1 B) A + B = 0 C) A = B
D) A - B = 1 E) A + B = 2

Ejercicio 10 : Calcular:

$$R=\text{cotg}\left\{3\ \text{arc tg}\left[2+\text{tg}\left(2\ \text{arc tg}\ \sqrt{3}\right)\right]\right\}$$

A) -1 B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\sqrt{3}$ E) 1

Clave de Respuestas

1. D	2. A	3. C	4. C	5. E
6. A	7. C	8. C	9. C	10. E

NIVEL II

Ejercicio 1 : Calcular:

$$W=\text{arc cotg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\text{arc cotg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$$

A) $\pi/6$ B) $\pi/3$ C) $5\pi/6$ D) $\frac{2\pi}{3}$ E) π

Ejercicio 2 : A qué es igual:

$$B=\text{arc tg}\ \frac{2}{\sqrt{3}}+\text{arc tg}\ \frac{\sqrt{3}}{9}$$

A) $\pi/3$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\pi/6$ D) $\frac{5\pi}{6}$ E) $\frac{3\pi}{4}$

Ejercicio 3 : Calcular:

$$F=\text{sen}\left\{2\ \text{arc cos}\left[\text{tg}\left(\text{arc sec}\ \frac{17}{15}\right)\right]\right\}$$

A) $\frac{\sqrt{161}}{225}$ B) $\frac{4\sqrt{161}}{225}$ C) $\frac{16\sqrt{161}}{225}$

D) $\frac{4}{225}$ E) $\frac{16}{225}$

Ejercicio 4 : Reducir:

$$\alpha=\text{arc sen}\ \frac{\sqrt{3}}{3}+\text{arc sen}\ \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$$

A) $\pi/3$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\pi/6$ D) $\frac{5\pi}{6}$ E) $\frac{3\pi}{4}$

Ejercicio 5 : Sabiendo que:

$$n=\text{sen}\,20°\ \text{sen}\,40°\ \text{sec}\,50°\ \text{sec}\,70°\ \text{sec}\,60°$$

Calcular:

$$W=\text{arc tg}\left(\sqrt{n^2-1}\right)+\text{arc sen}\left(\frac{\sqrt{n-1}}{n}\right)$$

A) $\pi/3$ B) $\pi/4$ C) $\pi/6°$ D) $\pi/2$ E) $\pi/12$

Ejercicio 6 : Calcular:

$$L=\text{sen}\left\{2\ \text{arc tg}\left[\cos\left(2\ \text{arc tg}\ \sqrt{5}\right)\right]\right\}$$

A) -4/9 B) -12/13 C) 4/13 D) 3/4 E) -9/13

Ejercicio 7 : Calcular:

$$R=\text{cotg}\left\{3\ \text{arc tg}\left[2+\text{tg}\left(2\ \text{arc tg}\ \sqrt{3}\right)\right]\right\}$$

A) 1 B) $\sqrt{3}/3$ C) $\sqrt{3}/2$ D) $\sqrt{3}$ E) 1/2

Ejercicio 8 : Si: $f(x)=\text{arc tg}\,(x/3)$; Calcular:

$$Q=f\left(\sqrt{3}\right)+f(3)+f\left(3\sqrt{3}\right)$$

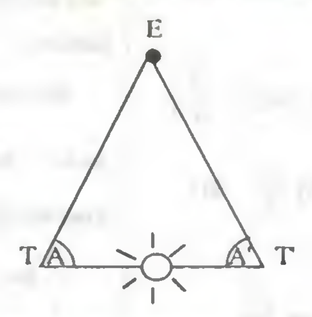
A) $\frac{89\ \pi}{180}$ B) $\frac{3\pi}{4}$ C) $\frac{2\pi}{3}$ D) $\frac{95\pi}{180}$ E) $\frac{97\pi}{180}$

Clave de Respuestas

1. C	2. A	3. C	4. A
5. D	6. B	7. A	8. B

LA TRIGONOMETRÍA Y LA ASTRONOMÍA

¿Cómo puede medirse la distancia a la que se encuentra una estrella?

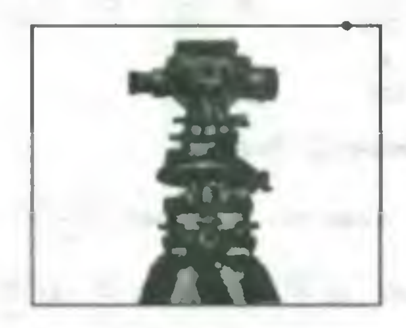


Un método clásico para la determinación de grandes distancias consiste en fotografiar la estrella cuando la Tierra está en un punto cualquiera T de su órbita y se determina el ángulo A con un instrumento adecuado (teodolito). Se esperan seis meses hasta que la Tierra llega al punto T' y se determina el ángulo A'. La distancia TT' es el diámetro de la órbita terrestre y es conocido (300 millones de kilómetros).

Para poder calcular la distancia ET necesitamos aprender un poco más de trigonometría.

El teodolito es un instrumento que utilizan los agrimensores para medir los ángulos sobre un terreno.

Está compuesto de un círculo horizontal y un semicírculo vertical, ambos graduados y con anteojos, para medir ángulos en sus planos respectivos.



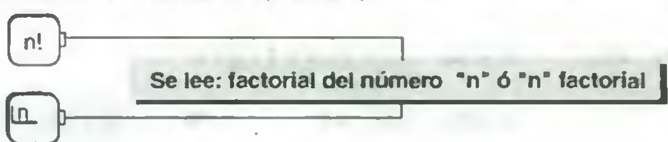
POTENCIACIÓN

12.1 ANÁLISIS COMBINATORIO - BINOMIO DE NEWTON

12.1.1 FACTORIAL DE UN NÚMERO:

Se denomina factorial de un número entero y positivo al producto indicado desde la unidad en forma consecutiva, hasta el número dado. Al factorial de un número se puede representar por cualquiera de los dos símbolos: ! ó $\underline{\lfloor\ }$

Si el número es "n", su factorial se representa por:



Por definición:

$$n! = \underline{\lfloor n} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times n$$

$$n! = \underline{\lfloor n} = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots 2 \times 1$$

Ejemplos:

$2! = \underline{\lfloor 2} = 1 \times 2 = 2$

$3! = \underline{\lfloor 3} = 1 \times 2 \times 3 = 6$

$4! = \underline{\lfloor 4} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

$5! = \underline{\lfloor 5} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

$6! = \underline{\lfloor 6} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$

$7! = \underline{\lfloor 7} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5\,040$

Observaciones

1. **Los factoriales sólo están definidos para cantidades enteras y positivas así:**

$5! = \lfloor\!\underline{5}$	; factorial de 5 →	**(Sí existe)**
$(-3)! = \lfloor\!\underline{3}$	; factorial de (-3) →	**(No existe)**
$-4! = -\lfloor\!\underline{4}$	; - factorial de 4 →	**(Sí existe)**
$\dfrac{6!}{2} = \dfrac{\lfloor\!\underline{6}}{2}$	; un medio de factorial de 6 →	**(Sí existe)**
$\left(\dfrac{1}{3}\right)! = \lfloor\!\underline{\dfrac{1}{3}}$	; factorial de $\dfrac{1}{3}$ →	**(No existe)**
$(\sqrt{2})! = \lfloor\!\underline{\sqrt{2}}$	; factorial de $\sqrt{2}$ →	**(No existe)**

2. **El factorial de un número puede expresarse en función del factorial de otro número menor.**

Ejemplo: Sea:

$$6! = \lfloor\!\underline{6} = \underbrace{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} \times 6$$

$$6! = \lfloor\!\underline{6} = \lfloor\!\underline{5} \times 6 \quad \Rightarrow \quad 6! = \lfloor\!\underline{6} = 6\lfloor\!\underline{5}$$

También:

$$6! = \lfloor\!\underline{6} = \underbrace{1 \times 2 \times 3 \times 4} \times 5 \times 6$$

$$6! = \lfloor\!\underline{6} = \lfloor\!\underline{4} \times 5 \times 6 \quad \Rightarrow \quad 6! = \lfloor\!\underline{6} = 5 \times 6 \times \lfloor\!\underline{4}$$

O también:

$$6! = \lfloor\!\underline{6} = \underbrace{1 \times 2 \times 3} \times 4 \times 5 \times 6$$

$$6! = \lfloor\!\underline{6} = \lfloor\!\underline{3} \times 4 \times 5 \times 6 \quad \Rightarrow \quad 6! = \lfloor\!\underline{6} = 4 \times 5 \times 6 \times \lfloor\!\underline{3}$$

Nótese que en los tres casos, todos ellos son iguales a **6!** y a su vez el número contenido en el factorial y los que están fuera de él son sus consecutivos posteriores a él.

Ejemplo: Escribir 12! en función del factorial de 9

Resolución:

$$12! = 9! \times 10 \times 11 \times 12$$

Ejemplo: Escribir 20! en función del factorial de 16

Resolución:

$$20! = 16! \times 17 \times 18 \times 19 \times 20$$

Ejemplo: Escribir (x + 5)! en función del factorial de (x + 2)

Resolución:

$$(x + 5)! = (x + 2)!\,(x + 3)\,(x + 4)\,(x + 5)$$

Ejemplo: Escribir (x - 2)! en función del factorial de (x - 4)

Resolución:

$$(x - 2)! = (x - 4)!\,(x - 3)(x - 2)$$

3. **Por convención:** $\underline{|0} = 0! = 1$; y Por definición: $\underline{|1} = 1! = 1$

Lo que implica que no podrá hacerse: $\underline{|0} = \underline{|1} \rightarrow 0 = 1$ porque los dos conceptos tienen diferente punto de partida en cuanto a su definición.

* Demostrar que: 0! = 1

Demostración:

Se sabe que: $n! = (n - 1)!\,n$ y que esta igualdad cumple para todo número entero positivo a partir de la unidad.

Acomodando la expresión, obtenemos: $\dfrac{n!}{n} = (n - 1)!$

Reemplazando para:

$$\boxed{n = 1} \Rightarrow \frac{1!}{1} = (1 - 1)! \Rightarrow \therefore \boxed{1 = 0!}$$ ***L.q.q.d.***

** Demostrar que: $1! = 1$

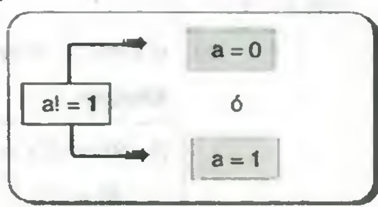
Demostración:

Se sabe que: $n! = (n - 1)!\,n$

Es decir: $\dfrac{n!}{n} = (n - 1)!$; Damos a "n" valor de 2, obteninendo:

$$\frac{2!}{2} = (2 - 1)! \Rightarrow \frac{2}{2} = 1! \Rightarrow \therefore \boxed{1 = 1!}$$ ***L.q.q.d.***

4. **De lo anterior, si:**



Ejemplo: Dar la suma de los posibles valores de "x" en: (x - 3)! = 1

Resolución:

$$(x-3)! = 1 \begin{cases} x-3=0 \rightarrow \boxed{x=3} \\ \text{ó} \\ x-3=1 \rightarrow \boxed{x=4} \end{cases}$$

$\therefore$ La suma de los posibles valores de "x" será: $3+4=7$

5. **Sí:** $\lfloor\underline{a} = \lfloor\underline{b} \rightarrow a=b$ $\quad$ $\forall$ $a, b \in N$ ($\forall$ = para todo)

Ejemplo: Determine el valor de "x" sí: $\lfloor\underline{x-1} = 24$

Resolución:

Tal como se presenta la igualdad, no es posible el despeje directo de "x", para ello es recomendable desdoblar el 24 en factores que sean de forma consecutiva veamos:

$$\lfloor\underline{x-1} = \underbrace{1 \times 2 \times 3 \times 4}$$

$$\lfloor\underline{x-1} = \lfloor\underline{4}$$

Donde; por comparación de miembros, obtenemos: $\quad x-1=4 \rightarrow x=4+1$

$$\therefore \boxed{x=5}$$

Recomendaciones: *En factoriales las siguientes operaciones no se cumplen :*

I) $(n+m)! \neq n! + m!$ $\quad$ **($\neq$ significa diferente)**

Ejemplo:

$(3+2)! \neq 3! + 2!$

$5! \neq 6 + 2$

$120 \neq 8$

II)$(n-m)! \neq n! - m!$

Ejemplo:

$(4-2)! \neq 4! - 2!$

$2! \neq 24 - 2$

$2 \neq 22$

III) $(n \times m)! \neq n! \times m!$

Ejemplo:

$(3 \times 2)! \neq 3! \times 2!$

$6! \neq 6 \times 2$

$720 \neq 12$

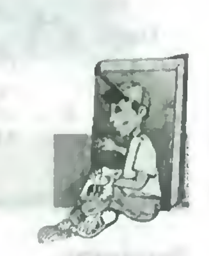
IV) $\left(\frac{n}{m}\right)! \neq \frac{n!}{m!}$

Ejemplo:

$$\left(\frac{6}{3}\right)! \neq \frac{6!}{3!}$$

$$(2)! \neq \frac{720}{6}$$

$$2 \neq 120$$



EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE FACTORIAL DE UN NÚMERO

Ejercicio 1: Determinar el valor de M; sabiendo que: $M = \frac{13!}{9! \times 4!}$

Resolución:

- En primer lugar, escribimos 13! en función del factorial de 9

$$13! = 9! \times 10 \times 11 \times 12 \times 13$$

- En segundo lugar, reemplazamos el valor hallado en "M"

$$M = \frac{\cancel{9!} \times 10 \times 11 \times 12 \times 13}{\cancel{9!} \times 4!} \;;$$

Pero : $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

$$M = \frac{10 \times 11 \times \cancel{12} \times 13}{\cancel{24}} = \frac{\cancel{10} \times 11 \times 13}{\cancel{2}}$$

$$M = 5 \times 11 \times 13 \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad \boxed{M = 715} \quad \textit{Rpta.}$$

Ejercicio 2: Determinar el valor de S; sabiendo que: $S = \frac{6! \times 4!}{8!}$

Resolución:

- En primer lugar escribimos 10! en función 6!

$$8! = 6! \times 7 \times 8$$

- En segundo lugar, reemplazamos el valor hallado en "S".

$$S = \frac{\cancel{6!} \times 4!}{\cancel{6!} \times 7 \times 8} \;; \text{ pero : } 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

$$S = \frac{\cancel{24}}{7 \times \cancel{8}} = \frac{3}{7} \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad \boxed{S = \frac{3}{7}} \quad \textit{Rpta.}$$

Ejercicio 3: Determinar el valor de "E"; sabiendo que: $E = \frac{10! \times 5!}{12! \times 3!}$

Resolución:

- Escribimos el factorial de 12 en función de 10!

$$12! = 10! \times 11 \times 12$$

Luego: $E = \frac{10! \times 5!}{(10! \times 11 \times 12) \times 3!}$; escribimos 5!; en función 3!

$$E = \frac{3! \times 4 \times 5}{11 \times 12 \times 3!} = \frac{5}{11 \times 3} = \frac{5}{33} \Rightarrow \therefore \boxed{E = \frac{5}{33}}$$ *Rpta.*

Ejercicio 4: Simplificar: $R = \frac{n!}{(n-2)!} + n\,(2-n)$

Resolución:

- Escribimos n! en función de (n - 2)!

$$n! = (n-2)! \times (n-1)\,n$$

Luego: $R = \frac{(n-2)! \times (n-1)\,n}{(n-2)!} + n\,(2-n)$

$$R = n^2 - n + 2n - n^2 \Rightarrow \therefore \boxed{R = n}$$ *Rpta.*

Ejercicio 5: Calcular el valor de: $P = \left(\frac{8! \times 7!}{(7!)^2 - (6!)^2} - \frac{25}{6}\right)!$

Resolución:

- Sabemos que: $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ (Diferencia de cuadrados).

Luego: $P = \left(\frac{8! \times 7!}{(7! + 6!)(7! - 6!)} - \frac{25}{6}\right)!$

$$P = \left(\frac{8! \times 7!}{(6! \times 7 + 6!)(6! \times 7 - 6!)} - \frac{25}{6}\right)!$$

$$P = \left(\frac{8! \times 7!}{6!\,(7+1)\;6!\,(7-1)} - \frac{25}{6}\right)!$$; pero : $8! = 6! \times 7 \times 8$; $7! = 6! \times 7$

$$P = \left(\frac{(6! \times 7 \times 8) \times (6! \times 7)}{(6!\,8)\,(6!\,6)} - \frac{25}{6}\right)!$$

$$P = \left(\frac{49}{6} - \frac{25}{6}\right)! = 4! \Rightarrow \therefore \boxed{P = 24}$$ *Rpta.*

Ejercicio 6: Hallar el equivalente de: $E = \dfrac{n!}{(n+1)!} - \dfrac{1}{(n+1)} + \dfrac{(n+1)!}{n!}$

Resolución:

- Escribimos: (n + 1)! en función de: n! , veamos: $(n+1)! = n!\,(n+1)$

Luego: $E = \dfrac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}(n+1)} - \dfrac{1}{(n+1)} + \dfrac{\cancel{n!}(n+1)}{\cancel{n!}}$

$$E = \cancel{\dfrac{1}{(n+1)}} - \cancel{\dfrac{1}{(n+1)}} + (n+1) \Rightarrow \therefore \quad \boxed{E = (n+1)}$$ ***Rpta.***

Ejercicio 7: Reducir: $P = \dfrac{n\,[n! + (n-1)!]}{(n+1)!}$

Resolución:

- Escribimos : n! en función de (n - 1)! , veamos: $n! = (n-1)!\,n$

Luego: $P = \dfrac{n\,[\overline{(n-1)!}\,n + \overline{(n-1)!}]}{(n+1)!} = \dfrac{n\,[\overline{(n-1)!}\,(n+1)]}{(n+1)!}$

Ordenando los factores del numerador, obtenemos:

$$P = \dfrac{(n-1)!\,n\,(n+1)}{(n+1)!} = \dfrac{\cancel{(n+1)!}}{\cancel{(n+1)!}} = 1 \Rightarrow \therefore \quad \boxed{P = 1}$$ ***Rpta.***

Ejercicio 8: Hallar el equivalente de: $Q = (n+2)! - (n+1)!$

Resolución:

Escribimos (n + 2)! en función de (n + 1)! , veamos:

$Q = \overline{(n+1)!}\,(n+2) - \overline{(n+1)!}$, Factorizando: (n + 1)!

$Q = \overline{(n+1)!}\,[(n+2) - 1] \Rightarrow \therefore \quad \boxed{Q = (n+1)! \times (n+1)}$ ***Rpta.***

Ejercicio 9: Resolver la ecuación: $\dfrac{(x-2)!\,(x+1)!}{(x-1)!\,x!} = 3$

Resolución:

Escribimos (x + 1)!. En función de x! , veamos: $\dfrac{(x-2)!\,[\cancel{x!}\,(x+1)]}{(x-1)!\,\cancel{x!}} = 3$

- También escribimos: (x - 1)! en función de (x - 2)!, Obteniendo:

$$\dfrac{\cancel{(x-2)!}\,[(x+1)]}{\cancel{(x-2)!}\,(x-1)} = 3$$

Donde: $(x + 1) = 3(x - 1)$

$x + 1 = 3x - 3$

$1 + 3 = 3x - x$ ➡ $4 = 2x$ ➡ $\therefore$ $\boxed{x = 2}$ *Rpta.*

Ejercicio 10 : Resolver la ecuación: $\dfrac{(3x + 1)!}{(3x - 1)!} = 42$

Resolución:

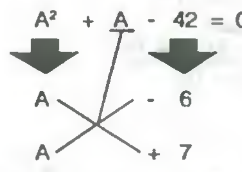
La expresión del primer miembro, se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{\cancel{(3x-1)!}\,(3x)\,(3x+1)}{\cancel{(3x-1)!}} = 42$$

Donde: $3x(3x + 1) = 42$; hacemos que: $3x = A$

$A(A + 1) = 42$ → $A^2 + A = 42$

$A^2 + A - 42 = 0$ **;Factorizamos por el método del Aspa**



Luego: $\boxed{(A - 6)(A + 7) = 0}$ ➡ Igualamos cada factor a cero:

I) $A - 6 = 0$ → $A = 6$; ➡ Pero inicialmente; $A = 3x$

$3x = 6$ ➡ $\boxed{x = 2}$

II) $A + 7 = 0$ → $A = -7$ ➡ Pero: $A = 3x$

$3x = -7$ ➡ $\boxed{x = -\dfrac{7}{3}}$

$\therefore$ La ecuación, sólo cumple cuando $x = 2$; y no cuando $x = -\dfrac{7}{3}$ ya que al remplazar dicho valor en la ecuación resultaria el factorial de un número negativo y esto no existe.

Ejercicio 11 : Resolver la ecuación: $\dfrac{(x - 3)! + (x - 2)!}{(x - 1)} = 120$

Resolución:

Escribimos $(x - 2)!$ en función de: $(x - 3)!$, obteniendo:

$$\frac{(x-3)!+(x-3)!\,(x-2)}{(x-1)}=120 \qquad ; \quad \text{Factorizamos } (x-3)!$$

$$\frac{(x-3)!\,[1+(x-2)]}{(x-1)}=120$$

$$\frac{(x-3)!\,\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}}=120 \qquad \text{Pero: } 120 = 1\times2\times3\times4\times5=5!$$

Donde: $(x-3)! = 5!$ $\Rightarrow$ por comparación de miembros:

$x - 3 = 5$ ➡ $\therefore$ $x = 8$ ***Rpta.***

Ejercicio 12: Simplificar: $R=\dfrac{(n!!+1)!-n!!!}{(n!!-1)!}$

Resolución:

Para este tipo de problema es necesario hacer cambio de variable, o sea hacemos que $n!! = a$. Reemplazamos este valor en "R", obteniendo:

$$R=\frac{(a+1)!-a!}{(a-1)!} \quad \rightarrow \quad \text{Esta expresión se puede escribir así:}$$

$$R=\frac{\overline{(a-1)!}\times a\times(a+1)-\overline{(a-1)!}\times a}{(a-1)!}$$

Factorizamos en el númerador (a - 1)!

$$R=\frac{\cancel{(a-1)!}\times[\,a\times(a+1)-a\,]}{\cancel{(a-1)!}}=[a^2+a-a]$$

$R=a^2$ $\rightarrow$ pero: $n!!=a$ ➡ $\therefore$ $R=(n!!)^2$ ***Rpta.***

TALLER DE EJERCICIOS Nº 33

Ejercicio 1 : Evalúa cada proposición siguiente y coloca dentro del paréntesis una **V** o una **F**, según la proposición sea verdadera o falsa.

1. $5! = 3! \times (20)$ .... ( )
2. $7! = 5! + 2!$ .... ( )
3. $\frac{4!}{2!} = \frac{4}{2}$ .... ( )
4. $3! < 10 < (5-1)!$ .... ( )
5. $6! = (10-4)!$ .... ( )
6. $(-3!)^2 = 36$ .... ( )
7. $4! \times 3! = 12!$ .... ( )
8. $3!(2! + 1) = 6! + 3!$ .... ( )

Ejercicio 2 : Determinar el valor que representa cada expresión siguiente:

a). $\frac{12!}{10!}$ b). $\frac{15!}{13! \times 2!}$

c). $\frac{11! \times 6!}{9!}$ d). $\frac{4! \times 7!}{6! \times 5!}$

Rpta. **a)** 132 **b)** 105 **c)** 79 200 **d)** 7/5

Ejercicio 3 : Determinar el valor que representa cada expresión:

a) $\frac{23!}{20! \times 253}$ b) $\frac{8! \times 16!}{6 \times 10! \times 14!}$

Rpta. **a)** 42 **b)** 4/9

Ejercicio 4 : Reducir la siguiente expresión:

$$E = \frac{n! - (n-1)!}{(n-1)!}$$

Resolución:

Rpta. E = n - 1

Ejercicio 5 : Calcular el valor de:

$$R = \left[\frac{5! \times 4!}{(4!)^2 - (3!)^2} - \frac{10}{3}\right]!$$

Resolución:

Rpta. R = 2

Ejercicio 6 :

a) ¿Qué valor tiene "K"?
Si: K! x 7 x 8 x 9 x 10 = 10!

b) ¿Qué valor tiene "n"?
Si: (n - 3)! x 9 x 10 x 11 x 12 = 12!

Resolución:

Rpta. **a)** K = 6 **b)** n = 11

Ejercicio 7 : En la siguiente expresión:

$$(n - 1)! + n! = 0{,}2\,(n + 1)!$$

Resolución:

Rpta. n = 5

Ejercicio 8 : Resolver:

$$\frac{(2x+1)!}{(2x-1)!} = 72$$

Resolución:

Rpta. x = 4

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE FACTORIAL DE UN NÚMERO

NIVEL I

Ejercicio 1: Reducir: $E = (n+2)! - 2(n+1)!$

A) $(n+2)!$ **B)** $(n+3)!$ **C)** $n(n+1)$
D) $n(n+1)!$ **E)** $n!(n+1)$

Ejercicio 2: Reducir: $M = \dfrac{7! - 2 \times 5!}{6! - 10 \times 4!}$

A) 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 10

Ejercicio 3: El valor de: $\dfrac{1}{4! + 3!}$; es:

A) $\dfrac{1}{7!}$ **B)** $\dfrac{4}{5!}$ **C)** $\dfrac{1}{4 \cdot 3!}$ **D)** $\dfrac{1}{5!}$ **E)** N.A.

Ejercicio 4: Efectuar: $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$

A) $\dfrac{n}{n!}$ **B)** $\dfrac{n+1}{n!}$ **C)** $\dfrac{n-1}{(n+1)!}$
D) $\dfrac{n}{(n+1)!}$ **E)** $\dfrac{1}{n(n+1)!}$

Ejercicio 5: Reducir: $R = \dfrac{(n+1)! - n!}{(n-1)!}$

A) n **B)** n^2 **C)** $2n$ **D)** $1/n^2$ **E)** n^3

Ejercicio 6: Calcular el valor de "n":

$$\frac{(n+2)!}{n!} = 6$$

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

Ejercicio 7: Calcular el valor de "n":

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{(n+3)!}{(n+1)!} = 10$$

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

Ejercicio 8: Indicar la solución entera de la ecuación:

$$(x-1)! + x! + (x+1)! = 5\,880$$

A) 5 **B)** 6 **C)** 4 **D)** 3 **E)** 2

Ejercicio 9: Resolver: $\dfrac{(x-1)!\,(x+2)}{x!} = \dfrac{5}{3}$

A) $x = 2$ **B)** $x = 3$ **C)** $x = 4$
D) $x = 5$ **E)** $x = 6$

Ejercicio 10: Simplificar: $E = \dfrac{m!\,(n+1)!}{(m+1)!\,n!}$

A) $\dfrac{n-1}{m+1}$ **B)** $\dfrac{n+1}{m+1}$ **C)** $\dfrac{m+1}{n+1}$ **D)** $\dfrac{m+1}{n-1}$ **E)** $\dfrac{m}{n}$

Ejercicio 11: Simplificar: $R = \dfrac{11! + 10! + 9!}{121 \cdot 8!}$

A) 8 **B)** 9 **C)** 12 **D)** 24 **E)** 36

Ejercicio 12: Resolver:

$$2\left[\frac{(n+1)!}{n!}\right] - \frac{(n+3)!}{(n+2)!} = 6$$

A) $n = 5$ **B)** $n = 6$ **C)** $n = 7$ **D)** $n = 8$ **E)** $n = 9$

Ejercicio 13: Resolver: $\dfrac{(x+6)!}{(x+4)!} - \dfrac{(x+2)!}{x!} = 44$

A) $x = 1$ **B)** $x = 3$ **C)** $x = 4$ **D)** $x = 2$ **E)** $x = 5$

Ejercicio 14: Señale el valor entero positivo de "n" para el cual:

$$(n+1)!\,.\,(n-1)! = 36\,n + (n!)^2$$

A) 13 **B)** 72 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 2

Clave de Respuestas

1. D	2. E	3. B	4. D	5. B
6. A	7. B	8. B	9. B	10. B
11. B	12. C	13. D	14. C	

NIVEL II

Ejercicio 1: Reducir: $R = \dfrac{n!}{(n-2)!} - n^2$

A) n B) 2n C) n^2 D) -n E) n!

Ejercicio 2: Reducir: $M = \dfrac{n\left[(n+1)! - n!\right]}{(n-1)!}$

A) n B) n^2 C) n^3 D) n! E) 2 (n!)

Ejercicio 3: Reducir:

$$P = \frac{(n+2)!}{n!} - n\,(n+3) + \frac{(n-2)!}{(n-3)!}$$

A) n^2 B) n! C) n D) (n + 1)! E) 3n

Ejercicio 4: Resolver: $\dfrac{(x-5)!}{(x-3)!} = \dfrac{2\,(x-4)!}{(x-2)!}$

A) 4 B) 5 C) 3 D) 6 E) 8

Ejercicio 5: Resolver: $\dfrac{(x-2)! + (x-1)!}{x} = 720$

A) 6 B) 8 C) 5 D) 4 E) 3

Ejercicio 6: Calcular el valor de "n":

$$\frac{(n+4)!}{(n+2)!} - \frac{(n+3)!}{(n+2)!} = 25$$

A) 1 B) 3 C) 2 D) 4 E) 5

Ejercicio 7: Al simplificar:

$$\left[\frac{(n+1)! + n!}{(2n+1)! + (2n+2)!}\right]\left[\frac{(2n+3)!}{(n+2)!}\right]$$ Se obtiene:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) n

Ejercicio 8: Resolver:

$$\frac{(n+7)!\,(n+5)!}{(n+6)! + (n+5)!} = 10!$$

A) n = 6 B) n = 9 C) n = 5 D) n = 3 E) n = 4

Ejercicio 9: Simplificar:

$$R = \frac{(a!! + 2)! - 2\,(a!! + 1)!}{(a!! + 1)!}$$

A) a! B) a!! C) a!!!
D) a (a + 1)! E) (a + 1)!

Ejercicio 10: Simplificar:

$$E = (n!! - 1)!\,(n! - 1)!\,(n - 1)!\,n - n!!!$$

A) n! B) (n + 1)! C) 0 D) n!! E) n

Ejercicio 11: Realiza las operaciones siguientes:

$$\frac{(13!)^2}{(12!)^2 + 2\,(12!\;11!) + (11!)^2} - \frac{13!}{10! + 11!}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) -1

Ejercicio 12: Calcular el valor de "x":

$$(119!)^{x!!}\,(5!)^{x!!} = (5!!^{23!})^{24}$$

A) 2 B) 4 C) 3 D) 5 E) 6

Ejercicio 13: El valor de: $\dfrac{5}{5! + 4! + 3!}$; es:

A) $\dfrac{5}{12!}$ B) $\dfrac{6}{5!}$ C) $\dfrac{3}{4!}$ D) $\dfrac{4}{5!}$ E) N.A.

Ejercicio 14: Resolver:

$$\frac{(n+2)!}{n!} = 5 + \frac{(n+12)!}{(11+n)!}$$

Dar como respuesta la suma de los valores de "n".

A) -2 B) -5 C) 3 D) 2 E) -3

Clave de Respuestas

1. D	2. C	3. C	4. D	5. B
6. C	7. B	8. E	9. B	10. C
11. A	12. B	13. D	14. C	

12.2 ANÁLISIS COMBINATORIO

Parte de la matemática que se encarga del estudio de los grupos o conjuntos que se pueden formar con distintos elementos (Objetos, letras, números, etc.) de modo que cada grupo formado se diferencie de otro por el número de elementos. Por las clases de elementos o por el orden de colocación en el análisis combinatorio en las agrupaciones, las estudiaremos en tres casos: Variaciones, Permutaciones y Combinaciones.

12.2.1 PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN:

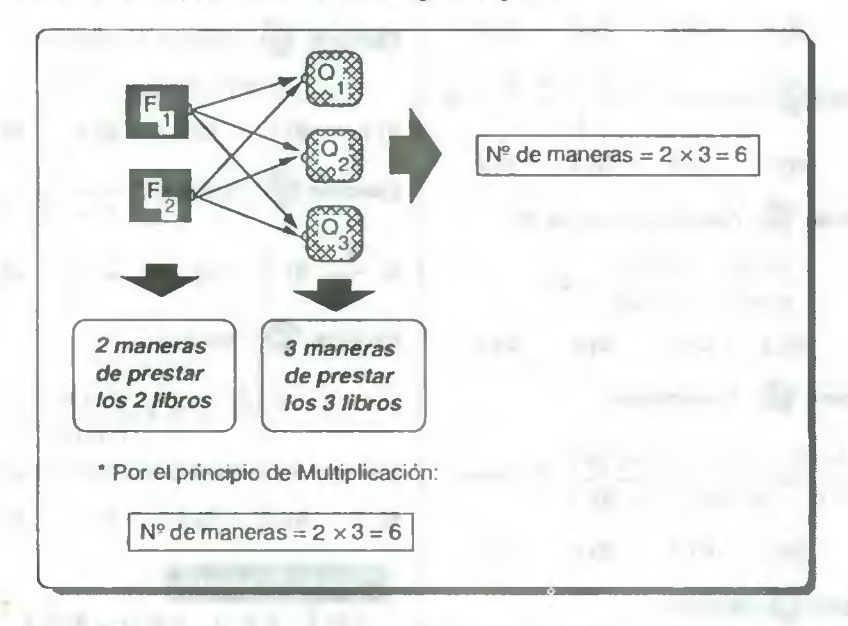
Si el suceso "A" se puede realizar de "m" maneras y el suceso "B" se puede realizar en "n" maneras, entonces los sucesos A y B se pueden realizar en forma conjunta de: m × n maneras, siempre que se efectúe uno después del otro.

Nota: Este principio se puede generalizar para más de 2 sucesos.

Ejemplo 1 : Un alumno tiene dos libros de física y una alumna tiene tres libros de química. ¿De cuántas maneras podría prestarse un libro?

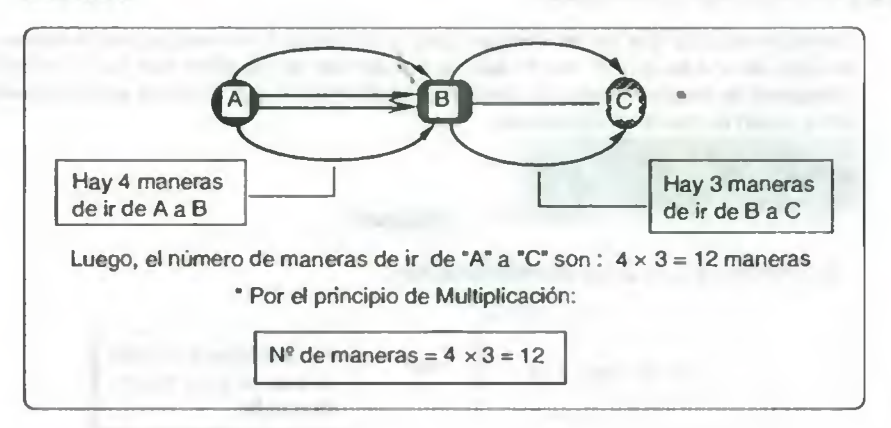
Resolución:

Para su mejor comprensión, hacemos el siguiente gráfico:



Ejemplo 2 : De una ciudad "A" a otra "B" hay 4 caminos diferentes y de la ciudad "B" a la ciudad "C" hay 3 caminos diferentes. ¿De cuántas maneras se podra ir de A a C?

Resolución:



Luego, el número de maneras de ir de "A" a "C" son : $4 \times 3 = 12$ maneras

* Por el principio de Multiplicación:

Nº de maneras $= 4 \times 3 = 12$

12.2.2 PRINCIPIO DE ADICIÓN:

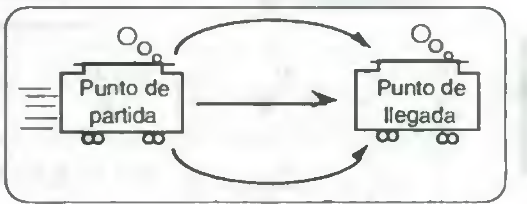
Si el suceso "A" puede realizarse de "m" maneras y el suceso "B" de "n" maneras entonces el suceso "A" o el suceso "B" se puede realizar de: "(m + n)" maneras.

> *Nota:* *Para que se cumpla el principio de adición, se debe verificar que no sea posible que los sucesos A y B ocurran juntos.*

Ejemplos: Proyectamos un viaje y decidimos ir en tren o en microbús, si hay 3 rutas para el tren y 4 para el microbús ¿De cuántas maneras tenemos que decidir nuestro viaje?

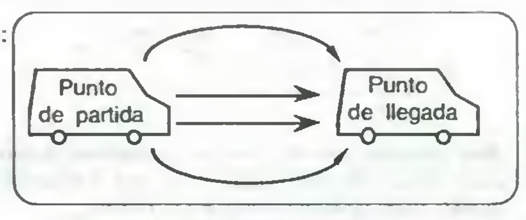
Resolución:

a) Viaje en tren:



Para el tren hay 3 maneras de llegar

b) Viaje en microbus:



Para el microbus hay 4 maneras de llegar

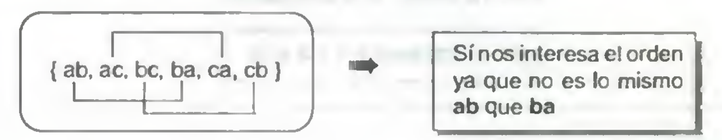
$\therefore$ Nº de maneras $= 3 + 4 = 7$

12.2.3 VARIACIONES O ARREGLOS:

Variación es cada una de las ordenaciones que puedan formarse con varios elementos, tomados de uno en uno, de dos en dos, de tres en tres, etc. de modo que dos ordenaciones cualquiera del mismo número de elementos se diferencien, por lo menos en un elemento o por el orden en que están colocados.

Ejemplo: Dado: A = { a, b, c } — *3 elementos*

- Si tomamos de 2 en 2, las variaciones serían:



- Si tomamos de 3 en 3, las variaciones serían: { abc, acb, bac, bca, cab, cba }

Luego, el número de variaciones, está dado por la siguiente fórmula:

$$V_n^m = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1) \qquad (m > n > 0)$$

De otra forma: $V_n^m = \dfrac{m!}{(m-n)!}$

Donde: m = # total de elementos de los "m" elementos tomados de "n" en "n"

Ejemplos:

$$V_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{3! \times 4 \times 5}{3!} = 20$$

$$V_4^7 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = \frac{3! \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}{3!} = 840$$

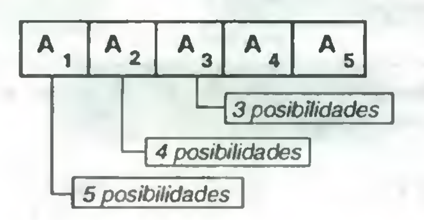
$$V_m^m = \frac{m!}{(m-m)!} = \frac{m!}{0!} = \frac{m!}{1} = m!$$

Nota: *Para las variaciones el orden de sus elementos sí interesa, ya que no es lo mismo decir: 23 que 32 como se observará estos dos números están compuestos por las mismas cifras, pero en su valor son diferentes.*

Ejemplo: 3 alumnos llegan a matricularse a una academia pre-universitaria que dispone de 5 aulas. ¿De cuántas maneras se les puede distribuir de modo que siempre ocupen aulas diferentes?

Resolución:

Sean la 5 aulas, las que se muestran en la figura:



- El primer alumno puede ocupar cualquiera de las 5 aulas, existiendo 5 posibilidades para tomarlo.
- El segundo alumno puede ocupar cualquiera de las 4 aulas que quedan por ocupar, existiendo para este alumno 4 posibilidades de tomarlo.
- El tercer alumno puede ocupar cualquiera de las 3 aulas restantes, existiendo 3 posibilidades para tomarlo.

Luego: # de maneras = 5 x 4 x 3 = 60

Por fórmula obtenemos:

$$V^m_n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Donde: m = 5 (total de elementos = 5)
n = 3 (alumnos)

Luego : $$V^5_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2} = \frac{2! \times 3 \times 4 \times 5}{2} = 60$$

Ejemplo: ¿Cuántos números diferentes de 2 cifras pueden formarse con los dígitos: 1, 2, 3, 4,?

Resolución:

De los dígitos dados: 1, 2, 3, 4, tomamos de 2 en 2, obteniendo:

12;	21;	23;	32
13;	31;	24;	42
14;	41;	34;	43

→ Se forman 12 números de 2 cifras cada uno

Por fórmula, obtenemos:

$$V^m_n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Donde: m = 4
n = 2

$$V^4_2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2} = \frac{2! \times 3 \times 4}{2} = 12$$

∴ Los números de 2 cifras que se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4 son 12.

TALLER DE EJERCICIOS Nº 34

Ejercicio 1 : Calcular el valor de las siguientes variaciones:

i) V_2^5 ii) V_4^8 iii) V_3^3

Resolución:

Rpta. i) 20 ii) 1 680 iii) 6

Ejercicio 2 : Resolver: $V_2^x = 42$

Resolución:

Rpta. x = 6

Ejercicio 3 : Calcula el valor de "x" que satisface la expresión:

$$V_2^x + V_2^{x-2} + V_2^{x-4} = 98$$

Rpta. x = 8

Ejercicio 4 : Calcula de cuántas maneras se pueden distribuir los asientos para cinco personas, en una fila de 10 sillas.

Resolución:

Rpta. 30 240

12.2.4 PERMUTACIONES

Se llaman permutaciones a las variaciones en las que entran todos los elementos en sus diversas ordenaciones de modo que dos grupos cualesquiera contienen los mismos elementos y solamente difieren en el orden en que están colocados.

Ejemplo: Sean los elementos a, b, c

Permutaciones de 3 elementos: abc, acb, bca, bac, cba, cab

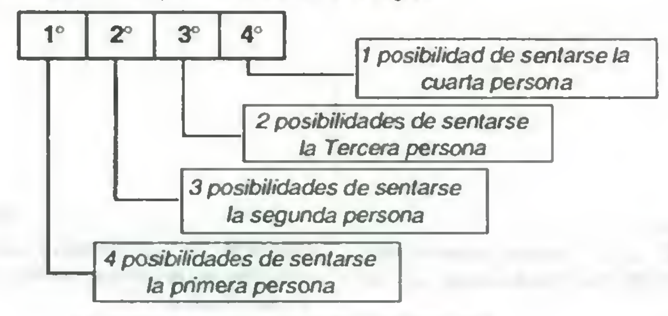
Permutaciones, son aquellas variaciones de tipo: V_n^m en donde: m = n

$$P_n = V_n^m = V_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! \Rightarrow \therefore \boxed{P_n = n!}$$

Ejemplo: ¿De cuántas maneras pueden sentarse 4 personas en 4 asientos uno a continuación de otro?

Resolución:

Sean los 4 asientos, los que se muestran en la figura:



Luego: # de permutaciones = 4 x 3 x 2 x 1 = 24

Por fórmula: $\boxed{P_n = n!}$; Donde: n = 4 Luego: $P_4 = 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

Ejemplo: ¿Calcular el número de palabras de 3 letras que se pueden formar con las letras "a, n, e"?

Resolución:

Las palabras de 3 letras que se pueden formar con las letras: "a, n, e" son:

Por fórmula: $\boxed{P_n = n!}$; Donde: n = 3

Luego: $P_3 = 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 35

Ejercicio 1 : Escribe todas las permutaciones posibles de las letras A, B, C, D, de acuerdo con la condición que se indica en cada caso:

i) La primera letra es A y la última D.
ii) En los extremos deben estar las letras B y D.

Resolución:

Ejercicio 2 : ¿De cuántas maneras distintas pueden ordenarse 8 alumnos en una fila?

Resolución:

Rpta. 40 320

Ejercicio 3 : ¿Cuántas "palabras" no necesariamene pronunciables pueden formarse con las letras de la palabra **"vestido"** (no pueden repetirse las letras ni pueden omitirse)

Resolución:

Rpta. 5 040

Ejercicio 4 : ¿Cuántas de estas "palabras" obtenidas en el ejercicio anterior empiezan con V y terminan en O?

Resolución:

Rpta. 120

12.2.5 NÚMEROS COMBINATORIOS:

Un número combinatorio se simboliza de la siguiente manera:

$\binom{n}{k}$ ó C^n_k; en la que "n" y "k" son números naturales, y $n \geq k$, se lee "número combinatorio n sobre k"

En un número combinatorio $\binom{n}{k}$ a "n" se le denomina numerador del número combinatorio y a "k" se le denomina denominador del número combinatorio.

* Todo número combinatorio $\binom{n}{k}$ equivale a una fracción, cuyo numerador es el producto de "k" factores que comenzando en "n", disminuye de 1 en 1, es decir:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots(n-k+1)}{k!}$$

Ejemplos:

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} = 10$$

(n señala al 5; k señala al 3)

Si: "k" es igual a 3, nos indica que en el numerador de la fracción debe existir sólo 3 factores $(5 \times 4 \times 3)$ y en el denominador debe ir el 3!

$$\binom{7}{4} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 35$$

* Otra forma de obtener el número combinatorio $\binom{n}{k}$ es la siguiente:

$$\binom{n}{k} = C^n_k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Ejemplos:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!\,3!} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{\cancel{3!} \times 4 \times 5}{1 \times 2 \times \cancel{3!}} = 10$$

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{(7-4)!\,4!} = \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{\cancel{4!} \times 5 \times 6 \times 7}{3!\,\cancel{4!}} = \frac{5 \times 6 \times 7}{1 \times 2 \times 3} = 35$$

PROPIEDADES:

1. $\binom{n}{1} = n$

Demostración: $\binom{n}{1} = \dfrac{n!}{(n-1)!\,1!} = \dfrac{(n-1)!\,n}{(n-1)!\,1} = n \Rightarrow \therefore \binom{n}{1} = n$ **l.q.q.d.**

Ejemplos: $\binom{3}{1} = 3$; $\binom{6}{1} = 6$

2. $\binom{n}{n} = 1$

Demostración: $\binom{n}{n} = \dfrac{n!}{(n-n)!\,n!} = \dfrac{n!}{0!\,n!} = \dfrac{n!}{1 \times n!} = 1 \Rightarrow \therefore \binom{n}{n} = 1$ **l.q.q.d.**

Ejemplos: $\binom{4}{4} = 1$; $\binom{7}{7} = 1$

3. $\binom{n}{0} = 1$

Demostración: $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{(n-0)!\,0!} = \dfrac{n!}{n! \times 1} = \dfrac{1}{1} = 1 \Rightarrow \therefore \binom{n}{0} = 1$ **l.q.q.d.**

Ejemplos: $\binom{5}{0} = 1$; $\binom{12}{0} = 1$

4. Dos números combinatorios con igual numerador, son iguales si la suma de sus denominadores es igual al numerador.

Ejemplos:

$\binom{6}{2} = \binom{6}{4}$ **(Tienen el mismo numerador 6, y 2 + 4 = 6)**

$\binom{8}{3} = \binom{8}{5}$ **(Tienen el mismo numerador 8, y 3 + 5 = 8)**

En General:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

(5.) Si los números combinatorios son de las formas: respectivamente, es decir, si tienen igual numerador y sus denominadores son consecutivos, entonces se cumple la siguiente igualdad:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Ejemplos:

a)

$$\binom{6}{3} + \binom{6}{4} = \binom{6+1}{4}$$

$$\frac{6!}{(6-3)!\,3!} + \frac{6!}{(6-4)!\,4!} = \binom{7}{4}$$

$$\frac{6!}{3!\,3!} + \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{7!}{(7-4)!\,4!}$$

$$\frac{3! \times 4 \times 5 \times 6}{3! \times 1 \times 2 \times 3} + \frac{4! \times 5 \times 6}{1 \times 2 \times 4!} = \frac{4! \times 5 \times 6 \times 7}{3!\,4!}$$

$$20 + 15 = 35$$ ➡ **Se cumple la igualdad**

b)

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{4+1}{3}$$

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}$$

$$\frac{4!}{2!\,2!} + \frac{4!}{1!\,3!} = \frac{5!}{2!\,3!}$$

$$\frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2 \times 1} + \frac{4 \times 3!}{1 \times 3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \times 3!}$$

$$6 + 4 = 10$$ ➡ **Se cumple la igualdad**

12.2.6 COMBINACIONES:

Se llama combinación a las variaciones que pueden formarse con varios elementos de modo que dos cualesquiera de ellos difieran por lo menos en un elemento.

Ejemplo: Sean los elementos: a, b, c, d

Combinaciones de los 4 elementos tomados de 2 en 2 son: ab, ac, ad, bc, bd, cd

Fórmula para calcular el número de combinaciones de "n" elementos tomados "k" a la vez

$$\binom{n}{k} = C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Donde : $n \geq k \geq 0$

Ejemplo 1 : De un grupo de 3 estudiantes, cuántos grupos diferentes de 2 alumnos podrían formarse.

Resolución:

Sean: A, B y C los 3 alumnos, los diferentes grupos de dos serían: AB, AC y BC = 3 grupos

Por fórmula:

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!\,2!} = \frac{3!}{1!\,2!} = \frac{\cancel{2!} \times 3}{1 \times \cancel{2!}} = \boxed{3 \text{ grupos}}$$

Ejemplo 2 : ¿Cuántos partidos de fútbol se juegan en un campeonato de fútbol en una rueda, en la que participan 6 equipos?

Resolución:

Este problema; se trata de una combinación ya que el orden a jugar no interesa.
Cada partido se juega de 2 en 2, luego el número de combinaciones sería:

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{(6-2)!\,2!} = \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{\cancel{4!} \times 5 \times 6}{\cancel{4!} \times 1 \times 2} = 15 \textit{ partidos}$$

Nota: Para las combinaciones el orden no interesa, por ejemplo si queremos unir los puntos que se muestran; como se observará, nosotros podemos empezar a unir por cualquiera de los puntos:

∴ El orden para empezar a unirlos no interesa, ya que podemos empezar por cualquiera de ellos.

12.2.7 DIFERENCIA ENTRE COMBINACIONES Y VARIACIONES:

Las combinaciones se diferencian por sus elementos y las variaciones por el orden de los mismos.

Ejemplo: Dado el conjunto: A = {a, b, c, d} , calcular las variaciones y las combinaciones de los elementos de "A" tomados de 3 en 3 a la vez.

Resolución:

COMBINACIONES	VARIACIONES
abc	abc, acb, bac, bca, cab, cba
abd	abd, adb, bad, bda, dab, dba
acd	acd, adc, cad, cda, dac, dca
bcd	bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb
Dos combinaciones son diferentes solo si difieren por lo menos en un elemento	Si cambiamos el orden de los elementos se produce variación distinta al anterior

TALLER DE EJERCICIOS Nº 36

Ejercicio 1: Calcule: $E = \binom{7}{2} + \binom{7}{3}$

Resolución:

Rpta. E = 56

Ejercicio 2: Calcule:

$$M = \binom{6}{3} + 2\binom{5}{3} - \binom{5}{2}$$

Resolución:

Rpta. M = 30

Ejercicio 3: Calcule:

$$S = \frac{10! + \binom{5}{2} \cdot 9!}{8! \cdot \binom{5}{3} \cdot 9}$$

Resolución:

Rpta. S = 2

Ejercicio 4: ¿Cuántos subconjuntos de 4 elementos se pueden formar a partir de un conjunto de 6 elementos?

Resolución:

Rpta. 15

Ejercicio 5: Determine el valor de "x" de modo que la igualdad se cumpla:

$$\binom{x}{1} + 2\binom{x}{2} + \binom{x}{3} = 20$$

Resolución:

Rpta. x = 4

Ejercicio 6: ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un grupo de 4 personas entre un total de 3 hombres y 5 mujeres?

Resolución:

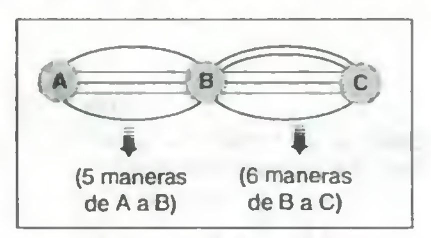
Rpta. 70

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE DIFERENCIA ENTRE COMBINACIONES Y VARIACIONES

Problema 1: Para ir de una ciudad "A" a otra "B" existen 5 caminos diferentes y para ir de "B" a "C" existen 6 caminos diferentes. ¿De cuántas maneras puedo ir de "A" a "C" y luego retornar sin pasar 2 veces por un mismo camino?

Resolución:

- Para su mejor entendimiento, construimos el siguiente gráfico:



Luego:

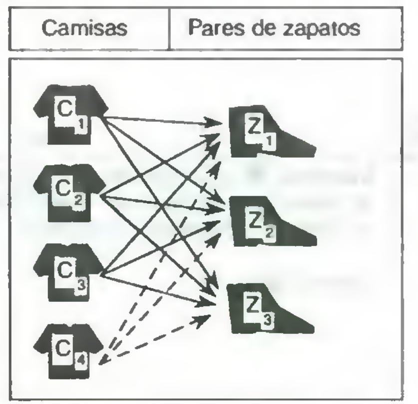
$5 \times 6 = 30$ formas y al regresar 29 porque no puede regresar por el mismo camino; en total:

$30 \times 29 = 870$ maneras. ***Rpta.***

Problema 2: Manuel tiene 4 camisas y tres pares de zapatos. ¿De cuántas maneras distintas puede ponerse una camisa y un par de zapatos?

Resolución:

Camisas	Pares de zapatos



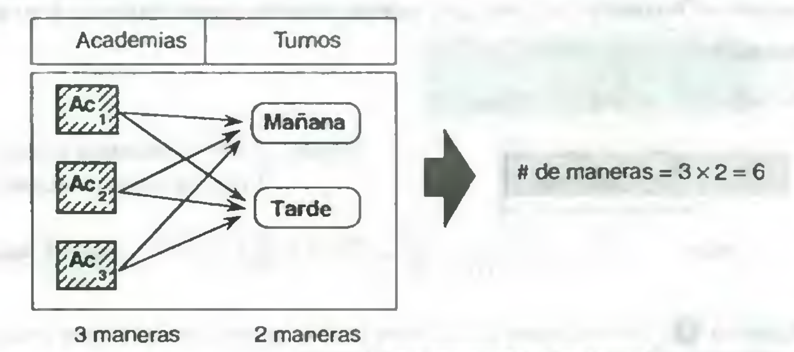
4 maneras 3 maneras

de maneras = $4 \times 3 = 12$

Por el principio de multiplicación: $\therefore$ # de maneras = $4 \times 3 = 12$ ***Rpta.***

Problema 3: Nataly desea prepararse en una academia pre-universitaria. Puede hacerlo en una de las tres que funcionan cerca a su casa y en turnos de mañana o tarde. ¿De cuántas maneras diferentes puede matricularse?

Resolución:



Por el principio de multiplicación: $\therefore$ # de maneras = 3 × 2 = 6 ***Rpta.***

Problema 4: Determinar el valor que representa cada expresión siguiente:

a) $V^7_4 =$ b) $V^9_3 =$

Resolución:

Por definición de variación, obtenemos: $V^7_4 = \dfrac{7!}{(7-4)!} = \dfrac{7!}{3!} = \dfrac{\cancel{3!} \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}{\cancel{3!}} = 840$

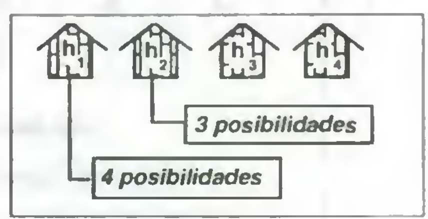
$$V^9_3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = \frac{\cancel{6!} \times 7 \times 8 \times 9}{\cancel{6!}} = 504$$

Problema 5 : 2 viajeros llegan a una ciudad en la que hay cuatro hoteles. ¿De cuántas maneras pueden ocupar sus cuartos, debiendo estar en hoteles distintos?

Resolución:

Sean los 4 hoteles, los que se muestran en la figura:

Como son 2 viajeros, uno de ellos podrá ocupar cualquier de los 4 hoteles, existiendo para éste viajero 4 posibilidades de ocuparlo, para el otro quedarán 3 hoteles existiendo para éste 3 posibilidades de ocuparlo. Luego:



$\therefore$ # de maneras = 4 x 3 = 12

* Aplicando la fórmula de variación, obtenemos:

$$V^m_n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Donde: m = # de hoteles
n = # de viajeros

Luego: $$V_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{\cancel{2!} \times 3 \times 4}{\cancel{2!}} = \boxed{12}$$ **Rpta.**

Problema 6: Un club de 12 miembros debe elegir su directiva formada por un presidente, un tesorero, un secretario y un vocal. ¿De cuántas maneras puede elegir el club su directiva?

Resolución:

Por definición de variación, obtenemos:

$$\boxed{V_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}}$$

Donde: $\begin{cases} m = 12 \text{ miembros en total} \\ n = \text{se toman grupos de 4 miembros} \end{cases}$

Luego: $$V_4^{12} = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{12!}{8!} = \frac{\cancel{8!} \times 9 \times 10 \times 11 \times 12}{\cancel{8!}} = \boxed{11880}$$ **Rpta.**

Problema 7: Con los dígitos 2, 3, 5 y 8 se desean formar números de tres cifras, sin permitirse repeticiones. ¿Cuántos números se pueden formar?

Resolución:

Por definición de variación, obtenemos:

$$\boxed{V_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}}$$

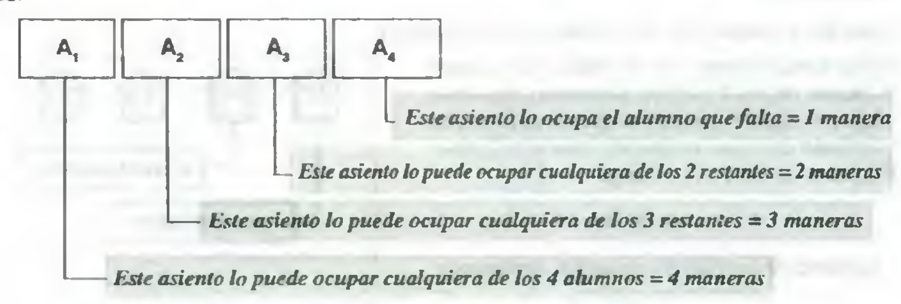
Donde: $\begin{cases} m = \# \text{ de elementos en total} = 4 \\ n = \text{grupos de 3} \end{cases}$

Luego: $$V_3^4 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{1} = \boxed{24}$$ **Rpta.**

Problema 8: ¿ De cuántas maneras distintas se pueden sentar 4 alumnos en 4 asientos unipersonales ?

Resolución:

En este caso se trata de una permutación, porque participan todos los elementos.
Veamos:



$\therefore$ $\boxed{\# \text{ de maneras} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24}$ **Rpta.**

Por definición de permutación: $P_n = n!$; Donde: n = 4 elementos

Luego: $P_4 = 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

Problema 9 : ¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar 4 alumnos en 4 asientos unipersonales ubicados alrededor de una mesa?

Resolución:

En este caso, se trata de una permutación, donde un alumno se sienta en cualquier asiento y los tres restantes pueden ubicarse en los otros 3 asientos o sea:

$P_{n-1} = (n-1)!$ Donde: n = # de elementos

$P_{4-1} = (4-1)! = 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ maneras *Rpta.*

Generalizando: si tuvieramos que ubicar "n" personas alrededor de una mesa circular, el número de maneras distintas de hacerlo seria:

$P_{n-1} = (n-1)!$ Donde: n = # de elementos

* A este tipo de permutaciones se le llama **Permutaciones Circulares.**

Problema 10 : Calcular el número de triángulos que se pueden trazar por 7 puntos no colineales.

Resolución:

En este caso se trata de una combinación, ya que al unir los puntos para obtener los triángulos, el orden no interesa.

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}$$

Donde:
- m = # total de elementos (puntos)
- n = Puntos que se toman para formar los triángulos siendo este en grupos de 3 en 3

Luego: $$\binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)!\,3!} = \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{\cancel{4!} \times 5 \times 6 \times 7}{\cancel{4!} \times 6} = 35$$

∴ Se forman 35 triángulos *Rpta.*

Problema 11 : Un entrenador de básquetbol tiene 9 jugadores para él, en igualdad de condiciones. ¿De cuántas maneras puede elegir a sus jugadores para comenzar a jugar un partido?

Resolución:

Se sabe que un equipo de básquetbol está conformado por 5 jugadores. Donde: m = 9 y n = 5

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}$$

$$\binom{9}{5} = \frac{9!}{(9-5)!\,5!} = \frac{9!}{4!\,5!} = \frac{5! \times 6 \times 7 \times 8 \times 9}{24 \times 5!} = \frac{6 \times 7 \times 9}{3}$$

$$\binom{9}{5} = 6 \times 7 \times 3 \quad \Rightarrow \quad \binom{9}{5} = 126 \quad \textit{Rpta.}$$

Problema 12 : ¿De cuántas maneras puede escogerse un comité compuesto de 3 hombres y 2 mujeres de un grupo de 7 hombres y 5 mujeres?

Resolución:

De los 7 hombres se pueden escoger 3 de $\binom{7}{3}$ maneras y

de las 5 mujeres se pueden escoger 2 de $\binom{5}{2}$ maneras.

Por consiguiente el comité puede escoger de: $\binom{7}{3} \times \binom{5}{2}$

Luego: $\binom{7}{3} \times \binom{5}{2} = \frac{7!}{(7-3)!\,3!} \times \frac{5!}{(5-2)!\,2!}$

$$\binom{7}{3} \times \binom{5}{2} = \frac{7!}{4!\,3!} \times \frac{5!}{3!\,2!}$$

$$\binom{7}{3} \times \binom{5}{2} = \frac{4! \times 5 \times 6 \times 7}{4! \times 6} \times \frac{3! \times 4 \times 5}{3! \times 2}$$

$$\binom{7}{3} \times \binom{5}{2} = 35 \times 10 = 350 \quad \rightarrow \quad \binom{7}{3} \times \binom{5}{2} = 350 \text{ maneras} \quad \textit{Rpta.}$$

Problema 13 : ¿Cuántas diagonales tiene un exágono?

Resolución:

\# Diagonales = $C_2^n - n$; siendo: n = # de lados del poligono.

Luego: # Diagonales $= C_2^6 - 6 = \frac{6!}{4! \times 2!} - 6$

$$= \frac{4! \times 5 \times 6}{4! \times 2} - 6 \quad \Rightarrow \quad \therefore \; \text{\# Diagonales} = 9 \quad \textit{Rpta.}$$

PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE ANÁLISIS COMBINATORIO

NIVEL I

Problema 1: De una ciudad A a otra B hay 6 caminos diferentes y de la ciudad "B" a "C" hay 4 caminos diferentes. ¿De cuántas maneras se puede hacer el viaje redondo de "A" a "C" pasando por "B"?

A) 20 B) 10 C) 12 D) 24 E) 15

Problema 2: Maria tiene 5 pantalones y 3 blusas ¿De cuántas maneras distintas puede ponerse un pantalón y una blusa?

A) 8 B) 60 C) 15 D) 30 E) 12

Problema 3: Determinar el valor de "m" en la expresión: $V_2^m = 20$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Problema 4: ¿De cuántas maneras pueden sentarse en una banca de seis asientos, 4 personas?

A) 120 B) 360 C) 24 D) 720 E) 180

Problema 5: Una persona posee 3 anillos distintos. ¿De cuántas maneras puede colocarlos en sus dedos de la mano derecha, colocando sólo un anillo por dedo, sin contar el pulgar?

A) 15 B) 12 C) 24 D) 18 E) 42

Problema 6: Una señora tiene 10 amigas de confianza. ¿De cuántas maneras puede invitar a 6 de ellas a cenar?

A) 120 B) 210 C) 720 D) 60 E) N.A.

Problema 7: Determinar el valor de "n" en la siguiente expresión: $\binom{n}{4} = 15$

A) 5 B) 6 C) 8 D) 4 E) 3

Problema 8: Resolver: $C_5^x + C_6^x = 28$

A) 5 B) 6 C) 7 D) 4 E) 8

Problema 9: ¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar 5 alumnos en 5 asientos unipersonales?

A) 60 B) 24 C) 120 D) 102 E) 42

Problema 10: ¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar 5 alumnos en 5 asientos unipersonales ubicados alrededor de una mesa?

A) 120 B) 24 C) 25 D) 48 E) 42

Problema 11: ¿Cuántos números mayores de 6 000 se podrán formar con las siguientes cifras: 2, 5, 6, 3?

A) 24 B) 12 C) 20 D) 6 E) 8

Problema 12: ¿Calcular el número de cuadriláteros que se pueden trazar por 8 puntos no colineales?

A) 60 B) 70 C) 80 D) 90 E) N.A.

Problema 13: ¿Cuántos números de 3 cifras pueden formarse con los digitos: 1 ; 2 ; 3 ; 4 y 5 sin que se repita uno de ellos, en el número formado?

A) 24 B) 15 C) 30 D) 60 E) 120

Problema 14: Calcula: $\binom{n+1}{n} : \binom{n}{n-1}$

A) n B) $\frac{n+1}{n-1}$ C) $\frac{n-1}{n+1}$

D) $\frac{n+1}{n}$ E) $\frac{n}{n+1}$

Problema 15: De un total de "x" personas se pueden formar 21 grupos de 5. Determinar el valor de "x".

A) 4 **B)** 8 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

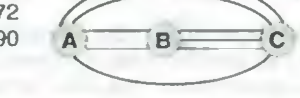
Clave de Respuestas

1. D	2. C	3. C	4. B	5. C
6. B	7. B	8. C	9. C	10. B
11. D	12. B	13. D	14. D	15.E

NIVEL II

Problema 1: De cuántas maneras se puede viajar de "A" a "C" y regresar a "A" sin usar el mismo camino de la ida.

A) 63 **B)** 72
C) 81 **D)** 90
E) 93



Problema 2: ¿Cuántas banderas tricolores diferentes de franjas horizontales se pueden confeccionar si se disponen 7 colores distintos?

A) 35 **B)** 70 **C)** 140 **D)** 210 **E)** 220

Problema 3: ¿Cuántos números diferentes de 5 cifras se pueden formar con los dígitos 1 ; 2 ; 3 ;........; 9 sin repetir?

A) 15 012 **B)** 15 210 **C)** 15 120
D) 12 150 **E)** 12 510

Problema 4: ¿Cuántas "palabras" se pueden formar con las letras de la palabra LIBRO?

A) 24 **B)** 120 **C)** 720 **D)** 60 **E)** 50

Problema 5: La primera división de la liga de fútbol de Huacho consta de 25 equipos. ¿Cuántos partidos deben jugarse para completar la primera rueda?

A) 120 **B)** 150 **C)** 600 **D)** 300 **E)** 50

Problema 6: ¿Cuántas diagonales tiene un octógono?

A) 30 **B)** 20 **C)** 40 **D)** 12 **E)** 18

Problema 7: El número combinatorio $\binom{p+q}{p}$ es equivalente a:

I. $\binom{p+q}{q}$ II. $\dfrac{(p+q)!}{p! \cdot q!}$ III. $\binom{p+q}{p-q}$

A) Sólo I **B)** I y II **C)** II y III **D)** Sólo II **E)** I y III

Problema 8: De un grupo de 4 biólogos, 3 químicos y 5 matemáticos, se tiene que escoger un comité de 7, de modo que se incluyan 2 biólogos, 2 químicos y 3 matemáticos. ¿De cuántas maneras puede hacerse esto?

A) 360 **B)** 120 **C)** 180 **D)** 240 **E)** 210

Problema 9: Señale el producto de las raíces positivas de la ecuación:

$$\binom{x}{10} = 0$$

A) 3! **B)** 11!
C) 8! **D)** 9!
E) 10!

Problema 10: Hallar el equivalente de:

$$Q = \binom{n+1}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{n-1} + \binom{n+1}{n-1}$$

A) $4n^2$ **B)** $n^2 + 3n$ **C)** n^2
D) $(n+3)!$ **E)** $n\,(n-3)$

Problema 11: Si: $\binom{n}{n+1} + \binom{n-1}{n-2} = 99$

Calcular el valor de "n":

A) 33 B) 50 C) 98 D) 100 E) 101

Problema 12 : ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 6 personas en un auto si sólo una de ellas sabe manejar?

A) 5 B) 6 C) 30 D) 60 E) 120

Problema 13 : ¿De cuántas maneras se puede escoger un "menú" (1 entrada - plato de fondo - postre) si se dispone de 3 entradas, 3 platos de fondo y 5 postres?

A) 45 B) 15 C) 11 D) 14 E) 125

Clave de Respuestas

1. B	2. D	3. C	4. B	5. D
6. B	7. B	8. C	9. D	10. B
11. D	12. E	13. A		

11.3 BINOMIO DE NEWTON

11.3.1 POTENCIA DE UN BINOMIO.

Veamos como varía (x + a) al ser elevado a un exponente.

$$(x+a)^1 = x + a = \binom{1}{0}x + \binom{1}{1}a$$

$$(x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2 = \binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xa + \binom{2}{2}a^2$$

$$(x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2a + \binom{3}{2}xa^2 + \binom{3}{3}a^3$$

$$(x+a)^4 = x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3a + \binom{4}{2}x^2a^2 + \binom{4}{3}xa^3 + \binom{4}{4}a^4$$

En General: $$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}a + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}a^3 + \ldots\ldots + \binom{n}{n}a^n$$

Nota: *Esta fórmula sólo se cumple para "n" números naturales.*

Ejemplo 1: Hallar el desarrollo de: $(x + a)^5$

Resolución:

Aplicando la fórmula general del binomio de Newton, obtenemos:

$$(x+a)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4a + \binom{5}{2}x^3a^2 + \binom{5}{3}x^2a^3 + \binom{5}{4}xa^4 + \binom{5}{5}a^5$$

1 5 10 10 5 1

$$(x+a)^5 = x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5$$

Recomendaciones:

Para desarrollar: $(x + a)^n$ se puede tener en cuenta lo siguiente:

1. *El desarrollo es un polinomio homogéneo de grado n*
2. *El número de términos del desarrollo es (n + 1)*
3. *Los exponentes de la letra "x" van disminuyendo de uno en uno a partir del valor de "n" hasta cero inclusive*
4. *Los exponentes de la letra "a" van aumentando de uno en uno a partir de cero hasta el valor de "n" inclusive*
5. *Los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales en valor absoluto*
6. *El coeficiente de un término cualquiera se obtiene multiplicando el coeficiente del término anterior por el exponente de "x" en dicho término y dividiendo el resultado entre el exponente de "a", aumentando en la unidad.*
7. *El coeficiente del primer término del desarrollo es la unidad y el del segundo término es directamente el exponente del binomio.*
8. *Cuando se desarrolle en el siguiente caso $(x - a)^n$ se deberá tener en cuenta que los signos delos términos del desarrollo son alternadamente positivos y negativos.*

Ejemplo 2: Hallar el desarrollo de: $(x + a)^6$

Resolución:

Aplicando la fórmula general del binomio de Newton, obtenemos:

$$(x+a)^6 = \binom{6}{0}x^6 + \binom{6}{1}x^5a + \binom{6}{2}x^4a^2 + \binom{6}{3}x^3a^3 + \binom{6}{4}x^2a^4 + \binom{6}{5}xa^5 + \binom{6}{6}a^6$$

1 6 15 20 15 6 1

$$(x+a)^6 = 1x^6 + 6x^5a + 15x^4a^2 + 20x^3a^3 + 15x^2a^4 + 6xa^5 + 1a^6$$

Ejemplo 3: Hallar el desarrollo de: $(x - a)^5$

Resolución:

En este caso los signos son alternados positivos y negativos, además aplicando las recomendaciones 6 y 7; veamos:

$$(x-a)^{⑤} = x^5 - ⑤ x^{④} a^{\boxed{1}} + \frac{⑤ \cdot ④}{\boxed{1}+1} x^{③} a^{\boxed{2}} - \frac{10 \cdot ③}{\boxed{2}+1} x^{②} a^{\boxed{3}} + \frac{10 \cdot ②}{\boxed{3}+1} x^{①} a^{\boxed{4}} - \frac{5 \cdot ①}{\boxed{4}+1} a^5$$

$$\frac{20}{2} = 10 \quad \frac{30}{3} = 10 \quad \frac{20}{4} = 5 \quad \frac{5}{5} = 1$$

$$(x-a)^5 = x^5 - 5x^4a^1 + 10x^3a^2 - 10x^2a^3 + 5x^1a^4 - 1a^5$$

$$\therefore \quad \boxed{(x-a)^5 = x^5 - 5x^4a + 10x^3a^2 - 10x^2a^3 + 5xa^4 - a^5}$$

Ejemplo 4: Hallar el desarrollo de: $(2x+y)^4$

Resolución:

$$(2x+y)^{④} = (2x)^4 + ④(2x)^{③} y^{\boxed{1}} + \frac{④ \cdot ③}{\boxed{1}+1} (2x)^{②} y^{\boxed{2}} + \frac{6 \cdot ②}{\boxed{2}+1} (2x)^{①} y^{\boxed{3}} + \frac{4 \cdot ①}{\boxed{3}+1} y^{④}$$

$$\frac{12}{2} = 6 \quad \frac{12}{3} = 4 \quad \frac{4}{4} = 1$$

$$(2x+y)^4 = (2x)^4 + 4(2x)^3y^1 + 6(2x)^2y^2 + 4(2x)^1y^3 + y^4$$

$$(2x+y)^4 = 16x^4 + 4(8x^3)y + 6(4x^2)y^2 + 8xy^3 + y^4$$

$$\therefore \quad \boxed{(2x+y)^4 = 16x^4 + 32x^3y + 24x^2y^2 + 8xy^3 + y^4}$$

12.3.2 TRIÁNGULO DE PASCAL O DE TARTAGLIA

Si distribuimos en línea los coeficientes del desarrollo del binomio para sus potencias consecutivas, toma la forma geométrica de un triángulo de Pascal o de Tartaglia en honor a sus descubridores; veamos:

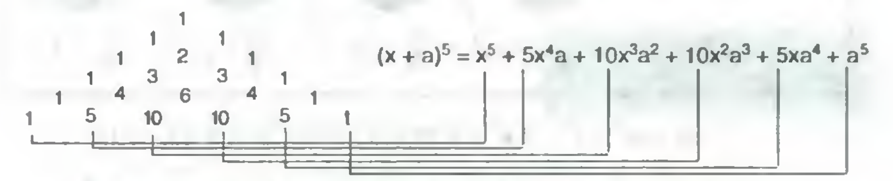
$(x+a)^0 = 1$
$(x+a)^1 = 1\ 1$
$(x+a)^2 = 1\ 2\ 1$
$(x+a)^3 = 1\ 3\ 3\ 1$
$(x+a)^4 = 1\ 4\ 6\ 4\ 1$
$(x+a)^5 = 1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1$
$(x+a)^6 = 1\ 6\ 15\ 20\ 15\ 6\ 1$

ó

```
            1   1
          1   2   1
        1   3   3   1
      1   4   6   4   1
    1   5  10  10   5   1
  1   6  15  20  15   6   1
```

En donde un coeficiente cualquiera es igual a la suma de los dos que están encima de él en la fila anterior.

Ejemplo: Hallar el desarrollo de: $(x + a)^5$ En consecuencia:



$$(x + a)^5 = x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5$$

Nota: El triángulo de Pascal sólo se aplicará para potencias pequeñas, caso contrario habrá que emplear la fórmula general.

12.3.3 FÓRMULA PARA CALCULAR UN TÉRMINO CUALQUIERA DEL DESARROLLO DE UN BINOMIO A UN EXPONENTE DADO $(x + a)^n$

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k} a^k$$

Donde:
- "(k + 1)" : es el lugar del término pedido
- "n" : es el exponente del binomio
- "x" : es el primer término de binomio
- "a" : es el segundo término del binomio

* Para el binomio: $(x - a)^n$ usaremos: $$T_{k+1} = (-1)^k \binom{n}{k} x^{n-k} a^k$$

Ejemplo 1: Calcular el quinto término del desarrollo de: $(x^2 + 2y)^7$

Resolución:

Sabemos que: $n = 7$ .... (exponente del binomio)

$(k + 1) = 5$ .... (lugar del término pedido)

$\therefore \quad k = 5 - 1 \rightarrow \boxed{k = 4}$

Los valores hallados, los reemplazamos en la fórmula:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k} a^k \rightarrow T_5 = \binom{7}{4} (x^2)^{7-4} (2y)^4$$

$$T_5 = \frac{7!}{(7-4)!\,4!} (x^2)^3 (16y^4)$$

$$T_5 = \frac{4! \times 5 \times 6 \times 7}{3!\,4!} x^6 (16y^4)$$

$$\therefore \quad \boxed{T_5 = 560\,x^6 y^4}$$

Ejemplo 2: Calcular el cuarto término del desarrollo de: $(3x^2 - 2y)^6$

Resolución:

Sabemos que: $\begin{cases} n = 6 \\ (k+1) = 4 \rightarrow \boxed{k = 3} \end{cases}$

Los valores hallados, los reemplazamos en la fórmula:

$$T_{k+1} = (-1)^k \binom{n}{k} x^{n-k} a^k \rightarrow T_4 = (-1)^3 \binom{6}{3} (3x^2)^{6-3} (2y)^3$$

$$T_4 = -1 \times \frac{6!}{(6-3)!\,3!} (3x^2)^3 (8y^3)$$

$$T_4 = -1 \frac{3! \times 4 \times 5 \times 6}{3! \times 1 \times 2 \times 3} (27x^6)(8y^3)$$

$$T_4 = -20\,(216x^6 y^3)$$

$$\therefore \boxed{T_4 = -4320\,x^6\,y^3}$$

12.3.4 CÁLCULO DEL TÉRMINO CENTRAL DEL DESARROLLO DE $(x + a)^n$ EN DONDE: n = NÚMERO PAR

En este caso se aplicará la fórmula: $K = \frac{n}{2}$

Ejemplo 1: Calcular el término central de: $(x + a)^4$

Resolución:

Sabemos que: $n = 4$(exponente del binomio)

De la fórmula: $K = \frac{n}{2} \rightarrow K = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow \boxed{k = 2}$

Luego, aplicamos la fórmula: $T_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k} a^k$

$$T_{2+1} = \binom{4}{2} x^{4-2} a^2$$

$$T_3 = \frac{4!}{(4-2)!\,2!} x^2 a^2 \rightarrow T_3 = \frac{2! \times 3 \times 4}{2! \times 2} x^2 a^2 \quad \therefore \boxed{T_3 = 6x^2a^2}$$

Ejemplo 2: Calcular el término central de: $(x + a)^8$

Resolución:

Sabemos que: $n = 8$

De la fórmula: $K = \frac{n}{2} \rightarrow k = \frac{8}{2} \rightarrow \boxed{k = 4}$

Luego aplicamos la fórmula: $T_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k} a^{k}$

$$T_{4+1} = \binom{8}{4} x^{8-4} a^{4}$$

$$T_5 = \frac{8!}{4!\,4!} x^4 a^4 = \frac{\cancel{4!} \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}{\cancel{4!} \times 24} x^4 a^4$$

$$\therefore \quad \boxed{T_5 = 70x^4a^4}$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 37

Ejercicio 1: Hallar el desarrollo de: $(2x + 3y)^5$ ***Resolución:***	**Ejercicio 3**: Calcular el tercer término del desarrollo de: $(2x + 3)^5$ ***Resolución:*** ***Rpta.*** $720\,x^3$
Ejercicio 2: Hallar el desarrollo de: $\left(x + \sqrt{3}\right)^6$ ***Resolución:***	**Ejercicio 4**: Calcular el sétimo término del desarrollo de: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^9$ ***Resolución:*** ***Rpta.*** $84/x^3$

Ejercicio 5 : Calcular el término central del desarrollo de: $(a + 2b)^8$

Resolución:

Rpta. $1\,120a^4b^4$

Ejercicio 7 : Hallar el término que contiene a x^8 en el desarrollo de: $(x + y)^{13}$

Resolución:

Rpta. $1\,287x^8y^5$

Ejercicio 6 : Calcular el término central del desarrollo de: $\left(x + \dfrac{1}{x^2}\right)^{10}$

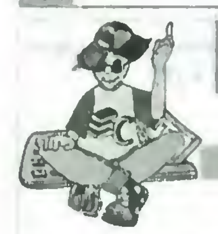
Resolución:

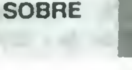
Rpta. $252/x^5$

Ejercicio 8 : Halla el valor de "x" de tal manera que la suma del 3ro. y 5to. término en el desarrollo de: $(x + 1)^4$ sea igual a 25.

Resolución:

Rpta. $x = \pm 2$





EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE EL BINOMIO DE NEWTON

NIVEL I

Ejercicio 1: Obtenga los siguientes desarrollos:

a) $(x - 2y)^5$ b) $(1 + 3a)^7$ c) $(1 - b)^{11}$

d) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^6$ e) $\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)^4$ f) $\left(\frac{3}{x^4} - \frac{x^3}{4}\right)^6$

Ejercicio 2: Determine el término indicado en el desarrollo correspondiente:

a) 7º término en: $(x - y)^{11}$
b) 5º término en: $(a + b)^{21}$
c) 10º término en: $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^{10}$
d) 8º término en: $\left(x^2y - \frac{2}{xy^2}\right)^7$
e) 11º término en: $(2a - b)^{10}$
f) 2º término en: $\left(1 - \frac{1}{xyz}\right)^4$

Ejercicio 3: Determine el coeficiente numérico del término indicado:

a) 2º término en: $(2x - y)^4$
b) 3º término en: $(3a + 4b)^6$
c) 9º término en: $(x^2/y - y^2/x)^{10}$
d) 5º término en: $(-a + 12)^5$
e) 8º término en: $(p^2v^2 - 1)^{14}$
f) término central : $(2x^2y + xy^3)^8$

Ejercicio 4: En el desarrollo de: $(3x^2 - 1/x)^5$ determine:

a) El coeficiente numérico del cuarto término.
b) El término que contiene x^4.
c) El término independiente de x.

Ejercicio 5: En el desarrollo de:

$\left(\frac{2}{x^2y} - 3xy^3\right)^{12}$; determine:

a) El término que contiene x^{-3}
b) El término que contiene y^{12}
c) El término independiente de x.
d) El término independiente de y.

Ejercicio 6: Determine el término que contiene q^9 en los siguientes desarrollos:

a) $(2p + q)^{11}$ b) $\left(q - \frac{1}{pq}\right)^{10}$

c) $(p^2 - q^3)^7$ d) $\left(3q^5 - \frac{1}{q}\right)^3$

Ejercicio 7: Encuentre los 3 primeros términos en el desarrollo de: $\left(\sqrt{2}x + \sqrt{3}\right)^{10}$

Ejercicio 8: Calcula el producto de los coeficientes numéricos del primero y del último término del desarrollo ordenado de $(1 + 3x^2)^6$

Clave de Respuestas

1. e) $x^5 - 10x^4y + 40x^3y^2 - 80x^2y^3 + 80xy^4 - 32y^5$
   b) $1 + 21a + 189a^2 + 945a^3 + 2\,835a^4 + 5\,103a^5 + 5\,103a^6 + 2\,187a^7$

c) $1 - 11b + 55b^2 - 165b^3 + 330b^4 - 462b^5 + 462b^6 - 330b^7 + 165b^8 - 55b^9 + 11b^{10} - b^{11}$
d) $x^6 - 6x^4 + 15x^2 - 20 + 15/x^2 - 6/x^4 + 1/x^6$
e) $1/z^8 + 4/z^4 + 6 + 4z^4 + z^8$
f) $\frac{729}{x^{24}} - \frac{729}{2x^{17}} + \frac{1\,215}{16x^{10}} - \frac{135}{16x^3} + \frac{135}{256}x^4 - \frac{9}{512}x^{11} + \frac{x^{18}}{4\,096}$

2. a) $T_7 = 462x^5y^6$ b) $T_5 = 5\,985a^{17}b^4$ c) $T_{10} = -10/ab^9$
d) $T_8 = -128/x^7y^{14}$ e) $T_{11} = b^{10}$ f) $T_2 = -4/xyz$

3. a) -32 b) 19 440 c) 45 d) -5.12^4 e) - 3432 f) 1 120

4. a) -90 b) $T_3 = 270x^4$ c) No existe

5. a) $T_8 = -\binom{12}{7} 3^7 \cdot 2^5 \cdot x^{-3} y^{16}$ b) $T_7 = \binom{12}{6} 2^6 \cdot 3^6 \cdot x^{-6} y^{12}$
c) $T_9 = \binom{12}{8} 2^4 \cdot 3^8 \cdot y^{20}$ d) $T_4 = -\binom{12}{3} 2^9 \cdot 3^3 \cdot x^{-15}$

6. a) $T_{10} = 220p^2q^9$ b) No hay c) $T_4 = -\binom{7}{3} p^8 q^9$ d) $T_2 = -27q^9$

7. $32x^{10} + 160\sqrt{6}x^9 + 2\,160x^8$ 8. 729

NIVEL II

Ejercicio 1: El último término en el desarrollo de: $(x - 3y)^5$ es:

A) $-15y^5$ B) $15y^5$ C) $243y^5$
D) $-243y^5$ E) $-243xy^5$

Ejercicio 2: El coeficiente numérico del 8º término del desarrollo de $(2 - x)^{11}$ es:

A) 330 B) -330 C) 5 280
D) -5 280 E) Otro valor

Ejercicio 3: El coeficiente numérico del 2º término en el desarrollo de $(2a + b)^5$ es:

A) 16 B) 32 C) 80 D) 10 E) 50

Ejercicio 4: El término central en el desarrollo de $\left(3x - \frac{y}{2}\right)^7$ es:

A) $\frac{2\,835}{8}x^4y^3$ B) $\frac{-2\,835}{8}x^4y^3$ C) $\frac{945}{16}x^3y^4$
D) $\frac{-945}{16}x^3y^4$ E) No hay término central

Ejercicio 5: El término central en el desarrollo de: $(2x - y)^6$ es:

A) $-60x^2y^4$ B) $60x^2y^4$ C) $160x^3y^3$
D) $-160x^3y^3$ E) No hay término central

Ejercicio 6: El término independiente de "x"

en el desarrollo de: $\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^4$ es el:

A) 2º término B) 3º término
C) 4º término D) último término
E) No hay término independiente de "x"

Ejercicio 7: Halla el valor de "x" de tal manera que el cociente del 3º y 5º término en el desarrollo de: $(2x-1)^5$ sea igual a 72.

A) $x=\pm 2$ B) $x=\pm 4$ C) $x=\pm 3$
D) $x=\pm 5$ E) $x=\pm 6$

Ejercicio 8: Qué valor debe tener "n" para que el cuarto término del desarrollo de: $\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{x}{2}\right)^n$; sea el término independiente: citar el coeficiente del término que sigue al término de grado cero.

A) 25/4 B) 15/2 C) 15/4 D) 24/5 E) 25/2

Ejercicio 9: Hallar el término anterior al independiente de "x" en el desarrollo del siguiente binomio de Newtón:

$$\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2}+\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{13}$$

A) $\dfrac{715}{16}x^{13/15}$ B) $\dfrac{453}{15}x^{15/13}$ C) $720\,x^{1/2}$
D) $360x^{1/4}$ E) $485x^3$

Ejercicio 10: Qué lugar ocupa el término del desarrollo binomial de: $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{120}$ que es de grado 100.

A) 15 B) 14 C) 13 D) 12 E) 11

Ejercicio 11: El término independiente de "x" en el desarrollo de: $\left(0{,}4x^2+\dfrac{0{,}5}{x}\right)^9$ es:

A) 0,01 B) 0,001 C) 0,084 D) 0,0084 E) 0,018

Ejercicio 12: Hállese la relación entre "K" y "n" de modo que los coeficientes de los (K + 2) ésimo y (2K - 3) ésimo términos de: $(1+x)^{3n}$ puedan ser iguales.

A) K = n + 1 B) K = 2n + 3 C) 3K = 3n + 2
D) K = n - 1 E) 3K = 3n - 2

Clave de Respuestas

1. D	2. D	3. C	4. E
5. D	6. E	7. C	8. C
9. A	10. E	11. C	12. A

EJERCICIOS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Organizados por las Academias:
César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

Ejercicio 1: Calcular el 6º término en el desarrollo de: $(a+2b)^{11}$

A) $14\,784a^5b^6$ B) $14\,784a^6b^5$ C) $14\,874a^6b^5$ D) $14\,478a^6b^6$ E) N.A.

Resolución:

Sabemos que: $n=11$ **...(Exponente del binomio)**

$(K + 1) = 6$ ...(Lugar del término pedido)

$\therefore \quad K = 5$

Luego, los valores hallados, los reemplazamos en la fórmula:

$$T_{K+1} = \binom{n}{k} x^{n-K} \cdot a^{K} \Rightarrow T_6 = \binom{11}{5} (a)^{11-5} \cdot (2b)^5$$

$$T_6 = \frac{11!}{6! \times 5!} a^6 \left(32b^5\right)$$

$$T_6 = \frac{\cancel{6!} \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11}{\cancel{6!} \times 120} \cdot a^6 \left(32b^5\right)$$

$$\therefore \; T_6 = 14\;784 a^6 b^5 \quad \textbf{Rpta. B}$$

Ejercicio 2: Cuál es el coeficiene de x^{14} en el desarrollo de $(x^2 + x^3)^6$.

A) 12 B) 18 C) 15 D) 21 E) 24

Resolución:

Sabemos que: $n = 6$ **...(Exponente del binomio)**
$(K + 1) = ?$ **... (Lugar del término pedido)**

Luego, aplicamos la fórmula: $T_{K+1} = \binom{n}{K} x^{n-K} \cdot a^{K} \Rightarrow T_{K+1} = \binom{6}{K} \left(x^2\right)^{6-K} \cdot \left(x^3\right)^{K}$

$$T_{K+1} = \binom{6}{K} x^{12-2K} \cdot x^{3K}$$

$$T_{K+1} = \binom{6}{K} x^{K+12}$$; queremos

el coeficiente de x^{14}; es decir, debemos igualar exponentes:

$$x^{K+12} = x^{14} \Rightarrow K+12 = 14 \Rightarrow \therefore K = 2$$

- Ahora, hallamos el coeficiente de x^{14}; osea:

$$\binom{6}{K} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{4! \times 2!} = \frac{\cancel{4!} \times 5 \times 6}{\cancel{4!} \times 2} = 15 \quad \textbf{Rpta. C}$$

Ejercicio 3: Determinar el exponente de "x" en el 8º término del desarrollo de: $\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^{10}$

A) 5 B) 6 C) -8 D) -5 E) -7

Resolución:

Sabemos que: $n = 10$ **...(Exponente del binomio)**

$K + 1 = 8$ **...(Lugar del término pedido)**

$\therefore$ $K = 7$

Luego los valores, hallamos los reemplazamos en la fórmula:

$$T_{K+1} = \binom{n}{K} x^{n-K} \, a^K \Rightarrow T_8 = \binom{10}{7} \left(x^3\right)^{10-7} \left(\frac{1}{x^2}\right)^7$$

$$T_8 = \binom{10}{7} x^9 \cdot x^{-14}$$

$$T_8 = \frac{10!}{7! \times 3!} \cdot x^{-5} \Rightarrow T_8 = 120x^{-5}$$

$\therefore$ El exponente de "x" en el 8º término es: -5 **Rpta. D**

Ejercicio 4: Determinar el término independiente de "x" en el desarrollo de: $\left(\frac{1}{x^2} - x^4\right)^6$

A) 8 B) 10 C) 15 D) -10 E) 14

Resolución:

Sabemos que: $n = 6$ **...(Exponente del binomio)**

$K + 1 = ?$ **... (Lugar del término pedido)**

Luego, aplicamos la fórmula: $T_{K+1} = \binom{n}{K} x^{n-K} \cdot a^K \Rightarrow T_{K+1} = \binom{6}{K} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{6-K} \left(-x^4\right)^K$

$$T_{K+1} = \binom{6}{K} \left(x^{-2}\right)^{6-K} \cdot (-1)^K \left(x^4\right)^K$$

$$T_{K+1} = \binom{6}{K} x^{2K-12} \cdot (-1)^K \cdot \left(x^{4K}\right)$$

$$T_{K+1} = \binom{6}{K} x^{6K-12} \cdot (-1)^K \quad \text{... (I)}$$

; para que el término sea independiente de "x" es necesario que el exponente de "x" sea igual a 0.

Es decir: $6K - 12 = 0 \Rightarrow 6K = 12 \Rightarrow \therefore K = 2$

Luego, reemplazamos el valor de K = 2; en (I):

$$T_3 = \binom{6}{2} x^{6(2)-12} \cdot (-1)^2 \Rightarrow T_3 = \frac{6!}{4! \times 2!} x^0 \cdot (1)$$

$$T_3 = \frac{4! \times 5 \times 6}{4! \times 2} \Rightarrow T_3 = 15$$

∴ El término independiente de "x" en el desarrollo es el 3º término y es igual a 15 **Rpta. C**

Ejercicio 5: En el desarrollo de $P(x) = (x + 1)^{43}$ los coeficientes de los términos de los lugares (2n + 1) y (2 + n) son iguales. Calcule "n", sabiendo que es mayor que 2.

A) 10 **B)** 12 **C)** 14 **D)** 11 **E)** 13

Resolución:

Sabemos que: n = 43 **...(Exponente del binomio)**

- Aplicando la fórmula; obtenemos:

$$T_{K+1} = \binom{n}{K} x^{n-K} \cdot a^K \qquad T_{K+1} = \binom{n}{K} x^{n-K} \cdot a^K$$

$$T_{2n+1} = \binom{43}{2n} x^{43-2n} \cdot (1)^{2n} \quad \text{... (I)} \qquad T_{2+n} = \binom{43}{n+1} x^{43-(n+1)} \cdot (1)^{n+1} \quad \text{... (II)}$$

coeficiente *coeficiente*

- De acuerdo al enunciado; igualamos los coeficientes: $\binom{43}{2n} = \binom{43}{n+1}$

Donde: $$\frac{43!}{(43-2n)!\,(2n)!} = \frac{43!}{[43-(n+1)]!\,(n+1)!}$$

Por comparación de numeradores y denominadores:

I) $43 - 2n = n + 1 \Rightarrow 42 = 3n \Rightarrow \therefore n = 14$

II) $2n = 43 - (n + 1) \Rightarrow 3n = 42 \Rightarrow \therefore n = 14$ **Rpta. C**

Ejercicio 6: Obtener el cociente de los términos centrales de: $\left(\frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}}}{y} + \frac{\sqrt[3]{\sqrt{y}}}{x}\right)^{11}$

A) $\left(\frac{x}{y}\right)^{6}$ B) $\left(\frac{x}{y}\right)^{7}$ C) $\left(\frac{x}{y}\right)^{6/7}$ D) $\left(\frac{x}{y}\right)^{7/6}$ E) x/y

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir de la manera siguiente:

$$\left(\frac{\sqrt[6]{x}}{y}+\frac{\sqrt[6]{y}}{x}\right)^{11}$$; luego, los términos centrales son:

*) $T_6=\binom{11}{5}\left(\frac{\sqrt[6]{x}}{y}\right)^{11-5}\cdot\left(\frac{\sqrt[6]{y}}{x}\right)^{5}=\binom{11}{5}\left(\frac{\sqrt[6]{x}}{y}\right)^{6}\cdot\left(\frac{\sqrt[6]{y}}{x}\right)^{5}$ ... (I)

**) $T_7=\binom{11}{6}\left(\frac{\sqrt[6]{x}}{y}\right)^{11-6}\cdot\left(\frac{\sqrt[6]{x}}{x}\right)^{6}=\binom{11}{6}\left(\frac{\sqrt[6]{x}}{y}\right)^{5}\cdot\left(\frac{\sqrt[6]{y}}{x}\right)^{6}$ ... (II)

- Calculamos el cociente de los términos centrales:

$$\frac{T_6}{T_7}=\frac{\binom{11}{5}\left(\frac{\sqrt[6]{x}}{y}\right)^{6}\cdot\left(\frac{\sqrt[6]{y}}{x}\right)^{5}}{\binom{11}{6}\left(\frac{\sqrt[6]{x}}{y}\right)^{5}\cdot\left(\frac{\sqrt[6]{y}}{x}\right)^{6}}=\frac{\left(\frac{\sqrt[6]{x}}{y}\right)}{\left(\frac{\sqrt[6]{y}}{x}\right)}=\frac{x\sqrt[6]{x}}{y\sqrt[6]{y}}$$

Recuerda que:

$\binom{11}{6}$ es igual a $\binom{11}{5}$ ¿Por qué?

$$\frac{T_6}{T_7}=\frac{\sqrt[6]{x^7}}{\sqrt[6]{y^7}}=\sqrt[6]{(x/y)^7}\Rightarrow\therefore\ \frac{T_6}{T_7}=\left(\frac{x}{y}\right)^{7/6}$$ **Rpta. D**

12.4 DESARROLLO DEL BINOMIO DE NEWTON CON EXPONENTE NEGATIVO Y/O FRACCIONARIO.

FINALIDAD: En el estudio, del desarrollo del binomio de Newton para exponente negativo y/o fraccionario, se utiliza el concepto de coeficiente binómico, que a diferencia del "número de combinaciones", el valor del índice superior puede tomar valores negativos y/o fraccionarios, mientras que el índice inferior siempre será positivo y entero.

Su representación y su valor es:

$$\binom{m}{K}=\frac{m(m-1)(m-2)......(m-K+1)}{K!}\quad ó\quad \binom{m}{K}=\frac{m(m-1)(m-2)......(m-K+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ ......\ K}$$

Ejemplos ilustrativos: Hallar:

¡ATENCIÓN!

Si : $\binom{m}{K}$

"m" : Índice superior

"K": Índice inferior

Además: $m \in Q$; $K \in Z^+$

a) $\binom{-5}{3} = \dfrac{(-5)\,(-5-1)\,(-5-2)}{3!} = \dfrac{(-5)(-6)(-7)}{1\cdot 2\cdot 3} = -35$

b) $\binom{-6}{4} = \dfrac{(-6)\,(-6-1)\,(-6-2)\,(-6-3)}{4!} = \dfrac{(-6)\,(-7)\,(-8)\,(-9)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 126$

c) $\binom{1/3}{5} = \dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)\left(\frac{1}{3}-4\right)}{5!} = \dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)\left(-\frac{11}{3}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = \dfrac{22}{729}$

d) $\binom{-1/2}{5} = \dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}-1\right)\left(\frac{-1}{2}-2\right)\left(\frac{-1}{2}-3\right)\left(\frac{-1}{2}-4\right)}{5!} = \dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{9}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = -\dfrac{63}{256}$

12.5 BINOMIO DE NEWTON PARA EXPONENTE FRACCIONARIO Y/O NEGATIVO.

Hemos visto, que en la fórmula del binomio ($n \in \mathbb{Z}^+$)

$$(x+a)^n = \binom{n}{o} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}\cdot a^1 + \binom{n}{2} x^{n-2}\cdot a^2 + \ldots\ldots + \binom{n}{n} a^n$$

Se observa: "cuando **"n"** es un número entero y positivo, tiene un número limitado de términos es decir "(n + 1)" términos:

Ahora: **Generalizando** para **"n"** igual a un número fraccionario y/o negativo ($n \in \mathbb{Q}$)

$$(x+a)^{-n} = x^{-n} + \binom{-n}{1} x^{-n-1}\cdot a^1 + \binom{-n}{2} x^{-n-2}\cdot a^2 + \binom{-n}{3} x^{-n-3}\cdot a^3 + \ldots\ldots \infty \text{ Términos}$$

Es una serie que tiene un número ilimitado de términos, es decir, infinitos términos, válida para todo valor de: $x > a$.

Ejemplo ilustrativo (1): Hallar los cuatro primeros términos del desarrollo de: $(1 + x)^{-2} = ?$

Resolución:

$$(1+x)^{-2} = 1^{-2} + \binom{-2}{1} 1^{-2-1}\cdot x + \binom{-2}{2} 1^{-2-2}\cdot x^2 + \binom{-2}{3} 1^{-2-3}\cdot x^3 + \ldots$$

$$= 1 + (-2)1^{-3}\, x + \frac{(-2)(-3)}{2!}\, 1^{-4}\, x^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}\, 1^{-5}\, x^3 + \ldots$$

$$= 1 - 2x + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} x^2 - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots$$

$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots$$

$$\therefore \quad (1 + x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots\ldots\ldots$$

Ejemplo ilustrativo (2) : Hallar los cinco primeros términos del desarrollo de: $(1 + x)^{1/5}$

Resolución:

$$(1+x)^{1/5} = 1^{1/5} + \binom{1/5}{1} \cdot 1^{\frac{1}{5}-1} \cdot x + \binom{1/5}{2} \cdot 1^{\frac{1}{5}-2} \cdot x^2 + \binom{1/5}{3} \cdot 1^{\frac{1}{5}-3} \cdot x^3 + \binom{1/5}{4} \cdot 1^{\frac{1}{5}-4} \cdot x^4 + \ldots$$

Desarrollando cada coeficiente; obtenemos:

$$= 1 + \frac{1}{5}x + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{9}{5}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{9}{5}\right)\left(-\frac{14}{5}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \ldots$$

$$\therefore \quad (1+x)^{1/5} = 1 + \frac{1}{5}x - \frac{2}{25}x^2 + \frac{6}{125}x^3 - \frac{21}{625}x^4 + \ldots$$

Ejemplo ilustrativo (3): Hallar los cuatro primeros términos del desarrollo de: $(1 - x)^{-1/3}$.

Resolución:

$$(1-x)^{-1/3} = [1+(-x)]^{-1/3}$$

$$= 1^{-1/3} + \binom{-1/3}{1} \cdot 1^{-\frac{1}{3}-1} \cdot (-x) + \binom{-1/3}{2} \cdot 1^{-\frac{1}{3}-2} \cdot (-x)^2 + \binom{-1/3}{3} \cdot 1^{-\frac{1}{3}-3} \cdot (-x)^3 + \ldots$$

Desarrollando cada coeficiente; obtenemos:

$$= 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)(-x) + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)}{1 \cdot 2} \cdot (-x)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot (-x)^3 + \ldots$$

$$\therefore \quad (1-x)^{-1/3} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 + \frac{14}{81}x^3 + \ldots$$

12.5.1 PROPIEDADES DEL DESARROLLO DEL BINOMIO:

1. Al obtener los términos del desarrollo se observa que es una serie infinita, denominada serie binómica o serie de Newton.

2. Para determinar el desarrollo de $(x + a)^n$ para un número fraccionario y/o negativo el valor de "x" debe ser uno y además $x > a$. Los valores de "a" deben ser: $0 < a < 1$.

   Si: $(1 + a)^{1/n}$; $0 < a < 1$

3. Los términos del desarrollo con respecto a sus signos, no tienen ninguna relación.

4. Para determinar el término general en el desarrollo se utiliza la siguiente fórmula. Sea el binomio $(x + a)^n$ donde "n" es un número fraccionario y/o negativo:

   $$T_{K+1} = \binom{n}{K} x^{n-K} \cdot a^K$$

   Donde:
   T_{K+1} : Es el término de lugar : "K + 1"
   n : Es el exponente fraccionario y/o negativo del binomio.
   K + 1 : Es el lugar del término pedido
   x : Es el primer término
   a : Es el segundo término

Ejemplo ilustrativo: Hallar el sétimo término del desarrollo de: $\left(\sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^{-3}$; $x \neq 1$; 0

Resolución:

- Para determinar un término "K + 1", se utiliza la siguiente fórmula:

$$T_{K+1} = \binom{n}{K} x^{n-K} \cdot a^K \Rightarrow T_7 = \binom{-3}{6} \left(\sqrt[3]{x}\right)^{-3-6} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^6$$

$$T_7 = \frac{(-3)\,(-4)\,(-5)\,(-6)\,(-7)\,(-8)}{6!} \cdot \left(\sqrt[3]{x}\right)^{-9} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^6}$$

$$T_7 = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{6} \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{6}} \cdot \sqrt[3]{x^{-9}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^{12}}} = 28 \cdot \frac{x^{-3}}{x^4}$$

$$\therefore \quad T_7 = \frac{28}{x^7}$$ ***Rpta.***

TALLER DE EJERCICIOS Nº 38

Ejercicio 1 : Hallar: $\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$

Resolución:

Rpta. -84

Ejercicio 3 : Hallar los tres primeros términos del desarrollo de: $(1 + x)^{-3}$

Resolución:

Rpta. $1 - 3x + 6x^2$

Ejercicio 2 : Hallar: $\begin{pmatrix} -1/3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Resolución:

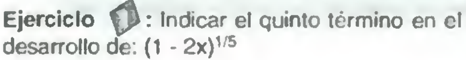
Rpta. 25/243

Ejercicio 4 : Hallar los tres primeros términos del desarrollo de: $(1 + x)^{1/3}$

Resolución:

Rpta. $1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \ldots$

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE BINOMIO DE NEWTON CON EXPONENTE NEGATIVO Y/O FRACCIONARIO



Ejercicio 1: Indicar el quinto término en el desarrollo de: $(1 - 2x)^{1/5}$

A) $\frac{226}{625}x^4$ **B)** $-\frac{137}{125}x^4$ **C)** $-\frac{336}{625}x^4$

D) $-16x^4$ **E)** $\frac{336}{125}x^4$

Ejercicio 2: Hallar el cuarto término del desarrollo de: $\left(\frac{1}{4} + x^{1/3}\right)^{1/2}$

A) $-1/2x^{4/3}$ **B)** $2x$ **C)** $12x$ **D)** $6/5x^{2/3}$ **E)** $2x^2$

Ejercicio 3: Calcule: $E = \binom{-3}{33}$

A) 195 **B)** -195 **C)** 595 **D)** -595 **E)** 0

Ejercicio 4: Hallar el equivalente de:

$$E = \binom{-15}{3} + \binom{-15}{4} + \binom{-15}{5}$$

A) -9 248 **B)** 5 298 **C)** -2948
D) 4 928 **E)** -8 924

Ejercicio 5: Hallar el tercer término de:

$\left(x^2 - 3\right)^{1/2}$; para: $x = 3$

A) $(-42)^{-1}$ **B)** -9 **C)** -1/9
D) 32 **E)** $(-24)^{-1}$

Ejercicio 6: Hallar el término independiente en: $\left(\frac{1}{2}x^{-3} - \sqrt{x^{-9}}\right)^{-2}$

A) 230 **B)** 320 **C)** -510
D) 245 **E)** -340

Clave de Respuestas

1. C	2. B	3. D
4. A	5. E	6. B

LA DISTANCIA A UNA ESTRELLA

Estamos ahora en condiciones de solucionar el problema planteado.

Conocidos los ángulos A y A' (y por lo tanto el E) y el valor de TT', podemos usar el teorema del seno para calcular la distancia ET.

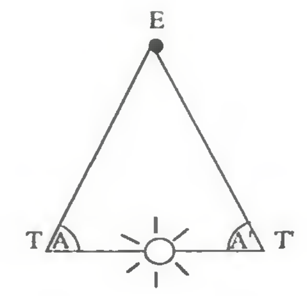
$$\frac{ET}{\text{sen } A'} = \frac{TT'}{\text{sen } E}$$

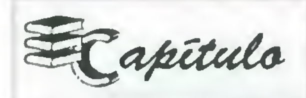
y de aquí $ET = \frac{TT'}{\text{sen } E} \text{ sen } A'$

Cuando se empezó a poner en práctica este método, hace dos siglos, no se podía detectar alguna diferencia entre los ángulos A y A': los dos eran prácticamente de 90°, como si las estrellas estuviesen a una distancia infinita. Esto se debía a que las distancias a las estrellas son mucho más grandes que el diámetro de la órbita terrestre y, por esto, los ángulos A y A' difieren de 90° en una fracción de segundo.

En astronomía existen otros métodos indirectos para determinar las distancias de estrellas muy lejanas.

La estrella más cercana, Próxima Centauri, se encuentra a una distancia de 135,000 veces el diámetro TT'.





Capítulo 13 LOGARITMOS

13.1 LOGARITMO DE UN NÚMERO

A partir de la expresión: $b^n = p$, podemos plantear distintas ecuaciones, dependiendo de cuál de sus tres elementos es el desconocido.

$$b^n = p$$

Se desconoce el valor de la potencia (p)

Si: **p = x**, entonces se tiene la ecuación $x = b^n$. Esto implica el cálculo del valor de una potencia, operación que se denomina **potenciación.**

El valor de "**x**", es la **enésima potencia de b.**

$$x = b^n$$

Ejemplo: $x = 5^2 = 25$

¡ATENCIÓN!

La operación potenciación no es conmutativa, porque en General.

$$b^n \neq n^b$$

Se desconoce la base (b) de la potencia.

*Si: **b = x**; Entonces se tiene la Ecuación:* $x^n = p$

*Esto implica el Cálculo de una raíz enésima, operación que se denomina **radicación.***

*El valor de "**x**", es la **raíz enésima de p.***

$$x^n = p \iff x = \sqrt[n]{p}$$

Ejemplo:

$$x^3 = 8 \iff x = \sqrt[3]{8} = 2$$

*Se desconoce el valor del **Exponente (n).** de la potencia.*

*Si: **n = x**, entonces se tiene la Ecuación Exponencial* $b^x = p$. *Esto implica calcular el exponente de una potencia conocida su base y su valor, operación que se denomina **Logaritmación.***

*Este exponente **x** es el **Logaritmo de "p" en base "b"**, lo que en símbolos se representa:* $\log_b p$

$$x = \log_b p \Rightarrow b^x = p$$

Ejemplo: $x = \log_2 16 \Rightarrow 2^x = 16$

$2^x = 2^4$

$x = 4.$

- Por lo tanto,afirmamos que:

El logaritmo es el exponente de una potencia.

DEFINICION:

Se llama logaritmo en base **b** de un número **p** a otro número **x**,tal que, b elevado a **x** sea igual a **p**.

Ejemplos:

a) $\log_2 8 = 3$; pues : $2^3 = 8$

b) $\log_3 81 = 4$; pues : $3^4 = 81$

c) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$; pues : $3^{-2} = \frac{1}{9}$

d) $\log_5 5 = 1$; pues : $5^1 = 5$

e) $\log_{-2} (-8) = 3$; pues : $(-2)^3 = -8$

f) $\log_{-2} 4 = 2$; pues : $(-2)^2 = 4$

CASOS PARTICULARES:

1. El logaritmo de la base es 1.

   $\log_b b = 1$; pues : $b^1 = b$

2. El logaritmo de 1 en cualquier base es cero.

   $\log_b 1 = 0$; pues : $b^0 = 1$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 39

Ejercicio 1 : Calcula los siguientes logaritmos aplicando la definición:

a) $Log_2 64 =$ b) $Log_2 1/4 =$

c) $Log_5 125 =$ d) $Log_{1/2} 4 =$

Resolución:

Ejercicio 2 : Calcula los siguientes logaritmos aplicando la definición:

a) $Log_{-3} 1/9 =$ b) $Log_{-3} 81 =$

c) $Log_3 1 =$ d) $Log_{-1/2}(-1/2) =$

Resolución:

Ejercicio 3 : Calcula los siguientes logaritmos aplicando la definición:

a) $Log_{-2}(-32) =$ b) $Log_8 8 =$

c) $Log_{-5} 25 =$ d) $Log_4 2 =$

Resolución:

Ejercicio 4 : Calcula los siguientes logaritmos aplicando la definición:

a) $Log_{16} 8 =$ b) $Log_{0,7} 0,49 =$

c) $Log_{4/3} 9/16 =$ d) $Log_{64} 16 =$

Resolución:

- Calculemos "x" en cada una de las siguientes expresiones:

a) $Log_2 64 = x$	**b)** $Log_x 243 = 5$
Resolución:	***Resolución:***
. Por definición de logaritmo:	.Por Definición de logaritmo:
$2^x = 64$	$x^5 = 243$
$2^x = 2^6 \Rightarrow \therefore x = 6$	$x^5 = 3^5 \Rightarrow \therefore x = 3$

- En la expresión: $b^x = p \Leftrightarrow x = Log_b p$, el número **p** recibe el nombre de **antilogaritmo.**

Ejemplos: Encontremos el antilogaritmo **p** en cada uno de los siguientes casos:

a) $Log_3 p = 5$	**b)** $Log_{25} p = 3/2$
Resolución:	***Resolución:***
• Por definición de logaritmo:	• Por definición de logaritmo:
$3^5 = p$	$25^{3/2} = p$
$\therefore 243 = p$	$\left(5^2\right)^{3/2} = p \Rightarrow \therefore 125 = p$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 40

Ejercicio 1 : Halla el Antilogaritmo **"x"** en cada uno de los siguientes casos:	**Ejercicio 2** : Hallar el antilogaritmo **"x"** en cada uno de los siguientes casos:
a) $Log_{0,3} x = 2$ **b)** $Log_{1/7} x = 4$	**a)** $Log_{2/3} x = -2$ **b)** $Log_{0,004} x = 3$
Resolución:	***Resolución:***

12.1.1 PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS:

1ra. PROPIEDAD: La Logaritmación no es Cerrada en IR.

Veamos los siguientes casos:

a) **Logaritmo de un número negativo y base positiva.**

Ejemplo: $\log_2(-4) = n \Rightarrow 2^n = -4$

Como toda potencia de un número positivo es positiva,ningún valor de n cumple esta condición.

Es decir: $\text{Log}_2(-4)$ **es imposible en IR.**

En consecuencia, no siempre es posible obtener el logartimo de un número negativo.

b) **Logaritmo de cero.**

Ejemplo: $\log_5 0 = n \Rightarrow 5^n = 0$

Ninguna potencia de 5 es Cero.

Es decir: $\text{Log}_5 0$ **es imposible.**

Generalizando: $\text{Log}_b 0$ es imposible para: $b \neq 0$

PIENSA: ¿Qué ocurre si: b = 0? $\Rightarrow$ $\text{Log}_0 0 =$ ....

c) **Logaritmo en base 1.**

Ejemplo: $\log_1 5 = n \Rightarrow 1^n = 5$

Como toda potencia de base 1 es igual a 1,ningún valor de n satisface esta condición.

Es decir: $\text{Log}_1 5$ **es imposible**

Generalizando: $\text{Log}_1 p$ **es imposible** para $p \neq 1$

PIENSA: ¿Qué ocurre si: p = 1? $\Rightarrow$ $\text{Log}_1 1 = \ldots$

Con los ejemplos dados habrás podido observar que:

La logaritmación de números positivos y base positiva distinta de 1 siempre es posible.

En consecuencia, de ahora en adelante nos ocuparemos de analizar las propiedades de los logaritmos de números positivos y base positiva distinta de 1.La logaritmación es cerrada en IR^+ (para: $b \neq 1$)

2da. PROPIEDAD: **La Logaritmación es Uniforme**

Ejemplo: $\text{Log}_4 64 = n \Rightarrow 4^n = 64$

El logaritmo de un número positivo **es único.**

En símbolos: $x = y \Rightarrow \text{Log}_b x = \log_b y$

3ra. PROPIEDAD: **Ley Cancelativa:** $\text{Log}_b x = \text{Log}_b y \Rightarrow x = y$

Ejemplo: $\text{Log}_3 x = \log_3 81 \Rightarrow x = 81$

4ta. PROPIEDAD: **Logaritmo de un Producto**

Sea por ejemplo: $\text{Log}_2 (4 \cdot 8) = \text{Log}_2 32 = 5$; pues : $2^5 = 32$

*) $\text{Log}_2 4 = 2$; pues : $2^2 = 4$; **) $\text{Log}_2 8 = 3$; pues : $2^3 = 8$

Observa: $\text{Log}_2 (4 \cdot 8) = \text{Log}_2 4 + \text{Log}_2 8$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$5 = 2 + 3$$

PROPIEDAD: El Logaritmo de un producto,en base **b**,es igual a la suma de los Logaritmos de los Factores en la misma base.

En Símbolos: $\text{Log}_b(x \cdot y) = \text{Log}_b x + \text{Log}_b y$

Demostración:

Sea: $\text{Log}_b(x \cdot y)$

Designemos "m" y "n" a los respectivos Logaritmos de **"x"** e **"y"** en base b.

$\text{Log}_b x = m \Rightarrow b^m = x$ ...(1) **(Por definición)**

$\text{Log}_b y = n \Rightarrow b^n = y$ ...(2) **(Por definición)**

Multiplicamos miembro a miembro (1) y (2) ;Obteniendo:

$b^m \cdot b^n = x \cdot y \Rightarrow b^{m+n} = x \cdot y$; **por definición de logaritmo:** $\text{Log}_b(x \cdot y) = m + n$

Sustituyendo m y n; queda: $\text{Log}_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$

5ta. PROPIEDAD: **Logaritmo de un Cociente**

Sea por Ejemplo: $\text{Log}_2\left(\dfrac{32}{2}\right) = \text{Log}_2(16) = 4$; pues : $2^4 = 16$

*) $\text{Log}_2 32 = 5$; pues : $2^5 = 32$; **) $\text{Log}_2 2 = 1$; pues : $2^1 = 2$

Observa: $\text{Log}_2\left(\dfrac{32}{2}\right) = \text{Log}_2 32 - \text{Log}_2 2$

$$4 = 5 - 1$$

PROPIEDAD: El Logaritmo de un cociente, en base **b**, es igual a la diferencia entre los logaritmos del dividendo y del divisor en la misma base.

En símbolos: $\text{Log}_b(x/y) = \text{Log}x - \text{Log}y$

* Demuestre la propiedad tomando como modelo la demostración de la propiedad anterior.

6ta. PROPIEDAD: **Logaritmo de una Potencia**

Sea por Ejemplo: $\text{Log}_2 4^3 = \text{Log}_2 64 = 6$; pues: $2^6 = 64$

*) $\text{Log}_2 4 = 2$; pues: $2^2 = 4$

Observa: $\text{Log}_2 4^3 = 3 \cdot \text{Log}_2 4$

$$6 = 3 \cdot 2$$

PROPIEDAD: El Logaritmo de base **b** de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo en base **b** de la base de la Potencia. $\text{Log}_b a^n = n \cdot \text{Log}_b a$

Demostración:

$\text{Log}_b a^n = x \Rightarrow b^x = a^n$ **... por definición**

Hacemos:

$\text{Log}_b a = y \Rightarrow b^y = a$ **... por definición**

Elevamos a la **"n"** ambos miembros de la última igualdad.

$\left(b^y\right)^n = a^n \Rightarrow b^{yn} = a^n$ **; por potencia de potencia.**

Aplicando la definición de logaritmo en base **b**,en esta última expresión, obtenemos que:

$$\text{Log}_b a^n = y \cdot n \text{ ; pero : } y = \text{Log}_b a \text{ ; sustituyendo,}$$

Queda: $\text{Log}_b a^n = n \cdot \text{Log}_b a$

7ma. PROPIEDAD: Logaritmo de una Raíz

El Logaritmo de una raiz puede reducirse al caso anterior teniendo en cuenta que un radical puede expresarse como una potencia de exponente fraccionario.

$$\text{Log}_b \sqrt[n]{x} = \text{Log}_b x^{1/n} = \frac{1}{n} \cdot \text{Log}_b x$$

$$\therefore \quad \text{Log}_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \text{Log}_b x$$

PROPIEDAD:

El Logaritmo de una raiz,en base **b**,es igual al Logaritmo del radicando,en la misma base,dividido por el índice de la raiz.

8va. PROPIEDAD: El Logaritmo de "N" en base "b" se escribe usualmente: $\text{Log}_b N$, de manera que son equivalentes las dos ecuaciones siguientes:

$\text{Log}_b N = x$ ...(1) Donde: $N = b^x$ ...(2)

Reemplazamos (2) en (1): $\text{Log}_b b^x = x$ (Logaritmo de una Potencia cuya base es la base del logaritmo, es el exponente)

Ejemplos:

a) $\text{Log}_2 16 = \text{Log}_2 2^4 = 4$

b) $\text{Log}_a a^5 = 5$

c) $\text{Log}_a a^5 = 5$

d) $\text{Log}_x \sqrt{x} = \text{Log}_x x^{1/2} = 1/2$

9na. PROPIEDAD: La potencia cuyo exponente es el logaritmo de base igual al de la potencia es el número así: $b^{\log_b N} = N$

Demostración:

Hacemos que: $b^x = N$ ....(I)

Tomamos "Log_b" a ambos miembros: $\text{Log}_b b^x = \text{Log}_b N$

Donde: $x = \text{Log}_b N$ ... (II)

Reemplazamos (II)en(I):

$$\therefore \quad b^{\log_b N} = N$$

10ma. PROPIEDAD: El logaritmo de "N" en base "b" es igual al logaritmo del inverso de "N" en la base inversa de "b" así:

Demostración:

Sabemos que: $b^{\log_b N} = N$; elevamos ambos miembros al exponente -1

$$\left(b^{\log_b N}\right)^{-1} = N^{-1} \Rightarrow \left(b^{-1}\right)^{\log_b N} = \frac{1}{N}$$

$$\left(\frac{1}{b}\right)^{\log_b N} = \frac{1}{N}$$; tomamos "$\text{Log}_{1/b}$" a ambos miembros:

$$\text{Log}_{1/b}\left(\frac{1}{b}\right)^{\log_b N} = \text{Log}_{1/b}\frac{1}{N} \Rightarrow \therefore \quad \text{Log}_b N = \text{Log}_{1/b}\frac{1}{N}$$

11va. PROPIEDAD: **Cambio de Base:** El Logaritmo de un número "N" en base "b" es igual a una fracción cuyo numerador es el Logaritmo de N en una base "a", y cuyo denominador es el Logaritmo de "b", en la misma base "a", así:

$$\text{Log}_b N = \frac{\text{Log}_a N}{\text{Log}_a b}$$

Demostración:

Sabemos que: $b^{\log_b N} = N$;Tomamos "Log_a" a ambos miembros.

$$\text{Log}_a b^{\log_b N} = \text{Log}_a N$$;Aplicamos la propiedad: $\text{Log}_b a^n = n \cdot \text{Log}_b a$

$$\text{Log}_b N \cdot \text{Log}_a b = \text{Log}_a N \Rightarrow \therefore \quad \text{Log}_b N = \frac{\text{Log}_a N}{\text{Log}_a b}$$

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE LOGARITMOS

Ejercicio 1. Reducir: $M = 5\log_6 36 - 2\log_{27} 1/9 + 3\log_8 32$

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir de la manera siguiente:

$$M = 5\log_6 6^2 - 2\,\text{Log}_{3^3} 3^{-2} + 3\,\text{Log}_{2^3} 2^5$$

$$M = 5 \cdot 2 - 2\left(-\frac{2}{3}\right) + 3\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$M = 10 + \frac{4}{3} + \frac{15}{3} \Rightarrow \therefore \boxed{M = \frac{49}{3}}$$ ***Rpta.***

- Aplicamos las Propiedades:
  - $\text{Log}_{a^n} a^m = \frac{m}{n}$
  - $\text{Log}_b b^n = n$

OTRA FORMA: Reducir: $M = 5\log_6 36 - 2\log_{27} 1/9 + 3\log_8 32$

Resolución:

- Aplicando la **propiedad cambio de base**, obtenemos:

$$M = 5\left(\frac{\text{Log } 36}{\text{Log } 6}\right) - 2\left(\frac{\text{Log } 1/9}{\text{Log } 27}\right) + 3\left(\frac{\text{Log } 32}{\text{Log } 8}\right)$$

$$M = 5\left(\frac{\text{Log } 6^2}{\text{Log } 6}\right) - 2\left(\frac{\text{Log } 3^{-2}}{\text{Log } 3^3}\right) + 3\left(\frac{\text{Log } 2^5}{\text{Log } 2^3}\right)$$

$$M = 5\left(\frac{2\,\cancel{\text{Log } 6}}{\cancel{\text{Log } 6}}\right) - 2\left(\frac{-2\,\cancel{\text{Log } 3}}{3\,\cancel{\text{Log } 3}}\right) + 3\left(\frac{5\,\cancel{\text{Log } 2}}{3\,\cancel{\text{Log } 2}}\right)$$

$$M = 10 + \frac{4}{3} + \frac{15}{3} \Rightarrow \therefore \boxed{M = \frac{49}{3}}$$ ***Rpta.***

Ejercicio 2: Reducir: $R = 2\,\text{Log}_3 a^4 - \text{Log}_3 \sqrt[3]{a} + 4\,\text{Log}_3 b - 2\,\text{Log}_3 b^2$

Resolución:

- En primer lugar aplicamos **la propiedad:** $n\text{Log}_b a = \text{Log}_b a^n$

$$R = \text{Log}_3 a^{4\cdot 2} - \text{Log}_3 \sqrt[3]{a} + \text{Log}_3 b^4 - \text{Log}_3 b^{2\cdot 2}$$

$$R = \text{Log}_3 a^8 - \text{Log}_3 \sqrt[3]{a} + \cancel{\text{Log}_3 b^4} - \cancel{\text{Log}_3 b^4}$$

- En segundo lugar aplicamos **la propiedad:** $\text{Log}_b x - \log_b y = \text{Log}_b (x/y)$

$$R = \text{Log}_3\left(\frac{a^8}{\sqrt[3]{a}}\right) = \text{Log}_3 a^8 \cdot a^{-1/3} = \text{Log}_3 a^{8-\frac{1}{3}} = \text{Log}_3 a^{23/3}$$

$$\therefore \boxed{R = \frac{23}{3}\text{Log}_3 a}$$ ***Rpta.***

Ejercicio 3: Reducir: $M = \text{Log}_{81} 1/3 + 5\,\text{Log}_7 1 + 6\,\text{Log}_{\sqrt[3]{2}} 8$

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir de la manera siguiente:

$$M = \text{Log}_{3^4} 3^{-1} + 5\,\text{Log}_7 7^0 + 6\,\text{Log}_{2^{1/3}} 2^3$$

$$M = -\frac{1}{4} + 5\,(0) + 6\left(\frac{3}{1/3}\right)$$

$$M = -\frac{1}{4} + 0 + 6\,(9) \Rightarrow \therefore \boxed{M = \frac{215}{4}}$$ ***Rpta.***

Recuerda que:

- $\text{Log}_{a^m} a^n = \frac{n}{m}$
- $\text{Log}_b b^n = n$

Ejercicio 4: Expresar. $\text{Log}\,\frac{5\sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt{m}}$;como una suma algebraica de logaritmos:

Resolución:

- En primer lugar aplicamos la **propiedad:** $\boxed{\text{Log}\left(\frac{x}{y}\right) = \text{Log}x - \text{Log}y}$

$$\text{Log}\,\frac{5\sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt{m}} = \text{Log}\,5\sqrt[3]{4ab^2} - \text{Log}\,\sqrt{m}$$

- En segundo lugar aplicamos la **propiedad:** $\boxed{\text{Log}\,x \cdot y = \text{Log}\,x + \text{Log}\,y}$

$$\text{Log}\,\frac{5\sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt{m}} = \left(\text{Log}\,5 + \text{Log}\,\sqrt[3]{4ab^2}\right) - \text{Log}\,\sqrt{m}$$

- En tercer lugar aplicamos la **propiedad:** $\boxed{\text{Log}\,\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\,\text{Log}\,a}$

$$\text{Log}\,\frac{5\sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt{m}} = \left(\text{Log}\,5 + \frac{1}{3}\,\text{Log}\,4ab^2\right) - \frac{1}{2}\,\text{Log}\,m$$

$$\text{Log}\,\frac{5\sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt{m}} = \text{Log}\,5 + \frac{1}{3}\left(\text{Log}\,4 + \text{Log}\,a + \text{Log}\,b^2\right) - \frac{1}{2}\,\text{Log}\,m$$

$$= \text{Log}\,5 + \frac{1}{3}\left(\text{Log}\,2^2 + \text{Log}\,a + 2\,\text{Log}\,b\right) - \frac{1}{2}\,\text{Log}\,m$$

$$= \text{Log}\,5 + \frac{1}{3}\,(2\,\text{Log}\,2 + \text{Log}\,a + 2\,\log b) - \frac{1}{2}\,\text{Log}\,m$$

$$\therefore\ \boxed{\text{Log}\,\frac{5\sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt{m}} = \text{Log}\,5 + \frac{2}{3}\,\text{Log}\,2 + \frac{1}{3}\,\text{Log}\,a + \frac{2}{3}\,\text{Log}\,b - \frac{1}{2}\,\text{Log}\,m}$$ ***Rpta.***

Ejercicio 5: Reducir: $E = \dfrac{\text{Log}_5^3 \frac{1}{25}}{\text{Log}_3 81} - \dfrac{1}{\text{Log}_{\sqrt{9}} 3}$

ACLARACIÓN

$\text{Log}_5^3 \frac{1}{25}$ Significa : $\left(\text{Log}_5 \frac{1}{25}\right)^3$

Resolución:

- La expresión dada, se puede escribir de la manera siguiente:

$$E = \frac{\left(\text{Log}_5 \frac{1}{25}\right)^3}{\text{Log}_3 3^4} - \frac{1}{\text{Log}_{3^{-2}} 3^1} = \frac{\left(\text{Log}_5 5^{-2}\right)^3}{4} - \frac{1}{\left(\frac{1}{-2}\right)}$$

$$E = \frac{(-2)^3}{4} + 2 = \frac{-8}{4} + 2 \Rightarrow \therefore \boxed{E = 0} \text{ Rpta.}$$

Ejercicio 6: Calcular el valor de: $E = \text{Log}_{16}\left(\text{Log}_{4/9}\left(\text{Log}_{\sqrt{8}}\left(\text{Log}_{\sqrt{2}} 2\right)\right)\right)$

Resolución:

$$E = \text{Log}_{16}\left(\text{Log}_{4/9}\left(\text{Log}_{\sqrt{8}}\left(\text{Log}_{\sqrt{2}} \sqrt{2}^2\right)\right)\right) \quad ; \quad 2 = \sqrt{2}^2$$

$$E = \text{Log}_{16}\left(\text{Log}_{4/9}\left(\text{Log}_{\sqrt{8}} 2\right)\right) \quad ; \quad \sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2^{3/2}$$

$$E = \text{Log}_{16}\left(\text{Log}_{4/9}\left(\text{Log}_{2^{3/2}} 2^1\right)\right) = \text{Log}_{16}\left(\text{Log}_{4/9} \frac{1}{3/2}\right)$$

$$E = \text{Log}_{16}\left(\text{Log}_{4/9} 2/3\right) = \text{Log}_{16}\left(\text{Log}_{(2/3)^2} (2/3)^1\right)$$

$$E = \text{Log}_{16} 1/2 = \text{Log}_{2^4} 2^{-1}$$

$$\therefore \boxed{E = -1/4} \text{ Rpta.}$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 41

Ejercicio 1: Expresar el Siguiente Logaritmo como una Suma Algebraica de Logaritmos:

$$\text{Log}\,\frac{\sqrt[3]{ab^2}}{m^2 \cdot n}$$

Resolución:

Rpta. $\frac{1}{3}\text{loga} + \frac{2}{3}\text{logb} - 2\ \text{logm} - \text{logn}$

Ejercicio 2: Simplificar:

$$M = 2\log_2 3 - \log_2 54 + \log_2 6$$

Resolución:

Rpta: M = cero

Ejercicio 3: Simplificar:

$$R = \log_3\frac{1}{27} + \log_{32}\frac{1}{4} - 4\log_{\sqrt{2}} 8$$

Resolución:

Rpta. $R = \frac{-137}{5}$

Ejercicio 4: Expresar el Siguiente Logaritmo como una Suma Algebraica de Logaritmos:

$$\text{Log}\,\frac{a \cdot \sqrt[5]{b}}{\sqrt[3]{n} \cdot m^3}$$

Resolución:

Rpta. $\text{Loga} + \frac{1}{5}\ \text{logb} - \frac{1}{3}\ \text{logn} - 3\ \text{logm}$

Ejercicio 5 : Reducir:

$$M = 2\log_4 8 - 4\log_4\sqrt{3} + \log_4 9$$

Rpta. $M = 3$

Ejercicio 6 : Simplificar:

$$E = \text{Log}\sqrt{x} + \text{Log}\sqrt[3]{y} - \text{Log}x^3 - \text{Log}y^2$$

Rpta: $E = 5\log(x^{-1/2}y^{-1/3})$

Ejercicio 7 : Reducir:

$$P = 3\log_2 5 + 3\log_2 2 - \log_2 (5/2)^3$$

Resolución:

Rpta. $P = 6$

Ejercicio 8 : Resolver:

a) $\text{Log}_7^2 49 - \text{Log}_2 16$

b) $\left[\text{Log}_{-2}(-8) - \text{Log}_3 1/3\right]^{1/2}$

Resolución:

Rpta. a) cero b) 2

13.2 SISTEMA LOGARÍTMICO DECIMAL

El Sistema Logarítmico Decimal tiene como base el número real **10.**
Un logaritmo en base 10 se denota $\text{Log}_{10}x$ o simplemente, **Logx**, pues por ser el Sistema más usado, se puede omitir la escritura de la base. A estos Logaritmos se le llaman **vulgares** (comunes) **decimales** (por ser de base 10) o **de Briggs** (Por el nombre de su creador).

13.2.1 LOGARITMOS DECIMALES DE POTENCIAS DE 10.

Calculemos los logaritmos decimales de algunas potencias de 10.

Analicemos la siguiente tabla:

ANTILOGARITMO	POTENCIA	LOGARITMO
1	10^0	Log 1 = 0
10	10^1	Log 10 = 1
100	10^2	Log 100 = 2
1000	10^3	Log 1 000 = 3
⋮	⋮	⋮
0,1	10^{-1}	Log 0,1 = -1
0,01	10^{-2}	Log 0,01 = -2
0,001	10^{-3}	Log 0,001 = -3
0,0001	10^{-4}	Log 0,0001 = -4
⋮	⋮	⋮

En General: El logaritmo de una potencia de **10** es un número **entero**.

$$\text{Log}10^n = n \; ; \; n \in \mathbb{Z}$$

13.2.2 CARACTERÍSTICA y MANTISA: Un número real positivo **a**, está escrito en notación Científica si se ha expresado en la forma:

$$a = K \cdot 10^n \; ; \; 1 \leq K < 10 \; ; \; n \in \mathbb{Z}$$

- La caracteristica del logaritmo de un número mayor que 1 se obtiene restando 1 al número de cifras enteras.

$$\text{Log}\underbrace{532}_{\text{3 cifras}} = 2 + \text{mantisa} \quad (3 - 1 = 2) \quad ; \quad \text{Log}\underbrace{5\,496}_{\text{4 cifras}} = 3 + \text{mantisa} \quad (4 - 1 = 3)$$

- La caracteristica de un número positivo menor que 1 se obtiene contando los ceros que aparecen antes de la primera cifra significativa y anteponiendo el signo menos.

Log 0,00015 = - 4 + mantisa ; Log 0,0000029 = -6 + mantisa

4 ceros — 6 ceros

Hoy, el logaritmo de un número se conoce en forma directa mediante una calculadora electrónica.

13.2.3 LOGARITMOS NEPPERIANOS: Se llaman Logaritmos Naturales o Nepperianos a los logaritmos en base **e**, donde **e**, es el número irracional cuyas primeras cifras son: 2,7182......y se indica:

$Log_e x$ = Lnx ; así para indicar el logaritmo natural de 2, escribimos Ln2.

13.2.4 OBTENCIÓN DE LOGARITMOS CON CALCULADORA

Algunas calculadoras están preparadas para obtener directamente los Logaritmos Decimales o los Nepperianos. Para ello deben estar provistas de dos teclas:

Para calcular el logaritmo de un número en cualquiera de estas dos bases, se marca primero el número y luego la tecla de la operación correspondiente.

Ejemplos:

Operación a realizar	Secuencia Teclas	Resultado
Log 2,5 ➡	2 . 5 Log	0,39794
Ln 4,31 ➡	4 . 3 1 Ln	1,4609379

Ejemplos: Escribamos los siguientes números en notación científica:

a) $536 = 5{,}36 \times 10^2$ **c)** $0{,}072 = 7{,}2 \times 10^{-2}$
b) $1\,347 = 1{,}347 \times 10^3$ **d)** $0{,}00041 = 4{,}1 \times 10^{-4}$

Calculemos los logaritmos de estos números basándonos en su notación científica, de acuerdo con las propiedades de logaritmos.

a) Log 536 = Log $5{,}36 \times 10^2$ **....(Notación Científica)**
= Log 5,36 + Log 10^2 **...(Propiedad de los Logaritmos)**
= Log 5,36 + 2 $\underbrace{\text{Log } 10}_{1}$
= Log 5,36 + 2 ⇒ ∴ **Log 536 = 2 + Log 5,36**

b) $\text{Log } 1\,347 = \text{Log } 1{,}347 \times 10^3$	c) $\text{Log } 0{,}072 = \text{Log } 7{,}2 \times 10^{-2}$
$= \text{Log } 1{,}347 + \text{Log } 10^3$	$= \text{Log } 7{,}2 + \text{Log } 10^{-2}$
$= \text{Log } 1{,}347 + 3 \underbrace{\text{Log } 10}_{1}$	$= \text{Log } 7{,}2 - 2 \underbrace{\text{Log } 10}_{1}$
$= \text{Log } 1{,}347 + 3$	$= \text{Log } 7{,}2 - 2$
$\therefore \text{Log } 1\,347 = 3 + \text{Log } 1{,}347$	$\therefore \text{Log } 0{,}072 = -2 + \text{Log } 7{,}2$

En General: $\text{Log } a = \text{Log}\left(K \times 10^n\right) = \text{Log } K + \text{Log } 10^n$

$$= \text{Log } K + n \underbrace{\text{Log } 10}_{1}$$

$$\therefore \quad \text{Log } a = n + \text{Log } K$$

El número entero n se llama característica del logaritmo de a y Log K es la mantisa del logaritmo de a.

Por lo Tanto: $\text{Log } a = n + \text{Log } K$

Loga = Característica + Mantisa

Tradicionalmente, la mantisa del logaritmo de un número se buscaba en una tabla de logaritmos y la característica la calculaba el usuario de acuerdo a las siguientes reglas:

Pero, ¿Cómo puedes obtener con la calculadora logaritmos en otras bases?

¡ATENCIÓN!

La calculadora entrega los logaritmos con su característica y mantisa ya sumadas.
Para expresar el logaritmo de un número como:

Log = Característica + Mantisa

Al logaritmo obtenido en la calculadora debemos restarle la característica correspondiente:

Ejemplo 1 : Log 30 = 1,47712

$$\underbrace{1{,}47712}_{\text{Calculadora}} - \underbrace{1}_{\text{Carac.}} = \underbrace{0{,}47712}_{\text{Mantisa}}$$

Por lo Tanto: $\text{Log } 30 = \underbrace{1}_{\text{Característica}} + \underbrace{0{,}47712}_{\text{Mantisa}}$

Ejemplo 2: Log 0,03 = -1,52288

$$\underbrace{-1{,}52288}_{\text{Calculadora}} - \underbrace{(-2)}_{\text{Caract.}} = \underbrace{0{,}47712}_{\text{Mantisa}}$$

Por lo Tanto: $\text{Log } 0{,}03 = \underbrace{-2}_{\text{Característica}} + \underbrace{0{,}47712}_{\text{Mantisa}}$

13.2.5 OBTENCIÓN DE LOGARITMOS EN CUALQUIER BASE CON CALCULADORA

Para hallar, por ejemplo, $\text{Log}_2 27$ con calculadora, tenemos dos caminos.

$$\text{Log}_2 27 = \frac{\text{Log } 27}{\text{Log } 2} \quad \text{o} \quad \text{bien}: \quad \text{Log}_2 27 = \frac{\text{Ln } 27}{\text{Ln } 2}$$

El problema es ahora: ¿Cómo hallar el Cociente entre ambos logaritmos con la calculadora?

El logaritmo del ejemplo se resuelve así:

$\text{Log}_2 27 = \dfrac{\text{Log } 27}{\text{Log } 2}$ ➡ [2] [7] [Log] [÷] [2] [Log] [=]

$\text{Log}_2 27 = \dfrac{\text{Ln } 27}{\text{Ln } 2}$ ➡ [2] [7] [Ln] [÷] [2] [Ln] [=]

Con cualquiera de ambos procedimientos el resultado es:

$$\text{Log}_2 27 = 4{,}7548875......$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 42

Ejercicio 1 : Encuentra, con una calculadora científica, los logaritmos de cada uno de los siguientes números:

a) 49 =

b) 75 =

c) 86 =

d) 124 =

e) 1 024 =

f) 1 348 =

g) 175 620 =

h) 1 324 762 =

Ejercicio 2 : Encuentra,con una calculadora cientifica, los logaritmos de cada uno de los siguientes números.

a) 0,5 =

b) 0,24 =

c) 0,04 =

d) 0,245 =

e) 0,304 =

f) 0,0004 =

g) 0,00042 =

h) 0,00407 =

Ejercicio 3 : Obtén los siguientes logaritmos en tu calculadora.

a) Log 5 =

b) Ln 4 =

c) Log 0,2 =

d) Ln π =

e) Log 3,25 =

f) Ln 0,3 =

g) Log 125 =

h) Ln 48 =

Ejercicio 4 : Resuelve primero mentalmente los siguientes Logaritmos y luego verifica los resultados con la calculadora.

a) $\text{Log}_2 64$ **b)** $\text{Log}_3 1/27$ **c)** $\text{Log}_4 0,25$

Resolución:

13.2.5 CÁLCULO DEL ANTILOGARITMO:

La calculadora científica también permite encontrar el valor del antilogaritmo, conociendo el logaritmo respectivo.

Ejemplo: Calcula el valor de "x" si Log x = 2,79246.

1) Anota 2,79146 pulsando las teclas respectivas.

2

7

2) Pulsa la tecla 10^x y en el visor podrás ver el valor correspondiente al Antilogaritmo que es 620,0975279

TALLER DE EJERCICIOS Nº 43

- Calcula el antilogaritmo (x) de cada uno de los siguientes logaritmos.

a) Log x = 1,80003 ***Resolución:***	**c)** Log x = 4,65273 ***Resolución:***
b) Log x = 1,78032 ***Resolución:***	**d)** Log x = 3,17493 ***Resolución:***

13.3 ECUACIONES EXPONENCIALES

Ecuaciones exponenciales son aquellas en las que la variable figura como exponente.

Ejemplos: $3^x = 9$; $5^x - 2^x = 21$; $10^x = 0{,}001$; etc.

Para la resolución de las ecuaciones exponenciales existen dos métodos.

(I) Aplicando la siguiente Propiedad de las Potencias:

Si: $a^m = a^n$; entonces $m = n$

(II) Aplicando la Definición de Logaritmo:

Si: $a^m = b$; entonces $m = \log_a b$

EJERCICIOS RESUELTOS
APLICANDO EL PRIMER MÉTODO

Ejemplo 1: Resolver la ecuación: $9^{x+1} = 81$

Resolución:

La ecuación dada se puede escribir así:

$$(3^2)^{x+1} = 3^4$$

$$3^{2(x+1)} = 3^{(4)} \Rightarrow 2(x+1) = 4$$

$$2x + 2 = 4$$

$$2x = 2$$

$$\therefore \quad x = \frac{2}{2} = 1 \quad \textit{(Raíz de la ecuación)}$$

Verificación: $9^{x+1} = 81 \Rightarrow 9^{1+1} = 81$

$9^2 = 81 \Rightarrow 81 = 81$ *(Proposición verdadera)*

Luego:

El conjunto solución de: $9^{x+1} = 81$; es: $S = \{1\}$ ***Rpta.***

Ejemplo 2: Resolver la ecuación: $4^x = \frac{1}{8}$

Resolución:

La ecuación dada, se puede escribir así:

$4^x = \frac{1}{2^3}$ por propiedad : $\boxed{\frac{1}{a^n} = a^{-n}}$

$4^x = 2^{-3}$ ➡ $(2^2)^x = 2^{-3}$

$2^{2x} = 2^{-3}$ ➡ $2x = -3$ ➡ $x = -\frac{3}{2}$ *(Raíz de la Ecuación)*

Verificación: $4^x = \frac{1}{8}$ ➡ $4^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{8}$

$(2^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{8}$ ➡ $2^{-3} = \frac{1}{8}$

$\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ ➡ $\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$

Luego: El conjunto solución de: $4^x = \frac{1}{8}$; es $S = \{-3/2\}$

Ejemplo 3 : Resolver la ecuación: $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,25$

Resolución:

La ecuación dada, se puede escribir asi: $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{225}{100}$; Sacamos 25 ava a cada término del 2º miembro

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4}$; pero $\frac{9}{4} = \frac{3^2}{2^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^2$; por propiedad : $\left(\frac{A}{B}\right)^n = \left(\frac{B}{A}\right)^{-n}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ ➡ $\therefore$ $x = -2$ *(Raíz de la ecuación)*

Luego: El conjunto solución de: $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,25$; es: $S = \{-2\}$

Ejemplo 4: Resolver la ecuación: $13^{2x+5} = 1$

Resolución:

Sabemos que: $A^0 = 1$, donde: $A \neq 0$

La ecuación dada, se puede escribir así:

$$13^{2x+5} = 1 \Rightarrow 13^{2x+5} = 13^0 \Rightarrow 2x + 5 = 0$$

$$2x = -5 \Rightarrow \therefore \boxed{x = -5/2}$$

Luego: El conjunto solución de: $13^{2x+5} = 1$; es: $S = \{-5/2\}$

Ejemplo 5: Resolver la ecuación: $9^x + 3^x = 90$

Resolución:

La ecuación dada, se puede escribir así:

$(3^2)^x + 3^x = 90$; por propiedad: $\boxed{(A^n)^m = (A^m)^n}$

$(3^x)^2 + 3^x = 90$; hacemos que: $3^x = a$ ..... (α)

$a^2 + a = 90$; igualamos a cero la ecuación así:

$a^2 + a - 90 = 0$; factorizamos por el método del aspa:

a +10

a -9

Donde: $(a + 10)(a - 9) = 0$; igualamos cada factor a cero

I) $a + 10 = 0 \rightarrow \boxed{a = -10}$ ii) $a - 9 = 0 \rightarrow \boxed{a = 9}$

Reemplazamos: $\boxed{a = -10}$; en la expresión (α): $3^x = -10$ (No existe solución)

Reemplazamos: $\boxed{a = 9}$; en la expresión (α):

$3^x = 9$ $3^x = 3^2 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 2}$ *(Raíz de la ecuación)*

Luego: El conjunto solución de: $9^x + 3^x = 90$ es: $S = \{2\}$

Ejemplo 6: Resolver la ecuación: $6^{3x+4} = 36^{2x-3}$

Resolución:

La ecuación dada, se puede escribir así:

$6^{3x+4} = (6^2)^{2x-3}$

$6^{3x+4} = 6^{2(2x-3)}$ ⇒ $3x + 4 = 2(2x - 3)$

$3x + 4 = 4x - 6$

∴ $\boxed{x = 10}$ *(Raíz de ecuación)*

Luego: El conjunto solución de: $6^{3x+4} = 36^{2x-3}$; es: S = {10}

EJERCICIOS RESUELTOS APLICANDO EL SEGUNDO MÉTODO

Este método se utiliza cuando no es posible transformar la ecuación en una igualdad de potencias de una misma base, veamos:

Ejemplo 1: Resolver la ecuación: $2^{x-3} = 5$

Resolución:

Por propiedad: $\boxed{a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n}}$; la ecuación dada se puede escribir así:

$2^{x-3} = 5 \rightarrow \dfrac{2^x}{2^3} = 5 \rightarrow \dfrac{2^x}{8} = 5$

$\boxed{2^x = 40}$

Aplicando la definición de logaritmos, en está última expresión obtenemos: $x = \log_2 40$

∴ El conjunto solución de la ecuación es: $S = \{\log_2 40\}$

Ejemplo 2: Resolver la ecuación: $5^{3x-2} - 10 = 0$

Resolución:

La ecuación dada, se puede escribir así: $5^{3x-2} = 10 \rightarrow \dfrac{5^{3x}}{5^2} = 10$

$\dfrac{5^{3x}}{25} = 10 \rightarrow 5^{3x} = 250$

Por definición de logaritmos; obtenemos: $3x = \log_5 250$

$$x = 1/3\ \log_5 250$$

∴ El conjunto solución de la ecuación es: $S = \{1/3\ \log_5 250\}$

Ejemplo 3: Resolver la ecuación: $3^{2x+1} = 2$

Resolución.

Por propiedad: $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$; la ecuación dada se puede escribir así:

$$3^{2x} \cdot 3^1 = 2 \quad \rightarrow \quad 3^{2x} = \frac{2}{3}$$

Por definición de logaritmos; obtenemos: $2x = \log_3\left(\frac{2}{3}\right)$

$$x = \frac{1}{2}\log_3\left(\frac{2}{3}\right)$$

∴ El conjunto solución de la ecuación es: $S = \left\{\frac{1}{2}\log_3\left(\frac{2}{3}\right)\right\}$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 44

A. Resolver las siguientes ecuaciones, aplicando la propiedad de potencias:

1) $2^{x+1} = 64$ **5)** $9^{x+3} = 243$ **9)**

$7^{x^2-4} = 1$		
2) $3^{x-1} = \frac{1}{81}$	**6)** $100^{x-2} = 0{,}001$	**10)** $9^x - 3^x - 6 = 0$
3) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^x = 16$	**7)** $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} = 256$	**11)** $\left(\frac{25}{4}\right)^{x-3} = 0{,}16$
4) $2^{4x-1} = 32^{x+1}$	**8)** $64^x = 0{,}25$	**12)** $(9^x)^{x+2} = 3^{4x+2}$

B. Resolver las siguientes ecuaciones, aplicando la definición de logaritmos:

13) $4^x = 3$	**15)** $5^{3x+2} = 2$	**17)** $3^x = 0{,}25$
14) $3^{x+2} = 5^x$	**16)** $7^{x-1} = 3^{x+2}$	

RESPUESTAS TALLER

1) $S = \{5\}$	**7)** $S = \{-3/2\}$	**13)** $S = \{\log_4 3\}$
2) $S = \{-3\}$	**8)** $S = \{-1/3\}$	**14)** $S = \{\log_{5/3} 9\}$
3) $S = \{12\}$	**9)** $S = \{-2 \,;\, +2\}$	**15)** $S = \{\frac{1}{3}\log_5 2/25\}$
4) $S = \{-6\}$	**10)** $S = \{1\}$	**16)** $S = \{\log_{7/3} 63\}$
5) $S = \{-1/2\}$	**11)** $S = \{2\}$	**17)** $S = \{\log_3 1/4\}$
6) $S = \{1/2\}$	**12)** $S = \{-1, 1\}$	

13.4 ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Se denomina ecuación logarítmica a toda aquella que contiene una o más funciones logarítmicas de la variable como por ejemplo:

$$\log_3 x = 2 \quad ; \quad \log_2 (2x + 1) - \log_2 (x - 1) = 0 \quad ; \quad (\log_3 x)^2 - \log_3 x - 2 = 0$$

Las raices de una ecuación logaritmica puede hallarse:

i) Aplicando la definición de logaritmo

ii) Aplicando la propiedad: si $\boxed{\log_b m = \log_b n}$ entonces: $\boxed{m = n}$

iii) Introduciendo una nueva variable.

A. Resolver las Siguientes Ecuaciones, Aplicando la Definición de Logaritmo.

Ejemplo 1 : Resolver la ecuación: $\log_5 (x - 1)^2 = 2$

Resolución:

Por definición de logaritmos: $\log_5 (x - 1)^2 = 2$; obtenemos:

$$(x - 1)^2 = 5^2 \Rightarrow (x - 1)^2 = 25$$

Donde: $(x - 1) = \pm\sqrt{25}$

$$x - 1 = \pm 5 \begin{cases} x - 1 = +5 \rightarrow \boxed{x = 6} \\ x - 1 = -5 \rightarrow \boxed{x = -4} \end{cases}$$

Verificación:

Para: $\boxed{x = 6} \rightarrow \log_5(6 - 1)^2 = \log_5 5^2 = 2$ (Proposición Verdadera)

Para: $\boxed{x = -4} \rightarrow \log_5(-4 - 1)^2 = \log_5(-5)^2 = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$ (Proposición verdadera)

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación dada es: $S = \{-4; 6\}$

Ejemplo 2 : Resolver la ecuación: $\log_{(x-3)} (x - 1) = 2$

Resolución:

Por definición de logaritmos: $\log_{(x-3)} (x - 1) = 2$; Obtenemos:

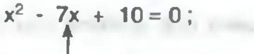
$$(x - 1) = (x - 3)^2$$

$$x - 1 = x^2 - 6x + 9$$

$$0 = x^2 - 7x + 10$$

Esta última ecuación se puede escribir así:

$x^2 - 7x + 10 = 0$; factorizamos por el método del aspa



Luego: $(x - 5)(x - 2) = 0$; igualamos cada factor a cero

i) $x - 5 = 0 \rightarrow$ $x = 5$ ii) $x - 2 = 0 \rightarrow$ $x = 2$

Verificación:

Para: $x = 5$ $\rightarrow$ $\log_{(5-3)}(5 - 1) = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$ (Proposición verdadera)

Para: $x = 2$ $\rightarrow$ $\log_{(2-3)}(2 - 1) = \log_{-1} 1 \neq 2$ (Proposición falsa)

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación dada es: S = (5)

Ejemplo 3 : Resolver la ecuación: $\log_5(x + 3) + \log_5(x - 1) = 1$

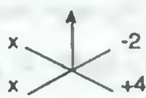
Resolución:

Por propiedad: $\log_b A + \log_b B = \log_b A.B$ La ecuación se puede escribir así:

$\log_5(x + 3)(x - 1) = 1$

$(x + 3)(x - 1) = 5^1$

$x^2 + 2x - 3 = 5 \rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$; factorizamos por el método del aspa:



Donde: $(x - 2)(x + 4) = 0$; igualamos cada factor a cero

i) $x - 2 = 0 \rightarrow$ $x = 2$ ii) $x + 4 = 0 \rightarrow$ $x = -4$

Verificación:

Para: $x = 2$ $\log_5(2 + 3) + \log_5(2 - 1) = 1$

$\log_5 5 + \log_5 1 = 1$ $\log_5 5^1 + \log_5 5^0 = 1 \Rightarrow$ $1 + 0 = 1$ (Verdadero)

Para: $x = -4$ $\log_5(-4 + 3) + \log_5(-4 - 1) \neq 1$ (Proposición falsa)

Luego: El conjunto solución de la ecuación dada es: S = {2}

Ejemplo 4: Resolver la ecuación: $\log_3 x^2 - \log_3 6x = 2$

Resolución:

Por propiedad: $\log_b A - \log_b B = \log_b \frac{A}{B}$ La ecuación dada, se puede escribir así:

$$\log_3\left(\frac{x^2}{6x}\right) = 2 \Rightarrow \log_3\left(\frac{x}{6}\right) = 2$$

$$\frac{x}{6} = 3^2 \Rightarrow x = 54$$

Luego: El conjunto solución de la ecuación dada es: S = {54}

B. Resolver las siguientes Ecuaciones Aplicando la Propiedad :

Si: $\log_b m = \log_b n$ Entonces: $m = n$

Ejemplo 1: Resolver la ecuación: $3\log x - \log 16 = 2\log(x/2)$

Resolución:

Aplicando las propiedades: $n\log A = \log A^n$; $\log A - \log B = \log\frac{A}{B}$ obtenemos:

$$\log x^3 - \log 16 = \log\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$\log\frac{x^3}{16} = \log\frac{x^2}{4} \Rightarrow \frac{x^3}{16} = \frac{x^2}{4}$$; Igualamos a cero dicha expresión:

$$\frac{x^3}{16} - \frac{x^2}{4} = 0$$; Factorizamos

$$\frac{x^2}{4}\left(\frac{x}{4} - 1\right) = 0$$; Igualamos cada factor a cero

i) $\frac{x^2}{4} = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

ii) $\frac{x}{4} - 1 = 0 \rightarrow \frac{x}{4} = 1 \rightarrow x = 4$

Verificación:

Para: $\boxed{x = 0}$ → $\underbrace{3\log 0}_{\text{No existe}} - \log 16 = 2\log\frac{0}{2}$ (Proposición falsa)

Para: $\boxed{x = 4}$ → $3\log 4 - \log 16 = 2\log\frac{4}{2}$

$\log 4^3 - \log 16 = \log\left(\frac{4}{2}\right)^2$ → $\log\frac{(4)^3}{16} = \log 2^2$

(Proposición verdadera) → $\boxed{\log 4 = \log 4}$

Luego: El conjunto solución de la ecuación dada es: S = {4}

Ejemplo 2: Resolver la ecuación: $\log(25 - x^2) - \log(x + 1)^2 = 0$

Resolución:

La ecuación dada se puede escribir así: $\log(25 - x^2) = \log(x + 1)^2$

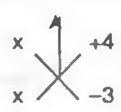
Donde:

$(25 - x^2) = (x + 1)^2$

$25 - x^2 = x^2 + 2x + 1$ → $24 = 2x^2 + 2x$; sacamos mitad a cada término:

$12 = x^2 + x$; igualamos a cero

$0 = x^2 + x - 12$; factorizamos



Donde: $(x + 4)(x - 3) = 0$

i) $x + 4 = 0$ → $x = -4$ ii) $x - 3 = 0$ → $x = 3$

∴ El conjunto solución de la ecuación dada es: S = {-4,3}

Ejemplo 3: Resolver la ecuación: $\frac{\log 2x}{\log(x - 12)} = 2$

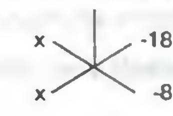
Resolución:

La ecuación se puede escribir así: $\log 2x = 2\log(x-12)$

$$\log 2x = \log(x-12)^2$$

Donde: $2x = (x-12)^2 \rightarrow 2x = x^2 - 24x + 144$

$$0 = x^2 - 26x + 144$$



$$(x-18)(x-8) = 0$$

i) $x - 18 = 0 \rightarrow \boxed{x = 18}$ ii) $x - 8 = 0 \rightarrow \boxed{x = 8}$

* Recordar que: $\log_b A = N$; siendo: A = Número real positivo

$b > 0$ y $b \neq 1$

Luego: El conjunto solución de la ecuación dada es: S = {18}

Ejemplo 4: Resolver la ecuación: $\sqrt{\log x} = \log\sqrt{x}$

Resolución:

Por propiedad: $\sqrt{A} = N \rightarrow A = N^2$; obtenemos que:

$\log x = (\log\sqrt{x})^2$; por artificio: $x = \sqrt{x^2}$

$\log\sqrt{x^2} = (\log\sqrt{x})^2$; por propiedad $\log A^n = n\log A$

$2\log\sqrt{x} - (\log\sqrt{x})^2 = 0$; igualando a cero

$2\log\sqrt{x} - (\log\sqrt{x})^2 = 0$; factorizando: "$\log\sqrt{x}$"

$\log\sqrt{x}(2 - \log\sqrt{x}) = 0$; igualamos cada factor a cero

i) $\log\sqrt{x} = 0 \rightarrow \sqrt{x} = 10^0 \rightarrow \sqrt{x} = 1 \rightarrow x = 1$

ii) $2 - \log\sqrt{x} = 0 \rightarrow \log\sqrt{x} = 2 \rightarrow \sqrt{x} = 10^2 \rightarrow x = 10^4$

∴ El conjunto solución de la ecuación dada es: $S = \{1; 10^4\}$

C. Resolver las siguientes Ecuaciones Aplicando la Introducción de una Nueva Variable:

Ejemplo 1: Resolver la ecuación: $2\log_2^2 x + 5\log_2 x = 3$

Resolución:

La ecuación dada, se puede escribir así:

$2(\log_2 x)^2 + 5\log_2 x = 3$; hacemos que: $\log_2 x = y$ ...(I)

$2y^2 + 5y = 3$; igualando a cero, obtenemos:

$2y^2 + 5y - 3 = 0$

2y   -1
y   +3   } $(2y - 1)(y + 3) = 0$

i) $2y - 1 = 0 \rightarrow y = 1/2$ ii) $y + 3 = 0 \rightarrow y = -3$

Reemplazamos el valor de y = 1/2 en (I):

$\log_2 x = y \rightarrow \log_2 x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 2^{1/2} \rightarrow x = \sqrt{2}$

$\log_2 x = y \rightarrow \log_2(x) = -3 \rightarrow x = 2^{-3} \rightarrow x = \frac{1}{8}$

∴ El conjunto solución de la ecuación dada es: $S = \{\sqrt{2}, 1/8\}$

Ejemplo 2: Resolver la ecuación: $\log_2^3 x + 4\log_2^2 x + 3\log_2 x = 0$

Resolución:

La ecuación dada, se puede escribir así:

$(\log_2 x)^3 + 4(\log_2 x)^2 + 3\log_2 x = 0$; hacemos: $\log_2 x = a$

$a^3 + 4a^2 + 3a = 0$; factorizamos "a"

$a(a^2 + 4a + 3) = 0$; factorizamos los términos del paréntesis

$a(a^2 + 4a + 3) = 0$

; aplicando el método del aspa:

a   +3
a   +1

Luego: $a(a+3)(a+1)=0$; igualamos cada lactor a cero

i) $a=0$ pero: $a=\log_2 x \rightarrow \log_2 x = 0 \rightarrow x = 2^0 \therefore x = 1$

ii) $a+3=0 \rightarrow a=-3 \rightarrow \log_2 x = -3 \rightarrow x = 2^{-3} \therefore x = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

iii) $a+1=0 \rightarrow a=-1 \rightarrow \log_2 x = -1 \rightarrow x = 2^{-1} \therefore x = 1/2$

Luego: El conjunto solución de la ecuación dada es: $S = \{1/2; 1/8; 1\}$

OTROS TIPOS DE EJERCICIOS SOBRE ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Ejemplo 1 : Resolver la ecuación: $10^{\log 5x} = 3x + 8$

Resolución:

Por propiedad: $a^{\log_a x^n} = x^n$ la ecuación dada, se puede escribir asi; ya que la base del logaritmo se sobreentiende que es10.

$$10^{\log_{10} 5x} = 3x + 8 \Rightarrow 5x = 3x + 8 \Rightarrow \therefore 2x = 8 \Rightarrow x = 4$$

Luego: El conjunto solución de la ecuación dada es: $S = \{4\}$

Ejemplo 2 : Resolver la ecuación: $\log_x 10 \, . \log(x^2 - 2) = 1$

Resolución:

Por propiedad: $\log_b A = \frac{\log A}{\log b}$; la ecuación dada, se puede escribir asi:

$$\frac{\log 10}{\log x} \log\left(x^2 - 2\right) = 1 \quad \rightarrow \quad \text{pero} \quad \log 10 = 1$$

$$\frac{1}{\log x} \log\left(x^2 - 2\right) = 1 \quad \rightarrow \quad \log\left(x^2 - 2\right) = \log x$$

Luego: $x^2 - 2 = x$

$x^2 - x - 2 = 0$; factorizamos por el método del aspa:

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$\left.\begin{matrix} x & & -2 \\ x & & +1 \end{matrix}\right\} (x-2)(x+1) = 0$$

I) $x - 2 = 0 \rightarrow \boxed{x = 2}$ ii) $x + 1 = 0 \rightarrow \boxed{x = -1}$

Luego: El conjunto solución de la ecuación dada es: $S = \{2\}$

Ejemplo 3 : Resolver la ecuación; $\log_{1/2}x + \log_{1/4}x + \log_{1/8}x = 11$

Resolución:

La ecuación dada, se puede escribir así:

$$\frac{\log x}{\log \frac{1}{2}} + \frac{\log x}{\log \frac{1}{4}} + \frac{\log x}{\log \frac{1}{8}} = 11$$

$$\frac{\log x}{\log\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{\log x}{\log\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{\log x}{\log\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 11$$; por propiedad: $\log A^n = n \log A$

$$\frac{\log x}{\log\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{\log x}{2\log\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{\log x}{3\log\left(\frac{1}{2}\right)} = 11$$; damos común denominador en el 1º miembro

$$\frac{6 \log x + 3 \log x + 2 \log x}{6 \log (1/2)} = 11$$

$$\cancel{11} \log x = \cancel{11}\left(6 \log\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\log x = \log\left(\frac{1}{2}\right)^6 \rightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \rightarrow \therefore x = 2^{-6}$$

Luego: El conjunto solución de la ecuación dada es: $S = \{2^{-6}\}$

Ejemplo 4 : Resolver la ecuación: $2 \log \log x = \log(7 - 2 \log x) - \log 5$

Resolución:

Hacemos que: $\log x = a$; reemplazando en la ecuación dada, obtenemos:

$$2 \log a = \log(7 - 2a) - \log 5$$

$$\underbrace{\log a^2 + \log 5} = \log(7 - 2a)$$

$$\log a^2 5 = \log(7 - 2a)$$

Donde: $5a^2 = 7 - 2a \rightarrow 5a^2 + 2a - 7 = 0$; factorizamos por el método del aspa:

$$5a^2 + 2a - 7 = 0$$

$$\begin{matrix} a & -1 \\ 5a & +7 \end{matrix} \Big\} \quad (a - 1)(5a + 7) = 0$$

i) $a - 1 = 0 \rightarrow a = 1 \rightarrow \log x = 1 \rightarrow \log_{10}x = 1 \rightarrow \therefore x = 10^1 = 10$

ii) $5a + 7 = 0 \rightarrow a = -7/5$ (No es solución)

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación dada es: $S = \{10\}$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 45

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $\log_3(2x + 5) = 2$	**4.** $\log_x(5x - 6) - 2 = 0$
2. $\log_2(x^2 - 2x) - 3 = 0$	**5.** $\log_3 x^2 - \log_3 4x = 2$
3. $\log_{(x-1)}(x + 5) = 2$	**6.** $\log 6x + \log(x - 3) - \log 3x = 0$
7. $2 \log x - 3 \log x/2 = \log 4$	**10.** $\log_3(x + 2)^2 - \log_3(2x - 5) = 2$
8. $\log_4(x + 2) = 1 - \log_4(x - 1)$	**11.** $3 \log(5 - x) = \log(35 - x^3)$
9. $\log(x + 5)^2 - \log(x + 5) = \log 2$	**12.** $\log\sqrt{2x+3} + \log\sqrt{7x+4} = 1 + \log 1{,}5$
13. $\log_4 2x - 6 \log_4 x + 8 = 0$	**14.** $2 \log_3^2 x + 5\log_3 x = 3$
15. $10^{\log\left(x^2+x-3\right)} = x + 1$	**16.** $\log_{1/3}x + \log_{1/9}x - \log_{1/27}x = 7$

RESPUESTAS TALLER

1. $S = \{2\}$	**5.** $S = \{36\}$	**9.** $S = \{-3\}$	**13.** $S = \{16\}$
2. $S = \{-2, 4\}$	**6.** $S = \{7/2\}$	**10.** $S = \{7\}$	**14.** $S = \{\sqrt{3}; 1/27\}$
3. $S = \{4\}$	**7.** $S = \{2\}$	**11.** $S = \{2, 3\}$	**15.** $S = \{2\}$
4. $S = \{2, 3\}$	**8.** $S = \{2\}$	**12.** $S = \{3\}$	**16.** $S = 3^{-6}$

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE LOGARITMOS

NIVEL I

Ejercicio 1: Si: Log a = x; entonces:
Log 10a, es igual a:

A) 10 + x B) 10x C) x D) 2x E) 1 + x

Ejercicio 2: Si: Logp = x; entonces: Log $\sqrt[3]{p}$ es igual a:

A) $\sqrt[3]{x}$ B) 3x C) $x^{1/3}$ D) x/3 E) $\frac{1}{3}-x$

Ejercicio 3: Si: Log a = m y Log b = n; entonces: Log $\sqrt{a/b}$; es igual a:

A) m - n B) $\frac{m-n}{2}$ C) $\sqrt{m-n}$

D) m/n E) $\sqrt{m/n}$

Ejercicio 4: Log 10^3 es equivalente a:

A) 1 + 3 Log x B) Log x^3 C) 3 Log x
D) 3 E) Ninguna de las Anteriores.

Ejercicio 5: Si: Log $\sqrt[5]{x^2}$ =0,4 entonces el valor de Log x, es:

A) 2/5 B) 1 C) -1 D) 2 E) -5/2

Ejercicio 6: Si: Log p = q ;
entonces: Log (p/r) es:

A) q/2 B) q -Log r C) q Log r
D) q - r E) Log p + Log r

Ejercicio 7: Log x + Log ($1/x^2$) equivale a:

A) 3 Log x B) 3 C) -Log x
D) -2/3 E) -2 Log x

Ejercicio 8: El $\log_5 \sqrt[3]{25}$ es igual a:

A) 3/2 B) -3/2 C) -2/3 D) 2/3 E) 2

Ejercicio 9: Log x - 3; equivale a:

A) $\frac{\text{Log } x}{1\ 000}$ B) Log 3x C) $\frac{\text{Log } x}{3}$

D) Log 1 000 x E) $\text{Log}\left(\frac{x}{1\ 000}\right)$

Ejercicio 10: Si: x = $\log_2 a$; el valor de: "x + 1" es igual a:

A) 2 Log a B) $\log_2 a^2$ C) 4 Log a
D) $\log_2 2a$ E) Log a/2

Ejercicio 11: Log $\sqrt[3]{\frac{1\ 000}{a}}$ equivale a:

A) 1+3Loga B) $1-\frac{1}{3}$Loga C) $-\frac{1}{3}$Loga

D) 1−3Loga E) $\frac{1}{3}$ Loga

Ejercicio 12: Log (a^2 - 2ab + b^2); es igual a:
(a - b)

A) a - b B) a + b C) a D) b E) 2

Ejercicio 13: En la Ecuación:

$\log_2(5x-3)-\log_2 x=1$; el valor de "x" es:

A) 0 B) 1 C) 10 D) 2 E) 20

Ejercicio 14: En la Ecuación:

$\log_3(2x + 21)$ - $\log_3 x$ = 2. El valor de "x" es:

A) 3 B) 8 C) 21 D) 21/2 E) 21/8

Ejercicio 15: En la ecuación:

$\log_4(2x+3) - \log_4(x-6) = 1$; el valor de "x" es:

A) 21 B) -6 C) 3 D) 27/2 E) -21

Ejercicio 16: El desarrollo de la expresión:

$\log(x^2 - 7x + 10)$ es:

A) $2\log x - \log 7 - \log x + \log 10$
B) $2\log x - \log 7x + \log 10$
C) $\log(x-5) + \log(x-2)$
D) $2\log x - \log 7$
E) Ninguna de las Anteriores.

Ejercicio 17: El desarrollo de la expresión:

$\log(a^3 - b^3)$; es:

A) $3\log a - 3\log b$
B) $\log a^3/b^3$
C) $3\log(a-b)$
D) $\log(a-b) + \log(a^2 + ab + b^2)$
E) $3\log a/b$

Ejercicio 18: El desarrollo de la expresión: $\log(x^2 - x)$ es:

A) $\log x + \log(x-1)$ B) $2\log x - 1$
C) $2\log x$ D) $2\log x - \log 1$
E) $\log x$

Ejercicio 19: El valor de la expresión:

$\log 100 + \log_2 128 - \log_5 625$; es:

A) 10 B) 5 C) -10 D) -5 E) 397

Ejercicio 20: El valor de la expresión:

$\log 0{,}01 + \log_{0,3} 0{,}0081$; es:

A) 20 B) -2 C) 2 D) 1 E) 0,9919

Ejercicio 21: El valor de la expresión:

$$\log_{36\sqrt[5]{36}} 216\sqrt[3]{6^2} \; ; \text{ es :}$$

A) 55 B) 36 C) 55/36 D) 6 E) -6

Ejercicio 22: El valor de la expresión:

$\log_2 0{,}25 + \log_2 0{,}125 - \log_2 0{,}0625$; es:

A) 1 B) 0 C) -2 D) -3 E) -1

Ejercicio 23: El valor de la expresión:

$$\log_2 \frac{1}{16} - \log_3 \frac{1}{81} + \log_5 \frac{1}{125} \; ; \text{ es :}$$

A) 4 B) 7 C) 11 D) -3 E) 3

Ejercicio 24: El valor de "x" en la expresión:

$$\log_{6/5} x = 3 \; ; \text{ es :}$$

A) 216 B) 125 C) 91 D) $\frac{216}{125}$ E) 341

Ejercicio 25: El valor de "x" en la expresión:

$$\log_x 1\frac{91}{125} = 3 \; ; \text{ es :}$$

A) 6 B) 6/5 C) Imposible Determinarlo
D) 5 E) 1

Ejercicio 26: El valor de "x" en la expresión:

$$\log_{2/3} x = -2 \; ; \text{ es :}$$

A) 2/3 B) -2/3 C) 3/2 D) -3/2 E) 9/4

Ejercicio 27: El valor de "x" en la expresión:

$\log_{0,4} 0{,}064 = x$; es:

A) 4 B) 16 C) 64 D) 3 E) 60

Ejercicio 28: Si: $\log 2 \approx 0{,}3$ y $\log 3 \approx 0{,}47$, el valor de la expresión:

$\log 6 - \log 108 + \log 48$; es:

A) 0,9 B) 0,43 C) 1,37 D) 1,07 E) 0,17

Ejercicio 29: Si: $\log 3 \approx 0{,}47$ y $\log 5 \approx 0{,}70$, entonces el valor de la expresión:

$\text{Log } 75 - \text{Log } 125 + \text{Log } 45$; es:

A) 0,47 B) 1,41 C) 0,9 D) 0,94 E) 0,3

Ejercicio : Si: Log 2 = 0,30 y Log 5 = 0,70, entonces, el valor de la expresión:

$\text{Log}_{35} \cdot \text{Log}_{14}$; es:

A) 0,70 B) 0,40 C) 1,30
D) 1,60 E) Imposible Determinarlo.

Clave de Respuestas

1. E	2. D	3. B	4. D	5. B
6. B	7. C	8. D	9. E	10. D
11. B	12. A	13. B	14. A	15. D
16. C	17. D	18. A	19. B	20. C
21. C	22. E	23. D	24. D	25. B
26. E	27. D	28. B	29. B	30. B

NIVEL II

Ejercicio : Sin usar tablas de logaritmos

calcular: $\dfrac{1}{\text{Log}_2 36} + \dfrac{1}{\text{Log}_3 36}$

A) 1/4 B) 1/8 C) 1/2 D) 1/6 E) N.A.

Ejercicio : Si: $\text{Log}_2 3 = x$; Hallar: $\text{Log}_{24} 64$

A) $\dfrac{5}{1+x}$ B) $\dfrac{6}{3+x}$ C) $\dfrac{6}{x+4}$

D) $\dfrac{5}{4+x}$ E) $\dfrac{5}{3+x}$

Ejercicio : Calcular el valor numérico de:

$\text{Log}_2 3 \cdot \text{Log}_3 4 \cdot \text{Log}_4 5 \cdot \text{Log}_5 6 \ldots\ldots \text{Log}_{1\,023} 1\,024$

A) 100 B) 10 C) 1 D) 0 E) N.A.

Ejercicio : Log a + Log b = Log (a + b); si y solo si: (a ; b > 1)

A) a = b = 0 B) $a = \dfrac{b^2}{(1-b)}$ C) a = b = 1

D) $a = \dfrac{b}{(b-1)}$ E) a/b = 2

Ejercicio : Si: $\sqrt{x+ab} - \sqrt{x-ab} = ab$; $\sqrt{x+ab} + \sqrt{x-ab} = \text{Log}y$ señalar el valor de "y"

A) a B) b C) ab D) a/b E) 100

Ejercicio : Al resolver la ecuación Logarítmica:

Log (2 - x) + Log (3 - x) = Log 2 + 1; su conjunto solución es:

A) {7; 2} B) {-7; 2} C) {7} D) {2} E) {-2}

Ejercicio : Hallar un valor de $\sqrt{x}$ en:

$$\text{Log}_2 x - 8 \text{ Log}_{x^2} 2 = 3$$

A) 5 B) 6 C) 3 D) 4 E) 2

Ejercicio : Indicar la raíz de:

$$\log \sqrt{x-21} = 1 - \frac{1}{2} \log x$$

A) 25 B) -4 C) 4 D) 22 E) 5

Ejercicio : Resolver: $x^{\log x} - \left(\dfrac{10}{\sqrt[6]{x}}\right)^6 = 0$, e indicar el producto de sus raices.

A) 10^{-2} B) 10^{-1} C) 10 D) 10^2 E) 1

Ejercicio 10 : Resolver:

$$x + \text{Log}\,(1 + 2^x) = x\,\text{Log}\,5 + \text{Log}\,72$$

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

Ejercicio 11 : Sabiendo que:

$$\text{Log}\,\sqrt[3]{a^2\left(3-2\sqrt{2}\right)} = \frac{4}{3}(1-b)$$

Calcular: $\text{Log}_a\sqrt{\left[a\left(\sqrt{2}+1\right)\right]^3}$

A) a **B)** b **C)** -3a **D)** -3b **E)** 0

Ejercicio 12 : Resolver para "x":

$$\text{Log}\,(2x-1)^n + \text{Log}\,(x-1)^{10^{\text{Logn}}} = n$$

A) n ; -5/2 **B)** 3 **C)** n ; -3
D) -5 **E)** n ; 1

Ejercicio 13 : Calcular el producto de las soluciones de:

$$\frac{\text{Log}_2 x + \text{Log}_x 2}{2 - \text{Log}_x 2} = \frac{5}{3}$$

A) $4\sqrt[3]{2}$ **B)** $8\sqrt[3]{2}$ **C)** $\sqrt[3]{16}$

D) $8\sqrt{3}$ **E)** N.A.

Clave de Respuestas

1. C	2. B	3. B	4. D	5. E
6. E	7. D	8. A	9. B	10. C
11. D	12. B	13. B		

EJERCICIOS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA
Organizados por las Academias:
César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

1. Si: $\log_2\left(\log_3\left(\log_{10} x\right)\right) = 1$. Hallar: logx

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 9 **E)** 6

Resolución:

Aplicando la propiedad ; $\boxed{\log_b A = N \Rightarrow A = b^N}$; obtenemos:

$$\log_3\left(\log_{10} x\right) = 2^1 \Rightarrow \log_3\left(\log_{10} x\right) = 2 \quad \ldots(I)$$

Nuevamente aplicamos la misma propiedad; en **(I)**; obteniendo:

$\log_{10} x = 3^2 \Rightarrow \log_{10} x = 9$ *(La base 10 del logaritmo de "x" se sobreentiende)* $\therefore$ $\log x = 9$ **Rpta. D**

2. Si: $x \log a + y \log b = \log(ab)$. Hallar: $\dfrac{\log b}{\log a}$

A) $\dfrac{1-x}{1+y}$ **B)** $\dfrac{x-1}{y-1}$ **C)** $\dfrac{x-1}{1-y}$ **D)** 1 **E)** $\dfrac{x+y}{x-y}$

Resolución:

Aplicando la propiedad: $\log(A \cdot B) = \log A + \log B$; obtenemos:

$$x\log a + y\log b = \log a + \log b \text{ ; transponemos términos:}$$

$$x\log a - \log a = \log b - y\log b \text{ ; factorizamos en ambos miembros:}$$

$$(x-1)\log a = (1-y)\log b \Rightarrow \therefore \frac{x-1}{1-y} = \frac{\log b}{\log a}$$ **Rpta. C**

3. Hallar "x" si: $\log_2 x + \log_4 x^2 + \log_8 x^3 = 6$

A) 4 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 5 **E)** N.A.

Resolución:

Aplicando la propiedad: $\boxed{\log_b A = \dfrac{\log A}{\log b}}$; obtenemos:

$$\log_2 x + \frac{\log x^2}{\log 4} + \frac{\log x^3}{\log 8} = 6$$

$$\log_2 x + \frac{2\ \log x}{\log 2^2} + \frac{3\ \log x}{\log 2^3} = 6$$; Aplicando la propiedad: $\log A^n = n \log A$

$$\log_2 x + \frac{\not{2}\ \log x}{\not{2}\log 2} + \frac{\not{3}\ \log x}{\not{3}\ \log 2} = 6$$

$$\log_2 x + \log_2 x + \log_2 x = 6 \Rightarrow \not{3}\log_2 x = \not{6}$$

$$\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 2^2$$

$$\therefore \quad x = 4$$ **Rpta. A**

4. Efectuar: $S = \log_4 32 + \log_{625}(1/125) + \log_{3\sqrt[4]{3}} 243\sqrt[5]{27}$

A) 6,4 **B)** 6,23 **C)** 6 **D)** 5 **E)** 1

Resolución:

Sabemos que:

$32 = 2^5$; $1/125 = 5^{-3}$	$625 = 5^4$
$243\ \sqrt[5]{27} = 3^5 \cdot 3^{3/5} = 3^{28/5}$	$3\ \sqrt[4]{3} = 3 \cdot 3^{1/4} = 3^{5/4}$

Luego: $S = \log_{2^2} 2^5 + \log_{5^4} 5^{-3} + \log_{3^{5/4}} 3^{28/5}$; Aplicando la propiedad: $\log_{A^m} A^n = \dfrac{n}{m}$

Obtenemos: $S = \left(\dfrac{5}{2}\right) + \left(\dfrac{-3}{4}\right) + \left(\dfrac{28/5}{5/4}\right) = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{4} + \dfrac{112}{25}$

Damos común denominador; obteniendo: $S = \dfrac{250 - 75 + 448}{100} = \dfrac{623}{100} = 6{,}23$

Rpta. B

5. Si: $2^{\log_2(2x+3)} + 5^{\log_5(x+7)} = 7^{\log_7(2x+18)}$. Entonces: $\log_{\sqrt[3]{2}} x$, es:

A) 2 **B)** 4 **C)** 9 **D)** 8 **E)** N.A.

Resolución:

Aplicando la propiedad: $b^{\log_b N} = N$; obtenemos:

$(2x+3) + (x+7) = (2x+18)$; Resolviendo dicha ecuación, se obtiene:

$3x + 10 = 2x + 18 \Rightarrow \therefore x = 8$

Luego: $\log_{\sqrt[3]{2}} x = \log_{\sqrt[3]{2}} 8 = \log_{2^{1/3}} 2^3 = \dfrac{3}{1/3} = 9 \therefore \log_{\sqrt[3]{2}} x = 9$ **Rpta. C**

6. Sea: $e^x = 2^{\log e}$. Hallar: Antilog x

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 9 **E)** 6

Resolución:

Tomamos "log"; en ambos miembros:

$\log e^x = \log 2^{\log e}$; Por propiedad: $\log A^n = n \log A$

$\log e^x = \log e \cdot \log 2 \Rightarrow x \log e = \log e \cdot \log 2 \Rightarrow x = \log 2$ ...(I)

Luego: Antilog x = Antilog$_{10}$ x = 10^x ...(II)

10 → *se sobreentiende*

Reemplazamos (I) en (II):

$\text{Antilog } x = 10^{\log 2} = 10^{\log_{10} 2} = 2 \Rightarrow \therefore \text{Antilog } x = 2$ **Rpta. B**

¿SABIAS QUE...

En la calculadora hay una tecla $\boxed{x^y}$ que permite elevar un número positivo a cualquier potencia.

Por ejemplo para calcular $(0{,}95)^2$ hacemos:

$0{,}95 \; \boxed{x^y} \; 2 = \boxed{y}$ obtenemos el resultado.

¿Por qué para $(-2)^3$ la calculadora da -8 y para $(-2)^{0,5}$ se encapricha y da error?

La media y la calculadora

Las calculadoras que tienen funciones estadísticas permiten calcular la media de manera muy simple.

En la máquina debe aparecer la notación SD en la parte superior de la pantalla.

Para acumular los datos hacemos:

1er. dato $\boxed{x}$ frecuencia $\boxed{M+}$

2do. dato $\boxed{x}$ frecuencia $\boxed{M+}$

…etcétera.

Luego de ingresar todos los datos, apretamos la tecla $\overline{x}$ y obtenemos la media buscada.

Capítulo 14 Funciones Exponenciales y Logarítmicas

14.1 FUNCIONES

El concepto de función es muy importante en Matemática. En matemáticas elementales una función, establece usualmente una correspondencia entre dos conjuntos de números tales que 2 pares ordenados diferentes no tienen el mismo primer elemento.

Existen muchas maneras de establecer esa correspondencia, ya sea por tablas gráficas, fórmulas etc.

*) El costo del envio de un paquete por correo, está determinado por su peso, un empleado postal puede estimar el precio del envío mediante el uso de una tabla en la que está indicado el costo para cada peso.

**) Las gráficas se utilizan para relacionar datos estadísticos como por ejemplo: el número de estudiantes que cursan trigonometría en determinados años.

***) La fórmula: $A = \pi R^2$, permite calcular el área de un círculo si se conoce el radio (R)

Note que cada uno de los métodos anteriores establece una correspondencia entre dos conjuntos de números.

UNA FUNCIÓN CONSTA DE TRES PARTES:

1. Un conjunto llamado "Dominio" de la función
2. Un conjunto asociado llamado "Recorrido" de la función cada elemento de ese conjunto es la imagen de cuando menos un elemento del Dominio, pero no puede existir 2 imágenes para un sólo elemento del Dominio todo conjunto que contiene (propio o impropiamente) al recorrido recibe el nombre de Codominio, Contradominio o Rango de la función.
3. En cursos más avanzados una función se define, en términos de conjuntos como sigue:

14.1.1 DEFINICIÓN:

Una función es un conjunto de pares ordenados, tales que para cada primer elemento del par (x,y) existe un segundo elemento determinado en forma única. El conjunto de los primeros elementos se llama **Dominio** y de los segundos **Recorrido o Rango**.

14.1.2 NOTACIÓN:

Para las funciones se utilizan notaciones especiales. La regla empleada se designa corrientemente por: f; g; t; sen; tg y otros símbolos. La letra "x" representa generalmente un elemento arbitrario del dominio de la función y recibe el nombre de variable independiente. La letra "y" se utiliza comúnmente para representar una **Imagen** arbitraria y recibe el nombre de variable dependiente.

El símbolo $f(x)$ denota la imagen asignada a "x" por la función f y existe dos maneras de leerlo:

"f en x" y "f de x"

Ejemplo 1: Si tenemos los conjuntos: A = { 1, 3, 5, 7} y B = {2, 4, 6, 8}

Luego, una función de A en B, se escribe como:

$$f = \{ (1, 2); (3,4); (5,6); (7,8) \}$$

→ Pares Ordenados.

Nota: Al primero de los conjuntos se le llama "Conjunto de Partida" y al segundo se le llama "Conjunto de llegada"

14.1.3 DOMINIO DE LA FUNCIÓN "f"

Se le representa como "D_f", es el conjunto de los primeros elementos de los pares ordenados en una función, siendo estos:

$$D_f = \{ 1 , 3 , 5 , 7 \}$$

14.1.4 RANGO DE LA FUNCIÓN "f"

Se representa como "R_f" es el conjunto de los segundos elementos de los pares ordenados en una función, siendo estos:

$$R_f = \{2, 4, 6, 8\}$$

Ejemplo 2 : Dados los conjuntos: A = { a, b, c, d} y B = { p, q, r ,s}

Luego, una función A en B, se escribe como: $f = \{ (a,p); (b,q); (c,r); (d,s) \}$

Dominio f (D_f): $D_f = \{ a , b , c , d \}$ Rango de $f(R_f)$: $R_f = \{ p, q, r, s \}$

14.1.5 GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN:

Como una función es un conjunto de pares ordenados (x,y), la representación gráfica se hace en el plano cartesiano.

Ejemplo 1: Graficar la función: $y = 2x - 1$; determinar su dominio y rango.

Resolución:

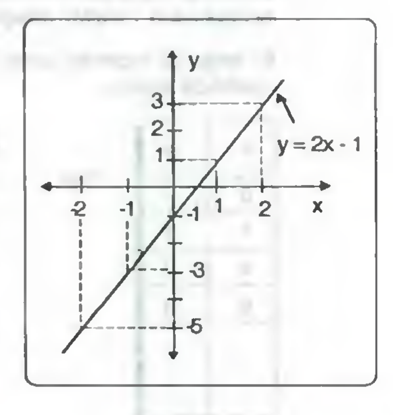
Para construir la gráfica en primer lugar se realiza la tabulación, como veremos a continuación.

$y = 2x - 1$

Para:
$x = 0 \rightarrow y = 2(0) - 1 \rightarrow y = -1$
$x = 1 \rightarrow y = 2(1) - 1 \rightarrow y = 1$
$x = -1 \rightarrow y = 2(-1) - 1 \rightarrow y = -3$
$x = 2 \rightarrow y = 2(2) - 1 \rightarrow y = 3$
$x = -2 \rightarrow y = 2(-2) - 1 \rightarrow y = -5$
⋮

x	y
0	-1
1	1
-1	-3
2	3
-2	-5
⋮	⋮

Luego, con los valores obtenidos los ubicamos en el plano cartesiano, veamos:



Dominio: Son todos los valores que puede tomar "x"

$D_f = < -\infty , +\infty >$

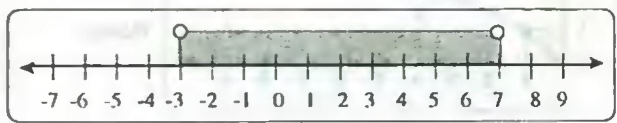
Rango: Son todos los valores que puede tomar "y"

$R_f = < -\infty , +\infty >$

Notas:

I) La representación <a , b> se llama "intervalo abierto" y significa que se deben considerar a todos los números entre "a" y "b" osea se excluye a los extremos "a" y "b" (mejor dicho no se consideran).

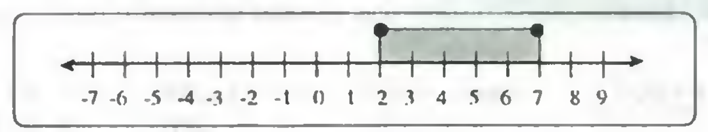
Ejemplo: Representar gráficamente: $x \in < -3, 7 >$



Se deben considerar todos los números entre -3 y 7; pero no a los extremos (-3 y 7). La forma de expresar que los extremos no son parte del conjunto de números, es con dos bolitas vacias tal como se muestra en la figura.

II) La representación [a, b] se llama "Intervalo cerrado" y significa que se debe considerar a todos los números desde "a" hasta "b" incluido estos.

Ejemplos 1 : Representar gráficamente: $x \in [2, 7]$



Las bolitas negreadas significa que en el conjunto de números, se debe considerar a los extremos.

Ejemplo 2 : Trazar la gráfica de la función: $f = \{ (x, y)/y = \sqrt{x} \ ; x \geq 0 \}$

Determinar su dominio y rango.

Resolución:

- En primer lugar, tabulamos dando valores a "x" ≥ cero ya que si damos valores menores que cero, resultan imaginarios
- En segundo lugar los valores que le damos a "x", deben ser números que tengan raíz cuadrada exacta.

x	y
0	0
1	1
4	2
9	3
.	.
.	.
.	.

$$y = \sqrt{x}$$

Para: $x = 0 \rightarrow y = \sqrt{0} \rightarrow y = 0$

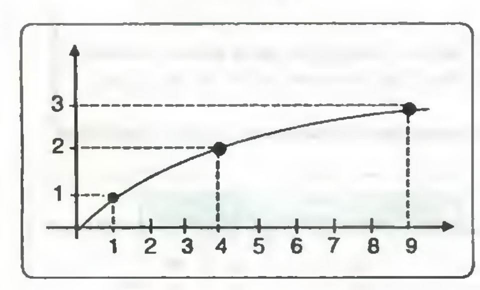
$x = 1 \rightarrow y = \sqrt{1} \rightarrow y = 1$

$x = 4 \rightarrow y = \sqrt{4} \rightarrow y = 2$

$x = 9 \rightarrow y = \sqrt{9} \rightarrow y = 3$

⋮ ⋮ ⋮

Luego, los valores obtenidos los ubicamos en el plano cartesiano, veamos:



Dominio:

$$D_f = [0, +\infty>$$

Rango:

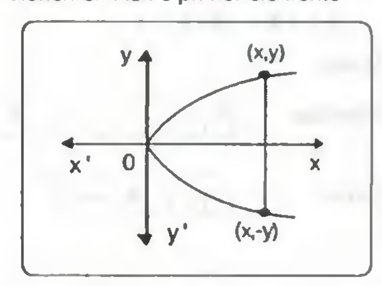
$$R_f = [0, +\infty>$$

OBSERVACIONES:

I) En el campo de los números reales la raíz cuadrada sólo tiene valores positivos.

II) Si tuviéramos un gráfico de la forma que se muestra, ya no sería una función, por tener 2 pares ordenados con el mismo primer elemento, veamos la gráfica, donde los pares ordenados son: (x , y) y (x , -y)

Tienen el mismo primer elemento



Propiedad:

La gráfica de toda función tiene la siguiente propiedad; cuando se traza una recta vertical por cualquier punto de su dominio intersecta a la curva (gráfica) solamente en un punto.

Ejemplo 3: Sea: h {(x,y)/y = |x|}. Hallar el dominio y rango de "h" y dibujar la gráfica de "h".

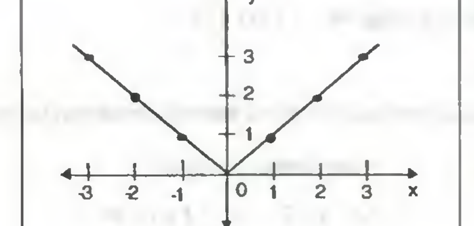
Resolución:

x	y
0	0
± 1	1
± 2	2
± 3	3
.	.
.	.
.	.

Por tabulación, obtenemos: $y = |x|$ valor absoluto

Para:

$x = 0$	→	$y = \|0\|$	→	$y = 0$
$x = \pm 1$	→	$y = \|\pm 1\|$	→	$y = 1$
$x = \pm 2$	→	$y = \|\pm 2\|$	→	$y = 2$
$x = \pm 3$	→	$y = \|\pm 3\|$	→	$y = 3$
⋮		⋮		⋮



Luego, los valores obtenidos los ubicamos en el plano cartesiano.

Dominio:

$$D_h = \langle -\infty , +\infty \rangle$$

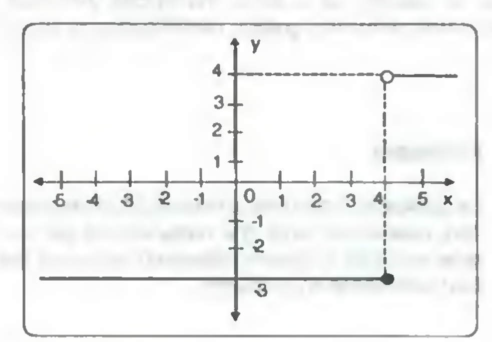
Rango:

$$R_h = [0 , +\infty \rangle$$

Ejemplo 4: Encontrar el dominio y el rango de la función y trazar la gráfica.

$$y = \begin{cases} -3; & \text{si: } x \leq 4 \\ +4; & \text{si: } x > 4 \end{cases}$$

Resolución



- La expresión dada se puede escribir asi:

$y = -3;$ si: $x \leq 4$

$y = +4;$ si: $x > 4$

Luego:

Dominio: $D_f = \langle -\infty, +\infty \rangle = \mathbb{R}$

Rango: $R_f = \{-3, +4\}$

14.1.6 FUNCIÓN LINEAL:

La función lineal es de la forma: $f(x) = ax + b$, donde a, b $\in \mathbb{R}$ (R = Números Reales). Son funciones lineales o de primer grado, las siguientes:

$f(x) = 2x - 3$; $g(x) = 3x + 5$; $h(x) = \frac{1}{3}x + 6$; etc.

- La expresión gráfica de la función lineal es una recta. En caso de que una de las variables sea acotada, la gráfica de la función es una parte de la recta.
- Para graficar una recta basta conocer dos de sus puntos. Los más apropiados son los interceptos.
- Un intercepto con "x" es un punto común a la recta (o curva) y al eje x, para determinarlo en la ecuación dada se iguala a cero la variable "y".
- Un intercepto con "y" es un punto común a la recta (o curva) y al eje y, para determinarlo en la ecuación dada se iguala a cero la variable "x".

Ejemplo 1: Graficar y hallar el dominio y rango de: $f(x) = 2x - 3$

Resolución:

Como es una función lineal bastará ayudarnos calculando las intersecciones con los ejes.

- Intersección con el eje "y"

Si: $x = 0$ → $f(x) = 2x - 3$

$y = 2x - 3$

$y = 2(0) - 3$

$\therefore$ $y = -3$

- Intersección con el eje "x"

Si: $y = 0$ → $f(x) = 2x - 3$

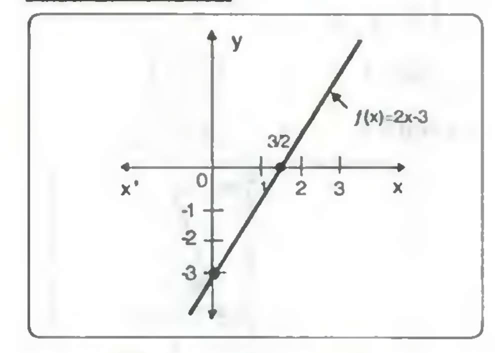
$y = 2x - 3$

$0 = 2x - 3$

$\therefore$ $x = 3/2$

x	$f(x) = y$	
0	–3	→ (Intercepto con y)
3/2	0	→ (Intercepto con x)

La función pasará por los puntos (0,–3) y (3/2,0) y se tendrá:



Dominio = < – ∞ , + ∞ > = R

Rango= < – ∞ , + ∞ > = R

Ejemplo 2: Graficar y hallar el dominio y rango de: g(x) = -3x + 5 ; x ∈ [-2 ; 4 >

Resolución:

En este caso la gráfica de esta función es un segmento ya que la variable "x" es acotada por el intervalo [-2 , 4 >

x < 4

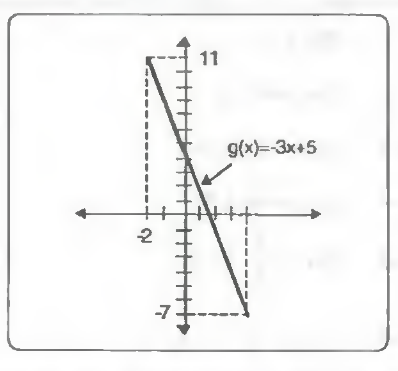
x ≥ –2

- Ahora, hallamos los extremos del segmento así: y = -3x + 5

Para: x = -2 → y = -3(-2) + 5 → y = 11

Para: x = 4 → y = -3(4) + 5 → y = –7

x	y = g(x) = -3x + 5
[- 2	11]
< 4	– 7 >



Dominio: Dg = [-2 , 4 >

Rango: Rg = < -7,11]

Ejemplo 3: Graficar y hallar el dominio y rango de: h(x) = 3x + 1 ; 2 ≤ x < 5

Resolución:

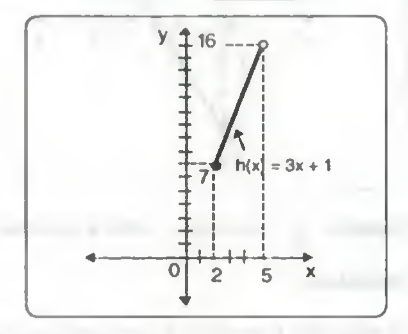
Trabajando tan igual que el problema anterior, obtenemos: $h(x) = 3x + 1;\ 2 \leq x < 5$

$$\boxed{y = 3x + 1} \qquad \begin{cases} \text{i)} & x \geq 2 \\ \text{ii)} & x < 5 \end{cases}$$

Luego: Para: $\boxed{x = 2}$ → $y = 3(2) + 1$ → $\boxed{y = 7}$

Para: $\boxed{x = 5}$ → $y = 3(5) + 1$ → $\boxed{y = 16}$

x	y = h(x) = 3x + 1
[2	7]
< 5	16>



Dominio: Dh = [2 , 5>

Rango: Rh = [7, 16>

TALLER DE EJERCICIOS Nº 46

Graficar y hallar el dominio y rango de las siguientes funciones lineales:

1. $f(x) = 2x - 1;$	si: $x \in [-1 ; 3]$
2. $f(x) = 5x + 3;$	si: $x \in \langle -2 ; 1]$
3. $g(x) = -3x + 2;$	si: $x \in [-3 ; 1]$
4. $g(x) = -4x + 5;$	si: $x \in \langle 1 ; 3]$
5. $h(x) = \frac{2}{3}x + 2;$	si: $x \in [-3 ; 6\rangle$
6. $h(x) = \frac{1}{2}x + 3;$	si: $x \in [-2 ; 4\rangle$

14.1.7 FUNCIÓN CUADRÁTICA

La función cuadrática es de la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$; donde; a, b y c $\in$ R

Son funciones cuadráticas o de segundo grado las siguientes:

$f(x) = 3x^2 - x$; $g(x) = -3x^2 + 2$; $h(x) = x^2 + 6x - 1$; etc.

- La representación gráfica de una función cuadrática es una Parábola que se abre hacia arriba o hacia abajo.

- Toda función cuadrática $(x) = ax^2 + bx + c$; puede ser escrita de la forma; $(x - h)^2 = M(y - k)$. Donde el punto (h,k) es vértice de la parábola.

- En la ecuación: $(x - h)^2 = M(y - k)$

  Sí $M > 0$, entonces la parábola se abre hacia arriba

  Sí $M < 0$, entonces la parábola se abre hacia abajo

Ejemplo 1: Ubica en el plano cartesiano el vértice V(h,k), halla el intercepto con el eje y. Esboza la gráfica de la ecuación:

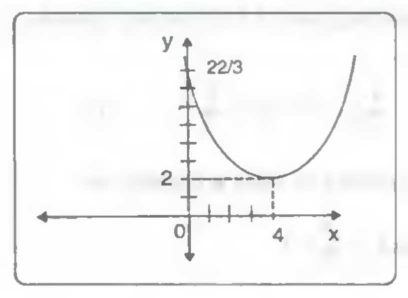
$$(x - 4)^2 = 3(y - 2)$$

Resolución:

La ecuación $(x - 4)^2 = 3(y - 2)$, tiene la forma; $(x - h)^2 = M(y - k)$

Siendo: $h = 4$; $k = 2$ y $M = 3$

Como "M" es mayor que cero, la parábola se abre hacia arriba así:



Para hallar el intercepto con "y" hacemos $x = 0$, obteniendo:

$$(x - 4)^2 = 3(y - 2)$$
$$(0 - 4)^2 = 3(y - 2)$$
$$16 = 3y - 6$$
$$22 = 3y$$
$$\therefore \quad y = \frac{22}{3} = 7,3$$

Ejemplo 2: Ubica en el plano cartesiano el vértice V(h,k). Halla el intercepto con el eje "y". Esboza la gráfica de la ecuación:

$$(x + 4)^2 = -2(y + 1)$$

Resolución:

La ecuación:

$(x + 4)^2 = -2(y + 1)$ tiene la forma $(x - h)^2 = M(y - k)$

Por comparación: $h = -4$; $k = -1$ y $M = -2$

Como $M < 0$; la parábola se abre hacia abajo, veamos:

- Para hallar el intercepto con "y" hacemos: $x = 0$; obteniendo:

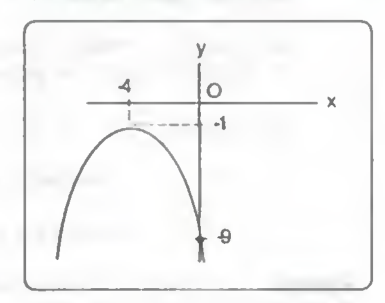
$(x + 4)^2 = -2(y + 1)$

$(0 + 4)^2 = -2(y + 1)$

$16 = -2(y + 1)$

$-8 = y + 1$

$\therefore \quad y = -9$



Ejemplo 3 : Graficar y hallar el dominio y rango de: $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$

Resolución.

"Completando Cuadrados" doy a la ecuación:

$y = 3x^2 - 6x + 5$, la forma $(x - h)^2 = M(y - k)$

Para completar cuadrados se aplica los siguientes pasos:

a) El coeficiente de x^2 debe ser 1; para eso dividimos entre 3 a cada término de la ecuación, veamos:

$$\frac{y}{3} = \frac{3x^2}{3} - \frac{6y}{3} + \frac{5}{3} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3}y = x^2 - 2x + \frac{5}{3} \qquad \text{......(I)}$$

Al coeficiente de "x" o sea 2, le sacamos mitad y se eleva al cuadrado así:

Coeficiente de "x" = 2 ; su mitad $= \frac{2}{2} = 1$

Elevamos al cuadrado $= 1^2 = 1$

Luego, le sumamos y le restamos el resultado 1 hallado a la expresión (I). Obteniendo:

$$\frac{1}{3}y = \underbrace{x^2 - 2x + 1} - 1 + \frac{5}{3} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3}y = \underbrace{x^2 - 2x(1) + 1^2} + \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3}y = (x-1)^2 + \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad (x-1)^2 = \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}$$

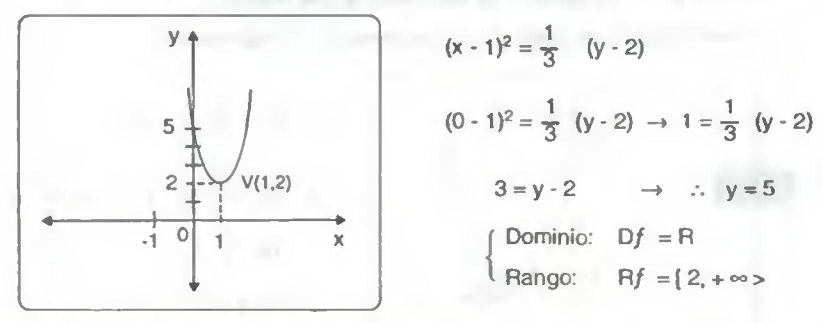
$$\boxed{(x-1)^2 = \frac{1}{3}(y-2)}$$

↓ ↓ ↓

Está expresión tiene la forma: $(x-h)^2 = M(y-k)$

Por comparación: $h = 1$; $k = 2$ y $M = \frac{1}{3}$

- El vértice de la parábola es: $V(h,k) = V(1,2)$
- Como $M > 0$ la parábola se abre hacia arriba, veamos:
- Para hallar el intercepto "y" hacemos: $x = 0$; obteniendo



$$(x-1)^2 = \frac{1}{3}(y-2)$$

$$(0-1)^2 = \frac{1}{3}(y-2) \rightarrow 1 = \frac{1}{3}(y-2)$$

$$3 = y - 2 \quad \rightarrow \quad \therefore \; y = 5$$

Dominio: $Df = \mathbb{R}$
Rango: $Rf = [2, +\infty\rangle$

Ejemplo 4: Graficar y hallar el dominio y rango de: $f(x) = 2x^2 - 12x + 22$

Resolución:

" Completando cuadrados" a la expresión $y = 2x^2 - 12x + 22$, el coeficiente de x^2 debe ser 1. Para conseguirlo dividimos entre 2 a cada término de dicha expresión así:

$$\frac{y}{2} = \frac{2x^2}{2} - \frac{12x}{2} + \frac{22}{2}$$

$$\frac{1}{2}y = x^2 - 6x + 11 \qquad \text{............(I)}$$

- Al coeficiente de "x" le sacamos mitad y luego lo elevamos al cuadrado así:

Coeficiente de "x" = 6 sacamos mitad = $\frac{6}{2} = 3$

Elevamos al cuadrado = $3^2 = 9$

Luego, le sumamos y le restamos el resultado hallado, a la expresión (I) obteniendo:

$$\frac{1}{2}y = \underbrace{x^2 - 6x + 9}_{} - 9 + 11 \rightarrow \frac{1}{2}y = \underbrace{x^2 - 2(x)(3) + 3^2}_{} + 2$$

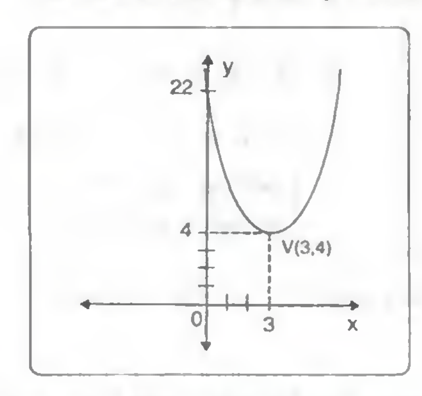
$$\frac{1}{2}y = (x-3)^2 + 2 \rightarrow (x-3)^2 = \frac{1}{2}y - 2$$

$$\boxed{(x-3)^2 = \frac{1}{2}(y-4)}$$

Esta última expresión tiene la forma: $(x-h)^2 = M(y-k)$

Por comparación: $h = 3$; $k = 4$ y $M = \frac{1}{2}$

- El vértice de la parábola es: $V(h,k) = V(3,4)$
- Como $M > 0$, la parábola se abre hacia arriba, veamos:
- Para hallar el intercepto con "y" hacemos: $x = 0$: obteniendo:



$$(x-3)^2 = \frac{1}{2}(y-4)$$

$$(0-3)^2 = \frac{1}{2}(y-4) \rightarrow 9 = \frac{1}{2}(y-4)$$

$$18 = y - 4$$

$$\therefore \boxed{y = 22}$$

Luego: Dominio: $Df = \langle -\infty, +\infty \rangle = R$

Rango: $Rf = [+4, +\infty\rangle$

Observación: R → *significa que toma todos los números reales*

Ejemplo 5: Graficar, hallar el dominio y el rango de: $g(x) = 2x^2 - 16x + 29$; $x \in [1,5\rangle$

Resolución

"Completando cuadrados" a la expresión: $y = 2x^2 - 16x + 29$, el coeficiente de x^2 debe ser 1, para conseguirlo dividimos entre 2 a cada término de dicha expresión asi:

$$\frac{y}{2} = \frac{2x^2}{2} - \frac{16x}{2} + \frac{29}{2}$$

$$\frac{y}{2} = x^2 - 8x + \frac{29}{2} \quad \text{.........(I)}$$

Luego, al coeficiente de "x" le sacamos mitad y lo elevamos al cuadrado así:

Coeficiente de "x" = 8; sacamos mitad y lo elevamos al cuadrado así:

Coeficiente de "x" = 8 ; sacamos mitad = $\frac{8}{2} = 4$

Elevamos al cuadrado = $4^2 = 16$

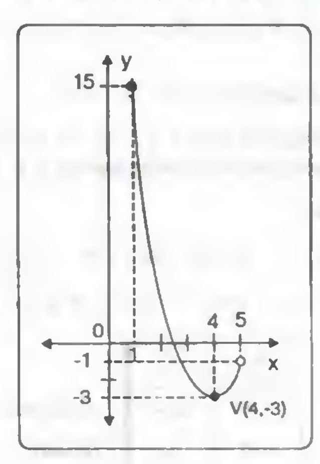
Luego, le sumamos y le restamos el resultado hallado, a la expresión (I) obteniendo:

$$\frac{y}{2} = \underbrace{x^2 - 8x + 16} - 16 + \frac{29}{2} \rightarrow \frac{y}{2} = \underbrace{x^2 - 2(x)(4) + 4^2} - \frac{3}{2}$$

$$\frac{y}{2} = (x-4)^2 - \frac{3}{2} \rightarrow (x-4)^2 = \frac{y}{2} + \frac{3}{2}$$

$$\boxed{(x-4)^2 = \frac{1}{2}(y+3)}$$

Esta última expresión tiene la forma: $(x - h)^2 = M(y - k)$



Por comparación: $h = 4$; $k = -3$ y $M = \frac{1}{2}$

- El vértice de la parábola V(h,k) = V(4,-3)
- Como M > 0, la parábola se abre hacia arriba, veamos:
- Como la función $g(x) = 2x^2 - 16x + 29$

Esta definida sólo para [$x \in [1,5>$, hallo los puntos cuyas primeras componentes son: 1 y 5

Tabulando:

Para $\boxed{x = 1}$ $y = 2(1)^2 - 16(1) + 29 \rightarrow \boxed{y = 15}$

Para $\boxed{x = 5}$ $y = 2(5)^2 - 16(5) + 29 \rightarrow \boxed{y = -1}$

x	y	
1	15	(Cerrado)
5	-1	(Abierto)

Luego: Dominio: Dg = [1 ; 5>

Rango: Rg = [-3 ; 15]

Ejemplo 6 : Graficar, hallar el dominio y el rango de: $h(x) = x^2 + 10x + 19$; $x \in \,<-7 , 1>$

Resolución:

"Completando cuadrados" a la expresión: $y = x^2 + 10x + 19$, el coeficiente de x^2 debe ser 1.

En este caso ya lo tenemos. Además al coeficiente de "x" se le saca su mitad y luego se le eleva al cuadrado así:

Coeficiente de "x" = 10; sacamos mitad $= \frac{10}{2} = 5$

Elevamos al cuadrado $= 5^2 = 25$

Luego, le sumamos y le restamos el resultado hallado, a la expresión (I), obteniendo:

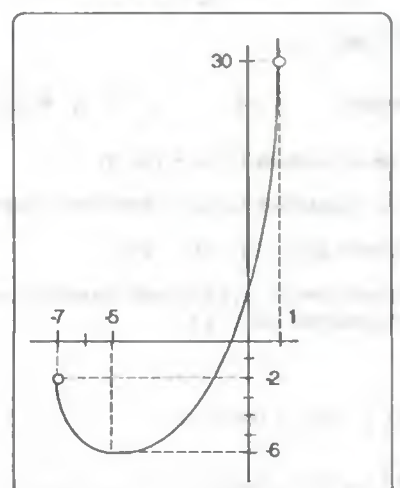
$$y = \underbrace{x^2 + 10x + 25}\, - 25 + 19 \rightarrow y = \underbrace{x^2 + 2(x)(5) + 5^2} - 6$$

$$y = (x+5)^2 - 6 \rightarrow (x+5)^2 = y + 6$$

Donde: $\boxed{(x+5)^2 = 1(y+6)}$

Esta última expresión tiene la forma: $(x - h)^2 = M(y + 6)$

Por comparación: $h = -5$; $k = -6$ y $M = 1$



- El vértice de la parábola $V(h,k) = V(-5,-6)$
- Como $M > 0$, la parábola se abre hacia arriba, veamos:
- Como la función $h(x) = x^2 + 10x + 19$

Esta definida sólo para $x \in <-7, 1>$ hallo los puntos cuyas primeras componentes son: 1,-7

Tabulando:

Para $x = 1 \rightarrow y = (1)^2 + 10(1) + 19 \rightarrow \boxed{y = 30}$

Para $x = -7 \rightarrow y = (-7)^2 + 10(-7) + 19 \rightarrow \boxed{y = -2}$

x	y	
<1	30>	(Cerrado)
< -7	-2>	(Abierto)

Luego: Dominio: $Dh = <-7,1>$

Rango: $Rh = [-6,30>$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 47

A. Ubica en el plano cartesiamo el vértice V(h,k); halla el intercepto con el eje y. Esboza la gráfica de las siguientes ecuaciones:

1. $(x - 3)^2 = 3(y - 1)$	**5.** $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}(y - 5)$
2. $(x - 5)^2 = \frac{1}{3}(y + 3)$	**6.** $(x - 1)^2 = \frac{1}{2}y$
3. $(x + 1)^2 = -2(y + 4)$	**7.** $x^2 = y + 1$
4. $(x + 4)^2 = 5y$	**8.** $(x - 5)^2 = -2y$

B. Para cada función siguiente:

- "Completa cuadrados" y dale la forma: $(x - h)^2 = M(y - k)$
- Halla su intercepto con el eje y. Grafícala
- Halla su dominio y su rango

9. $f(x) = 3x^2 - 6x + 9$	**14.** $f(x) = 2x^2 - 6x + 7;\ x \in [1,4]$
10. $f(x) = 2x^2 - 10x + 13$	**15.** $g(x) = -2x^2 - 8x - 5;\ x \in [-3,1\rangle$
11. $f(x) = -2x^2 - 4x - 6$	**16.** $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2;\ x \in [-1,4]$
12. $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 12$	**17.** $h(x) = 2x^2 + 4x + 11;\ x \in \langle -4,1\rangle$
13. $g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - \frac{13}{3}$	**18.** $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{21}{2};\ x \in \langle 2,6]$

RESPUESTAS TALLER

9. V(1,6)	Dominio: $Df = R$ Rango: $Rf = [6, \infty\rangle$		**12.** V(4,4)	Dominio: $Df = R$ Rango: $Rg = [4, +\infty\rangle$	
10. V = (5/2 , -1/2)	Dominio: $Df = R$ Rango: $Rf = [-1/2, +\infty\rangle$		**13.** V(3, -4/3)	Dominio: $Dg = R$ Rango: $Rg = [-4/3, -\infty$	
11. V(-1.-4)	Dominio: $Df = R$ Rango: $Rf = [-4, -\infty\rangle$		**14.** $V\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$	Dominio: [1,4] Rango: [, 15]	

15. V (-2,3)	Dominio: [-3,1> Rango: 15,	**17.** V(-1,9)	Dominio: <-4, 1> Rango:
16. V(1,3/2)	Dominio : [-1, 4] Rango: 2, 6]	**18.** V(3,-6)	Dominio: <2, 6] Rango:

14.2 OPERACIONES CON FUNCIONES

A continuación estudiaremos la adición, sustracción y multiplicación de funciones.

1. La función suma se denota por $(f + g)(x)$ y se define por:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x); \qquad x \in (D_f \cap D_g)$$

2. La función diferencia se denota por $(f - g)(x)$ y se define por:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x); \qquad x \in (D_f \cap D_g)$$

3. La función producto se denota por $(f.g)(x)$ y se define por:

$$(f.g)(x) = f(x).g(x); \qquad x \in (D_f \cap D_g)$$

Ejemplo 1: Dadas las funciones: $f(x) = x + 6; \quad x \in \langle -2,7]$;
$g(x) = x - 2; \quad x \in [3,12\rangle$

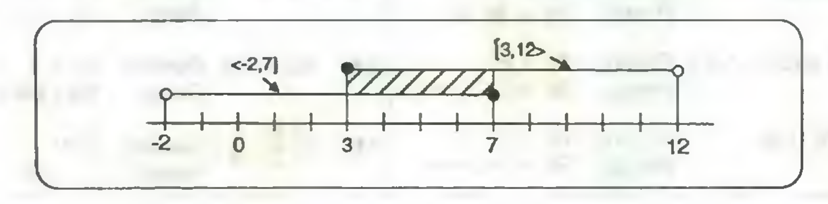
Definir y graficar la función: $f + g$

Resolución:

Dados: $\begin{cases} f(x) = x + 6; & x \in \langle -2,7] \\ g(x) = x - 2; & x \in [3,12\rangle \end{cases}$

Luego: $(f + g)(x) = 2x + 4 \rightarrow$ $y = 2x + 4$ (Nueva función)

* El dominio de esta nueva función es la intersección de los dominios de f y de g.



Luego: $D(f + g) = [3,7]$

$\therefore$ $(f + g)(x) = 2x + 4$; $x \in [3,7]$

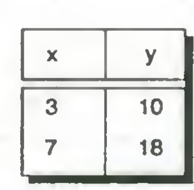
$y = 2x + 4$; $x \in [3,7]$

Ahora calculamos el rango de la nueva función: $y = 2x + 4$

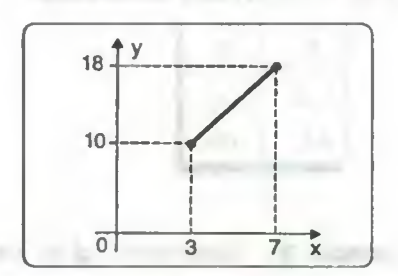
Para: $x = 3$ → $y = 2(3) + 4$ → $y = 10$

Para: $x = 7$ → $y = 2(7) + 4$ → $y = 18$ $\therefore$ Rango: $R(f+g) = [10,18]$

La gráfica de la nueva función sería:



x	y
3	10
7	18



Ejemplo 2 : Determinar $(f - g)(x)$, gráfica, halla su dominio y rango.

$f(x) = 3x + 2$; $x \in [-4 , 5>$

$g(x) = x - 3$; $x \in [-2 , 6]$

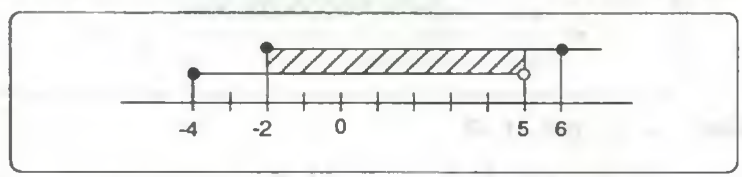
Resolución:

Dados: $\begin{cases} f(x) = 3x + 2; & x \in [-4 , 5> \\ g(x) = x - 3; & x \in [-2 , 6] \end{cases}$

Luego: $(f - g)(x) = (3x + 2) - (x - 3) = 3x + 2 - x + 3$

$y = 2x + 5$ (Nueva función)

* El dominio de esta nueva función es la intersección de los dominios de f y de g, veamos:



Luego: $D(f - g) = [-2 , 5>$

$\therefore$ $(f - g)(x) = 2x + 5$; $x \in [-2 , 5>$

$y = 2x + 5; \quad x \in [-2, 5>$

Ahora, calculamos el rango de la nueva función: $y = 2x + 5$

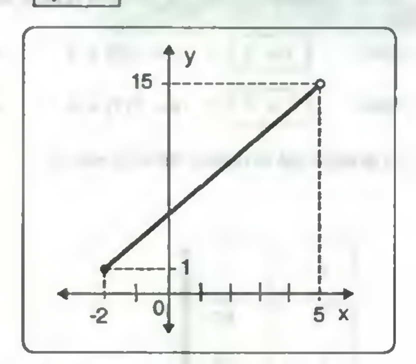
Para: $x = -2 \mapsto y = 2(-2) + 5 \rightarrow y = 1$

Para: $x = 5 \mapsto y = 2(5) + 5 \rightarrow y = 15$

Rango: $R(f - g) = [1, 15>$

La gráfica de la nueva función sería:

x	y
[-2	1]
< 5	15>



Ejemplo 3 : Determinar; $(f.g)(x)$, gráfica, halla su dominio y rango:

$f(x) = x + 1; \quad x \in [-3, 4]$

$g(x) = x - 3; \quad x \in [-1, 5]$

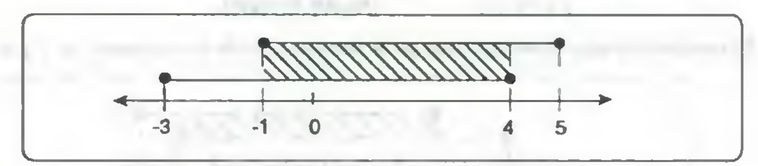
Resolución:

Dados: $\begin{cases} f(x) = x + 1 & ; \quad x \in [-3, 4] \\ g(x) = x - 3 & ; \quad x \in [-1, 5] \end{cases}$

Luego: $(f \cdot g)(x) = (x + 1)(x - 3) = x^2 - 2x - 3$

$y = x^2 - 2x - 3$ (Nueva función)

* El dominio de esta nueva función es la intersección de los dominios de f y de g, veamos:



Luego: $D(f \cdot g) = [-1, 4]$

$(f \cdot g)(x) = x^2 - 2x - 3; \quad x \in [-1, 4]$

$y = x^2 - 2x - 3; \quad x \in [-1, 4]$

Ahora para graficar:

- A la función: $y = x^2 - 2x - 3$, le damos la forma de: $(x - h)^2 = M(y - k)$ "Completando cuadrados"

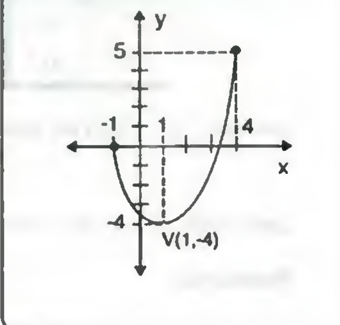
$$y = x^2 - 2x + 1 - 1 - 3; \qquad x \in [-1 , 4]$$

$$y = (x - 1)^2 - 4 \quad \rightarrow \quad (x - 1)^2 = 1(y + 4)$$

Por comparación:

$$\left.\begin{array}{l}(x - 1)^2 = 1(y + 4)\\(x - h)^2 = M(y - k)\end{array}\right\} \therefore \boxed{V(h,k) = V(1,-4)}$$

Como M > 0, la parábola se abre hacia arriba, veamos:



De la función: $y = x^2 - 2x - 3$

Para: $\boxed{x = -1} \rightarrow y = (-1)^2 - 2(-1) - 3 = 0$

Para: $\boxed{x = 4} \rightarrow y = (4)^2 - 2(4) - 3 = 5$

x	y
[-1	0]
[4	5]

Luego: $\boxed{\text{Rango: } R(f \cdot g) = [-4 , 5]}$

Ejemplo 4: Dadas las funciones: $f(x) = x + 7 \quad ; \quad x \in [-1 , 3]$

$g(x) = x - 3 \quad ; \quad x \in \langle 1 , 6]$

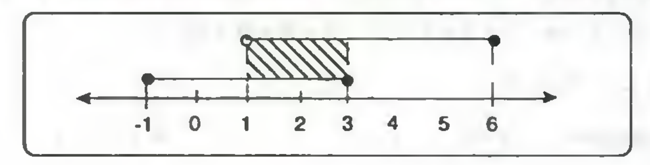
Determinar: $(f - g)(x)$, grafícala. Halla su dominio y su rango.

Resolución:

Dados: $\begin{cases} f(x) = x + 7; & x \in [-1 , 3] \\ g(x) = x - 3; & x \in \langle 1 , 6] \end{cases}$

Luego: $(f - g)(x) = (x + 7) - (x - 3) = 10 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 10}$ (Nueva función)

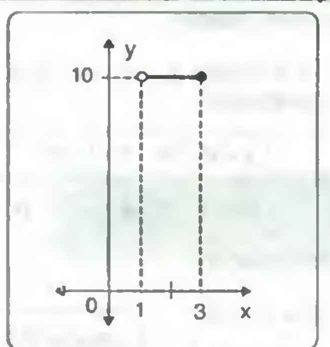
* El dominio de esta nueva función es la intersección de los dominios de f y de g.



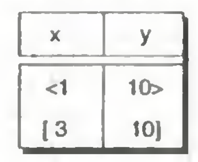
Luego: $D(f - g) = \langle 1 \, , 3]$

$(f - g)(x) = 10; \quad x \in \langle 1 \, , 3]$

$y = 10;$	$x \in \langle 1 \, , 3]$



La gráfica de la nueva función sería:



x	y
<1	10>
[3	10]

Ejemplo 5 : Dada las funciones: $f(x) = 2x^2 - 1; \quad x \in \langle -4 \, ; 5];$
$g(x) = -x^2 - 2; \quad x \in [-1 \, ; 6\rangle$

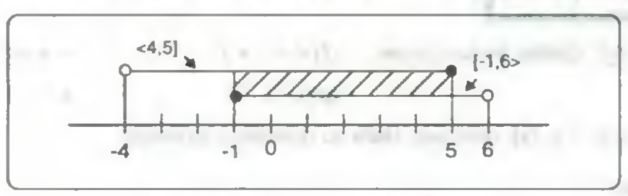
Determinar: $(f + g)(x)$, grafícala. Halla su dominio y su rango.

Resolución:

Dado: $\begin{cases} f(x) = 2x^2 - 1 & ; \quad x \in \langle -4 \, ; 5] \\ g(x) = -x^2 - 2 & ; \quad x \in [-1 \, ; 6\rangle \end{cases}$

Luego: $(f + g)(x) = x^2 - 3 \quad \rightarrow \quad \boxed{y = x^2 - 3}$ (Nueva función)

- El dominio de esta nueva función es la intersección de los dominios de f y de g.



Luego: $D(f + g) = [-1 \, , 5]$

$\therefore \quad (f + g)(x) = x^2 - 3; \quad x \in [-1{,}5]$

$y = x^2 - 3;$	$x \in [-1 \, , 5]$

Ahora para graficar a la función: $y = x^2 - 3$, le damos la forma de: $(x - h)^2 = M(y - k)$, así:

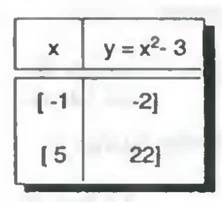
$y = x^2 - 3 \quad \rightarrow \quad y + 3 = x^2 \quad \rightarrow \quad (y + 3) = (x + 0)^2$

$(x + 0)^2 = 1(y + 3)$

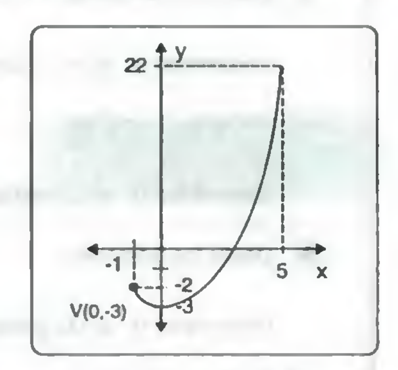
Por comparación: $h = 0$; $k = -3$; $M = 1 \quad \rightarrow \quad V(h,k) = V(0,-3)$

- Como M > 0, la parábola se abre hacia arriba, veamos:

Por tabulación:



x	$y = x^2 - 3$
[-1	-2]
[5	22]



Luego: Dominio: $(f + g)(x) = [-1,5]$

Rango: $(f + g)(x) = [-3,22]$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 48

1. Dadas las funciones: $f(x) = x + 1$; $x \in [-2,7\rangle$;
$g(x) = x - 3$; $x \in [-4,5]$

Determinar: $(f + g)(x)$ grafícala, hallar su dominio y su rango.

2. Dadas las funciones: $f(x) = 2x + 3$; $x \in \langle -1, 3\rangle$;
$g(x) = x - 2$; $x \in \langle -3, 1\rangle$

Determinar: $(f + g)(x)$ grafícala, hallar su dominio y su rango.

3. Dadas las funciones: $f(x) = -5x + 3$; $x \in \langle -4, 3\rangle$;
$g(x) = 3x - 4$; $x \in [-2, 5\rangle$

Determinar: $(f + g)(x)$ grafícala, hallar su dominio y su rango.

4. Dadas las funciones: $f(x) = -3x - 2$; $x \in \langle -\infty, 2]$;
$g(x) = 2x - 2$; $x \in [-2, +\infty\rangle$

Determinar: $(f - g)(x)$, grafícala, hallar su dominio y su rango.

5. Dadas las funciones: $f(x) = x + 5$; $x \in [-4, 5\rangle$;
$g(x) = x - 2$; $x \in [-2, 6]$

Determinar: $(f - g)(x)$, grafícala, hallar su dominio y rango.

6. Dadas las funciones: $f(x) = -3x + 2$; $x \in \langle -5, 3\rangle$;
$g(x) = -2x + 2$; $x \in [-3, 5\rangle$

Determinar: $(f - g)(x)$, grafícala, hallar su dominio y rango.

7. Dadas las funciones: $f(x) = x + 5$; $x \in [-4, 4>$;
$g(x) = x - 2$; $x \in <-3, 5]$

Determinar: $(f \cdot g)(x)$, graficala, hallar su dominio y rango

8. Dadas las funciones: $f(x) = x + 3$; $x \in [-3, 6]$;
$g(x) = x - 1$; $x \in [-4, 2]$

Determinar: $(f \cdot g)(x)$,graficala, hallar su dominio y rango

9. Dadas las funciones: $f(x) = -x$; $x \in [-\infty, 2>$;
$g(x) = -2x$; $x \in <-2, +\infty>$

Determinar: $(f \cdot g)(x)$, graficala, hallar su dominio y rango.

10. Dadas las funciones: $f(x) = x^2 + 3$; $x \in [-3, 4]$;
$g(x) = x^2 + 1$; $x \in <-6, 3]$

Determinar: $(f + g)(x)$, graficala, hallar su dominio y rango.

11. Dadas las funciones: $f(x) = 2x^2 + 3$; $x \in [-2, 5>$;
$g(x) = x^2 - 2$; $x \in [-4, 2]$

Determinar: $(f - g)(x)$, grafícala, hallar su dominio y rango:

12. Dadas las funciones: $f(x) = x^2 + 3$; $x \in [-2, 3>$;
$g(x) = 2x^2 - 3$; $x \in [-4, 1]$

Determinar: $(f + g)(x)$, graficala, hallar su dominio .

RESPUESTAS TALLER

1. Dominio $(f + g) = [-2,5]$
   Rango $(f + g) = [-6,8]$
2. Dominio $(f + g) = <-1,1>$
   Rango $(f + g) = <-2,4>$
3. Dominio $(f + g) =[-2,3>$
   Rango $(f + g) =< -7,3]$
4. Dominio $(f - g) = [-2,2]$
   Rango $(f - g) = [-10,10]$
5. Dominio $(f - g) = [-2,5>$
   Rango $(f - g) = \{7\}$
6. Dominio $(f - g) = [-3,3>$
   Rango $(f - g) = <-3,3]$
7. Dominio $(f.g) = <-3,4>$
   Rango $(f.g) = [-49/5,18>$
8. Dominio $(f.g) = [-3,2]$
   Rango $(f.g) = [-4,5]$
9. Dominio $(f.g) = <-2,2]$
   Rango $(f.g) = [0,8]$
10. Dominio $(f + g) = [-3,3]$
    Rango $(f + g) = [4,22]$
11. Dominio $(f - g) = [-2,2]$
    Rango $(f - g) = [5,9]$
12. Dominio $(f + g) = [-2,1]$
    Rango $(f + g) = [0,12]$

14.3 FUNCIÓN EXPONENCIAL:

Veamos ahora como se define la función exponencial.

Sea: "a" un número real positivo diferente de 1, la función exponencial de base "a" está definida por:

$$f(x) = a^x ; \quad \forall x \in R$$

Como quiera que a > 0, por la condición, entonces a^x es siempre positivo, para todo $x \in R$; por lo tanto el rango de la función f está formado por todos los números reales positivos.

Esto significa en consecuencia que el rango de f está formado por el conjunto de todos los reales positivos.

En resumen, la función exponencial de base "a" es:

$$f(x) = a^x ; \quad a > 0 \quad y \quad a \neq 1$$

$$\text{con: } D_f = R \quad y \quad R_f = [0 , +\infty>$$

El rango nos indica que la gráfica de $f(x) = a^x$ se encuentra sobre el eje x

- Como ejemplos podemos decir que las funciones definidas por:

$$f(x) = 2^x ; \quad g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x ; \quad h(x) = (\pi)^x ; \quad k(x) = (0,1)^x$$

son funciones exponenciales; en cambio,

$$f(x) = (-2)^x ; \quad g(x) = (1)^x ; \quad h(x) = x^x ; \quad k(x) = x^3$$

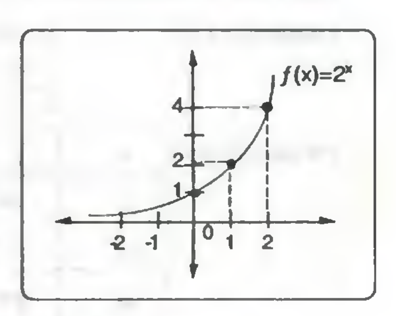
no son funciones exponenciales.

Ejemplo 1 : Dada la función exponencial por $f(x) = 2^x$, construir su gráfica, hallar el dominio y el rango.

Resolución:

Por tabulación:

x	$y = 2^x$	x	$y = 2^x$
0	$2^0 = 1$	1	$2^1 = 2$
-1	$2^{-1} = 1/2$	2	$2^2 = 4$
-2	$2^{-2} = 1/4$	3	$2^3 = 8$
-3	$2^{-3} = 1/8$	⋮	⋮



Dominio: $D_f = R$

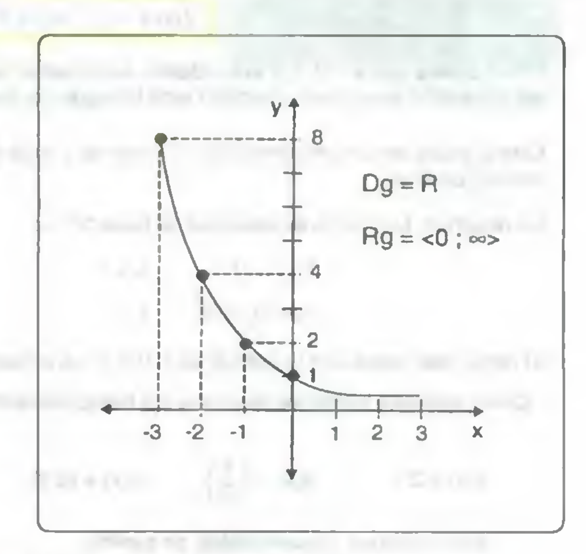
Rango : $R_f = <0 ; \infty>$

Ejemplo 2: Construir la gráfica de la función exponencial definida por: $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; hallar el dominio y el rango.

Resolución:

Por tabulación:

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$;
0	$(1/2)^0 = 1$
-1	$(1/2)^{-1} = 2$
-2	$(1/2)^{-2} = 4$
-3	$(1/2)^{-3} = 8$
⋮	⋮
1	$(1/2)^1 = 1/2$
2	$(1/2)^2 = 1/4$
3	$(1/2)^3 = 1/8$



Ejemplo 3: Para la siguiente función $f(x) = 2^{x+3}$; $x \in$ <-4 , 1]

Halla sus extremos y su intercepto con "y", grafícala, halla su dominio y su rango.

Resolución:

Para hallar la intersección con el eje "y" hacemos: x = 0

Luego: $f(x) = 2^{x+3}$ → $y = 2^{0+3} = 2^3$

$\boxed{y = 8}$

x	y
<–4	1/2>
[1	16]

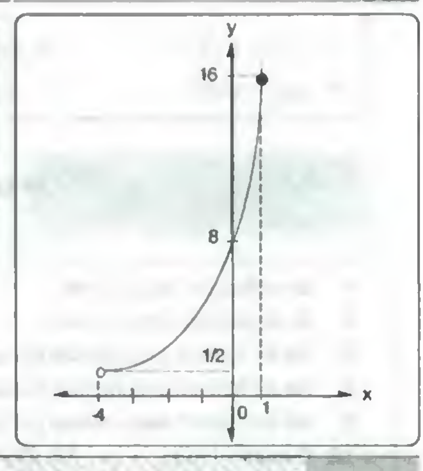
Por tabulación:

x	$y = 2^{x+3}$	-4	$2^{-4+3} = 1/2$
0	$2^{0+3} = 8$	⋮	⋮
-1	$2^{-1+3} = 4$	1	$2^{1+3} = 16$
-2	$2^{-2+3} = 2$	2	$2^{2+3} = 32$
-3	$2^{-3+3} = 1$	3	$2^{3+3} = 64$

Observaciones:

1. *Si la base "a" es un número positivo menor que 1, $f(x) = a^x$ disminuye a medida que el valor de "x" aumenta, es decir, la función es decreciente.*

2. *Si la base "a" es un número mayor que 1, $f(x) = a^x$ aumenta a medida que el valor de "x" aumenta, es decir, la función es creciente.*



Dominio: $\langle -4 , 1]$

Rango: $\langle 1/2 , 16]$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 49

A. Del siguiente grupo de funciones señala, cuáles son y cuáles no son funciones exponenciales e indique por qué.

1. $f(x) = (2,1)^x$	2. $f(x) = (1/5)^x$	3. $f(x) = 1^x$
4. $g(x) = x^2$	5. $g(x) = (-3)^x$	

B. Dadas las siguientes funciones construir sus gráficas:

6. $f(x) = 3^{-x}$	7. $f(x) = 2^{x+1}$	8. $f(x) = 10^x$
9. $g(x) = (1/5)^x$	10. $g(x) = 3^{x-1}$	11. $g(x) = (3/2)^{x+1}$

C. Para cada función siguiente:

a) Halla sus extremos y su intercepto con el eje y

b) Grafícala, halla su dominio y su rango.

12. $f(x) = 3^x$, $x \in [-1 , 3\rangle$	15. $g(x) = (2/5)^x$, $x \in [-1 , 1]$
13. $f(x) = 2^{x+1}$, $x \in \langle -4 , 3\rangle$	16. $g(x) = (1,5)^{1-x}$, $x \in \langle -2 , 2]$
14. $f(x) = 3(2^x)$, $x \in [-2 , 3]$	

D. Teniendo en cuenta la base de las siguientes funciones, indica si son crecientes o decrecientes.

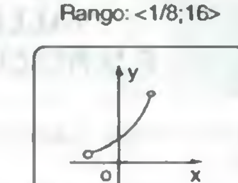
17. $f(x) = (\sqrt{2})^x$	18. $f(x) = (\pi)^x$	19. $f(x) = (0,5)^{-x}$
20. $g(x) = (0,5)^x$	21. $g(x) = (3/\pi)^x$	

RESPUESTAS TALLER

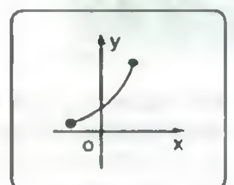
1. Si es función exponencial
2. Si es función exponencial
3. No es función exponencial porque la base debe ser diferente de 1
4. No es función exponencial porque la base es una variable
5. No es función exponencial porque la base es un número negativo

12. Dominio: [-1;3>
Rango: [1/3;27>

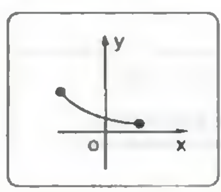
13. Dominio: <-4;3>
Rango: <1/8;16>



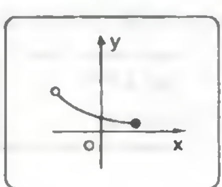
14. Dominio: [-2;3]
Rango: [3/4;24]



15. Dominio: [-1;1]
Rango: [2/5;5/2]



16. Dominio: <-2;2]
Rango: [2/3;27/8>



17. Creciente
18. Creciente
19. Creciente
20. Decreciente
21. Decreciente

14.4 FUNCIÓN LOGARÍTMICA

A la función inversa de: $f(x) = a^x$; a > 1; a> 0, se le denomina función logarítmica de base "a"

Esta función logarítmica de base "a" es denotada por $\log_a x$

Es decir: $f(x) = \log_a x$

Por Ejemplo: Dada $g(x) = (\frac{4}{5})^x$, su inversa será: $f(x) = \log_{4/5} x$

Veamos otros ejemplos:

Si: $g(x) = (\frac{3}{7})^x$, su inversa será la función: $f(x) = \log_{3/7} x$

Si: $g(x) = (\frac{8}{5})^x$, su inversa será la función: $f(x) = \log_{8/5} x$

14.4.1 GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN LOGARÍTMICA:

En la función $f(x) = \log_a x$; la variable "x" toma únicamente valores positivos.

Ejemplo 1 : Hallar el dominio y el rango de $f(x) = \log_2 x$

Resolución:

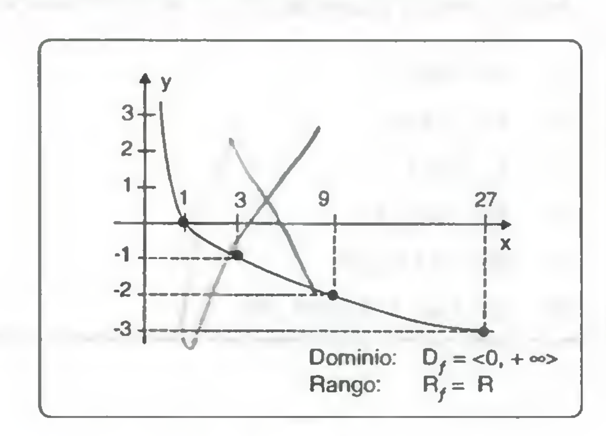
Sabemos que: $f(x) = \log_2 x$

$y = \log_2 x \rightarrow \boxed{x = 2^y}$ (Damos valores a esta expresión)

Recomendación: *Para este tipo de expresión es recomendable, empezar a dar valores a la variable "y", veamos:*

Por tabulación:

y	$x = 2^y$
0	$2^0 = 1$
-1	$2^{-1} = 1/2$
-2	$2^{-2} = 1/4$
-3	$2^{-3} = 1/8$
⋮	⋮
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$
⋮	⋮



Ejemplo 2 : Hallar el dominio y el rango de: $f(x) = \log_{1/3} x$

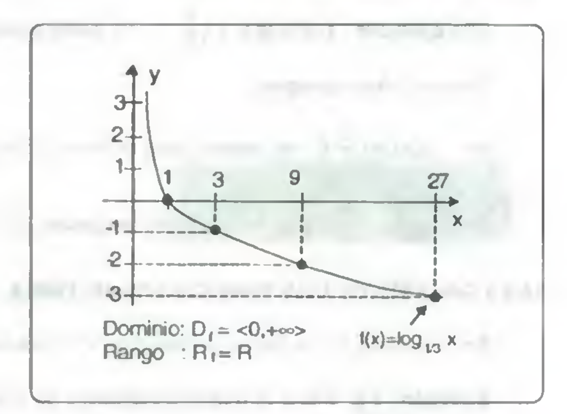
Resolución:

Sabemos que. $f(x) = \log_{1/3} x$

$y = \log_{1/3} x \Rightarrow x = (\frac{1}{3})^y$

Por tabulación:

y	$x = (1/3)^y$
0	$(1/3)^0 = 1$
-1	$(1/3)^{-1} = 3$
-2	$(1/3)^{-2} = 9$
-3	$(1/3)^{-3} = 27$
⋮	⋮
1	$(1/3)^1 = 1/3$
2	$(1/3)^2 = 1/9$
3	$(1/3)^3 = 1/27$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 50

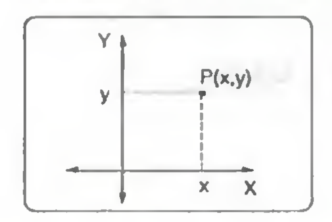
Hallar el dominio y rango de cada una de las funciones siguientes:

1. $f(x) = \log_4 x$
2. $y = 2 + \log_2 x$
3. $y = 3\log_3 x$
4. $f(x) = \log_{3/2} x$
5. $g(x) = 1 + \log_{1/2} x$
6. $g(x) = \log_3 x\ ;\ x \in [1/3\ ,\ 27\rangle$

GEOMETRÍA ANALÍTICA

15.1 LA LÍNEA RECTA

Para determinar la posición de un punto **P** en un plano se le asocia un par ordenado **(x, y)** de números reales, que constituyen sus coordenadas respecto de un sistema de ejes cartesianos.



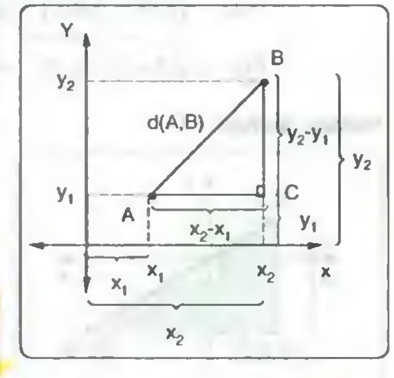
x : abscisa de P
y : ordenada deP
(x ,y) : coordenadas de P

P(x;y) : x ; y ∈ IR

15.1.1 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS DEL PLANO

La distancia entre dos puntos A y B del plano se encuentra algebraicamente aplicando el Teorema Particular de Pitágoras, en función de las coordenadas de esos puntos.

En la figura se han trazado paralelas a los ejes coordenados por A y B , respectivamente, de modo que se ha formado el triángulo ABC rectángulo en C, donde la medida de la hipotenusa AB corresponde a la distancia entre los puntos A (x_1, y_1) y B (x_2, y_2), la que designamos por **d (A, B)**.



$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$$

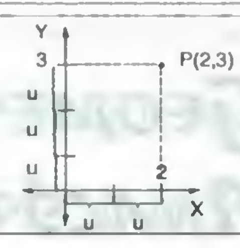
$$[d(A,B)]^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2$$

Por lo Tanto: $d(A,B) = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$

La distancia entre dos puntos se expresa en la **unidad de medida (u)** que se halla utilizado para construir el sistema cartesiano.

¡ATENCIÓN!

La unidad de medida (u) que se utiliza para construir el sistema cartesiano es arbitaria.



Ten presente que:

$d(A, B) = med(\overline{AB}) = AB$

Ejemplo 1 : Calcular la distancia entre los puntos A(4; 6) y B (-2, -2)

Resolución:

Sea: $(x_1 ; y_1) = (4 ; 6)$; $(x_2 ; y_2) = (-2 ; -2)$

Luego: $d(A ; B) = \sqrt{(-2-4)^2 + (-2-6)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{36+64}$

$d(A ; B) = \sqrt{100} \Rightarrow \therefore \ d(A ; B) = 10 \ u$

Ejemplo 2 : Hallar la distancia entre los puntos: P(-2,1) y Q(3, -2)

Resolución:

Sabemos que: P(-2,1) ; Q(3, -2)

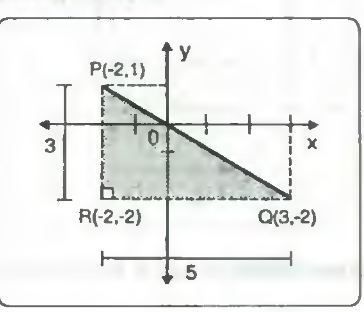
P(-2,1): $-2 \to x_1$, $1 \to y_1$; Q(3, -2): $3 \to x_2$, $-2 \to y_2$

Reemplazamos dichos valores en la fórmula, obteniendo la distancia PQ

$$PQ = \sqrt{[(3) - (-2)^2] + [(-2) - (1)]^2}$$

$$PQ = \sqrt{[3+2]^2 + [-3]^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34} \Rightarrow \therefore \ PQ = \sqrt{34}$$

Método Gráfico:



Ubicamos los puntos

P(-2,1) y Q(3,-2) , en el plano cartesiano, veamos:

- En el ⊿PRQ aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$PQ^2 = PR^2 + RQ^2$$

$$PQ^2 = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$$

$$\therefore \quad PQ = \sqrt{34}$$

Ejemplo 3: Hallar la distancia entre los puntos: A(4,-1) y B(7,3)

Resolución:

Sabemos que: A(4,-1) ; B(7,3)

$x_1 = 4$, $y_1 = -1$; $x_2 = 7$, $y_2 = 3$

Reemplazamos dichos valores en la fórmula de distancia entre dos puntos obteniendo:

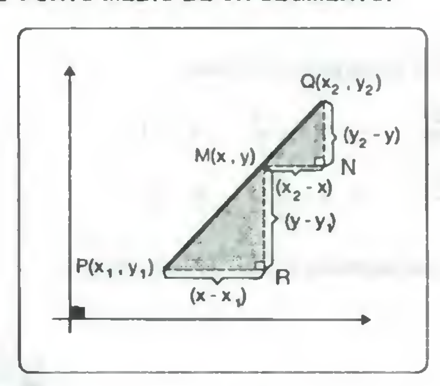
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{[(7) - (4)]^2 + [(3) - (-1)]^2} = \sqrt{[3]^2 + [4]^2}$$

$$AB = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\therefore \quad AB = 5$$

15.1.2 PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO:



- Sean los puntos dados $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$
- Debemos hallar las coordenadas del punto medio M(x,y) del segmento PQ, debe cumplirse que:

$$PM = MQ$$

Osea: $$\frac{PM}{MQ} = 1 \quad \ldots\ldots (I)$$

Por semejanza del triángulos:

$$\triangle PRM \approx \triangle MNQ$$

$$\frac{PM}{MQ} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \quad \ldots\ldots (II) \qquad \frac{PM}{MQ} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} \quad \ldots\ldots (III)$$

Reemplazamos (I) en (II):

$$1 = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \quad \rightarrow \quad x_2 - x = x - x_1$$

$$x_1 + x_2 = 2x$$

$$\therefore \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Reemplazamos (I) en (III): $1 = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y} \rightarrow y_2 - y = y - y_1$

$$y_1 + y_2 = 2y$$

$$\therefore \quad \boxed{y = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto medio de un segmento de extremos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son:

(Fórmulas)

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2}}$$ (Abscisa del punto medio)

$$\boxed{y = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$ (Ordenada del punto medio)

$$M\left[\frac{x_1 + x_2}{2} ; \frac{y_1 + y_2}{2}\right]$$

Ejemplo: Dados los puntos P(2,3) y Q(-4,5), hallar: las coordenadas del punto medio del segmento PQ.

Resolución:

Aplicando las fórmulas para punto medio de un segmento se tiene:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \rightarrow x = \frac{(2) + (-4)}{2} \rightarrow x = \frac{-2}{2} \qquad x = -1$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} \rightarrow y = \frac{(3) + (5)}{2} \rightarrow y = \frac{8}{2} \qquad y = 4$$

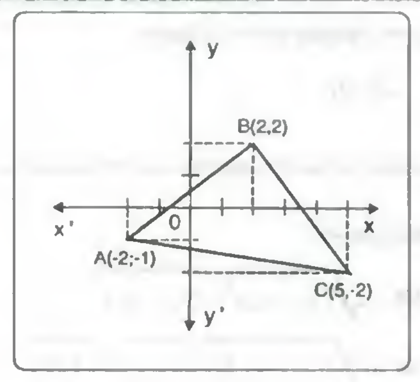
Luego, las coordenadas del punto medio del segmento PQ es: M(x,y) = M(-1,4)

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE DISTANCIA Y PUNTO MEDIO

Problema 1 : Demostrar que los puntos: A(-2,-1), B(2,2) y C(5,-2) , son los vértices de un triángulo isósceles.

Resolución:

Ubicamos los puntos dados, en el plano cartesiano, veamos:



Como se observará los lados AB y BC son iguales a 5, esto quiere decir que el triángulo ABC es isósceles

Nota: Recordar que un Δ es isósceles, siempre y cuando tenga dos lados iguales.

- Por distancia tenemos:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{[(2) - (-2)]^2 + [(2) - (-1)]^2}$$

$$AB = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

$\therefore \quad AB = 5$

$$BC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

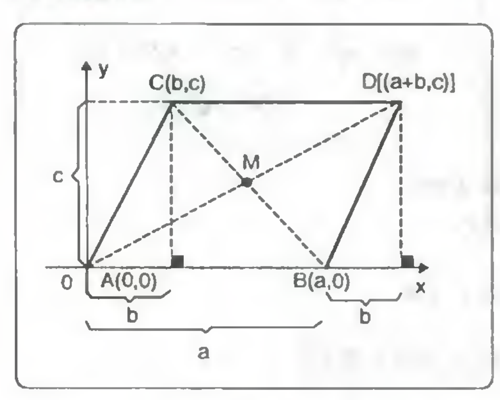
$$BC = \sqrt{[(5) - (2)]^2 + [(-2) - (2)]^2}$$

$$BC = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$\therefore \quad BC = 5$

Problema 2: Demostrar que las diagonales de un paralelogramo se dividen mutuamente en partes iguales

Resolución:



- Sea el paralelogramo ABCD, como se indica en la figura.
- Las ordenadas de A y B son iguales, las ordenadas de C y D también son iguales
- La abscisa de B es a, de C es b y de D es (a + b)

Para demostrar que las diagonales AD y CB se dividen mutuamente en partes iguales, determinaremos que los puntos medios de dichas diagonales coinciden

- Punto medio de AD es: $M\left[\dfrac{0 + (a + b)}{2}; \dfrac{0 + c}{2}\right] = M\left[\dfrac{a + b}{2}; \dfrac{c}{2}\right]$ ......(1)

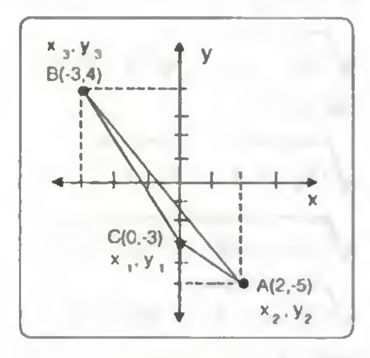
- Punto medio de BC es: $M\left[\dfrac{(a + b)}{2}; \dfrac{0 + c}{2}\right] = M\left[\dfrac{a + b}{2}; \dfrac{c}{2}\right]$ ......(2)

Como las expresiones (1) y (2) son iguales, esto quiere decir que las diagonales de un paralelogramo se dividen mutuamente en partes iguales.

Problema 3: Hallar el perímetro del triángulo, cuyos vértices son los puntos:

A(2,-5) ; B(-3,4) y C(0,-3)

Resolución:



- Aplicando la fórmula de distancia entre dos puntos:

Cálculo de AB:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}$$

$$AB = \sqrt{[(2) - (-3)]^2 + [(-5) - (4)]^2}$$

$$AB = \sqrt{(5)^2 + (-9)^2} = \sqrt{25 + 81}$$

$$\therefore \quad AB = \sqrt{106}$$

Cálculo de AC:

$$AC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AC = \sqrt{[(2) - (0)]^2 + [(-5) - (-3)]^2}$$

$$AC = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 4}$$

$$\therefore \quad AC = \sqrt{8}$$

Cálculo de BC:

$$BC = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$$

$$BC = \sqrt{[(-3) - (0)]^2 + [(4) - (-3)]^2}$$

$$BC = \sqrt{(-3)^2 + (7)^2} = \sqrt{9 + 49}$$

$$\therefore \quad BC = \sqrt{58}$$

Luego: Perímetro Δ ABC = suma de sus 3 lados

Perímetro Δ ABC = AB + AC + BC

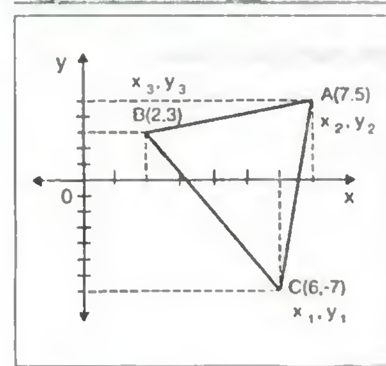
$$= \sqrt{106} + \sqrt{8} + \sqrt{58}$$

$$\therefore \quad \text{Perímetro } \Delta ABC = \sqrt{106} + \sqrt{8} + \sqrt{58} = 20{,}7$$

Problema 4: Demostrar que los puntos A(7,5) ; B(2,3) ; C(6,-7) son los vértices de un triángulo rectángulo.

Resolución:

- Aplicando la fórmula de distancia entre dos puntos:



- Cálculo de AC:

$$AC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AC = \sqrt{[(7) - (6)]^2 + [(5) - (-7)]^2}$$

$$AC = \sqrt{(1)^2 + (12)^2}$$

$$\therefore \quad AC = \sqrt{145}$$

$$AB = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$$

$$AB = \sqrt{[(2) - (7)]^2 + [(3) - (5)]^2}$$

$$AB = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{25 + 4}$$

$$\therefore \quad AB = \sqrt{29}$$

- Cálculo de BC:

$$BC = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$$

$$BC = \sqrt{[(2) - (6)]^2 + [(3) - (-7)]^2}$$

$$BC = \sqrt{(-4)^2 + (10)^2} = \sqrt{16 + 100}$$

$$\therefore \quad BC = \sqrt{116}$$

Luego, para que el triángulo ABC sea rectángulo, debe cumplirse el teorema de Pitágoras o sea:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$(\sqrt{145})^2 = (\sqrt{29})^2 + (\sqrt{116})^2$$

$$145 = 29 + 116 \rightarrow \quad 145 = 145 \qquad \text{(Si cumple)}$$

Problema 5: Halla el punto de abscisa 3, que diste 10 unidades del punto (-3,6)

Resolución

Sea: P(x,y), el punto pedido donde la abscisa $x = 3 \rightarrow P(3,y) = ?$ ...(I)

El punto conocido es: (-3,6), al cual le llamamos: $Q(x_2,y_2)$

Por la fórmula de distancia:

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2}$$

$$PQ = \sqrt{[(-3) - (3)]^2 + [(6) - (y)]^2} \quad ; \text{pero: } PQ = 10$$

$$10 = \sqrt{(-6)^2 + (6-y)^2}$$; elevamos ambos miembros al cuadrado

$$(10)^2 = \left(\sqrt{(-6)^2 + (6-y)^2}\right)^2$$

$$100 = (-6)^2 + (6-y)^2 \quad \Rightarrow \quad 100 = 36 + (6-y)^2$$

$$64 = (6-y)^2$$

$$64 = 6^2 - 2(6)(y) + (y)^2$$

$$64 = 36 - 12y + y^2 \quad \rightarrow \quad 28 = y^2 - 12y$$

$0 = y^2 - 12y - 28$; factorizamos por el método del aspa.

Donde: $(y - 14)(y + 2) = 0$; igualamos cada factor a cero.

i) $y - 14 = 0 \rightarrow \boxed{y = 14}$ **ii)** $y + 2 = 0 \rightarrow \boxed{y = -2}$

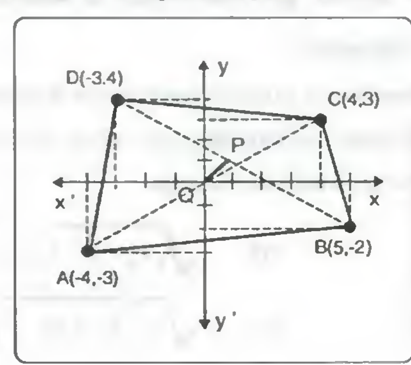
Los valores, hallados para "y" los reemplazamos en (I):

P(3,y) = P(3,14) ; P(3,-2)

Problema 6 : Si: A(-4,-3) ; B(5,–2) ; C(4,3) y D(-3,4) . Hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales del cuadrilátero ABCD.

Resolución

Ubicando los puntos dados en el sistema cartesiano, obtenemos la siguiente figura:



- Calculamos el punto medio "P" del segmento BD

$$P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right) =$$

$$P\left(\frac{(5) + (-3)}{2}; \frac{(-2) + (4)}{2}\right)$$

Punto medio de BD = P(1,1)

- Calculamos el punto medio "Q" del segmento AC

$$Q\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right) =$$

$$Q\left(\frac{(-4)+(4)}{2};\ \frac{(-3)+(3)}{2}\right)$$

Punto medio de AC = Q(0,0)

Ahora, hallamos la longitud del segmento que une los puntos medios P y Q; siendo sus coordenadas: P(1,1) y Q(0,0)

$$PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$PQ = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \Rightarrow \therefore \boxed{PQ = \sqrt{2}}$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 51

Ejercicio 1 : Representar en el sistema de coordenadas rectangulares, los siguientes puntos:

A(2,3) ;	B(-3,1) ;	D(0,6)	y	E(-5,-4)

Ejercicio 2 : Representar en el sistema de coordenadas rectángulares, los triángulos de vértices:

a) (0,0) ;	(-1,5) ;	(4,2)
b) (2,3) ;	(5,7) ;	(-3,4)
C) (3,0) ;	(-2,-3) ;	(1,4)

Ejercicio 3 : Representar los polígonos de vértices:

a) (-3,2) ;	(1,5) ;	(5,3) ;	(1,-2)	
b) (-5,0) ;	(-3,-4) ;	(3,-3) ;	(7,2) ;	(1,6)

Ejercicio 4 : Hallar la distancia entre los pares de puntos cuyas coordenadas son:

a) (4,1) ;	(3,-2)	**c)** (2,-6) ;	(2,-2)
b) (-7,4) ;	(1,-11)	**d)** (-1,-5) ;	(2,-3)

Ejercicio 5 : Hallar el perímetro de los triángulos cuyos vértices son:

a) (-2,5) ;	(4,3) ;	(7,-2)
b) (-1,-2) ;	(4,2) ;	(-3,5)

Ejercicio 6 : Demostrar que los triángulos dados por las coordenadas de sus vértices son isósceles:

a) (2,-2) ;	(-3,-1) ;	(1,6)
b) (2,4) ;	(5,1) ;	(6,5)

Ejercicio 7 : Demostrar que los triángulos dados por las coordenadas de sus vértices son rectangulares:

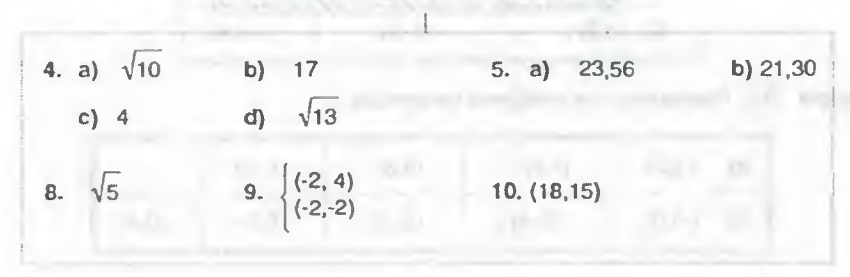
a) (0,9) ;	(-4,-1) ;	(3,2)
b) (10,5) ;	(3,2) ;	(6,-5)

Ejercicio 8 : Si A(-2,6) ; B(4,4) ; C(6,-6) y D(2,-8). Hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales del cuadrilátero ABCD.

Ejercicio 9 : Hallar el punto de abscisa -2, que diste 5 unidades del punto (2,1)

Ejercicio 10 : El segmento que une A(-2,-1) con B(3,3) se prolonga hasta C. Sabiendo que BC = 3AB, hallar las coordenadas de C.

RESPUESTAS TALLER



4. a) $\sqrt{10}$ b) 17 c) 4 d) $\sqrt{13}$

5. a) 23,56 b) 21,30

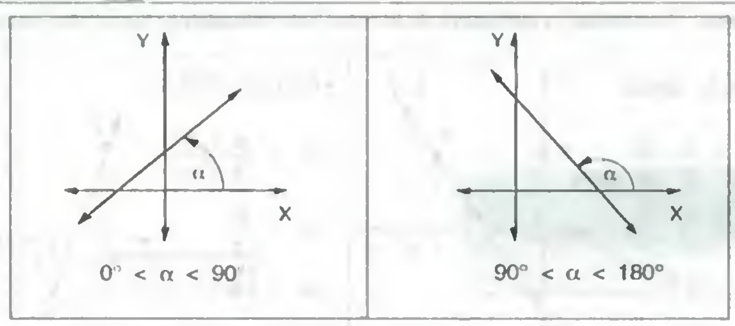
8. $\sqrt{5}$

9. $\begin{cases}(-2, 4)\\(-2,-2)\end{cases}$

10. (18,15)

15.1.3 ÁNGULO DE INCLINACIÓN Y PENDIENTE DE UNA RECTA

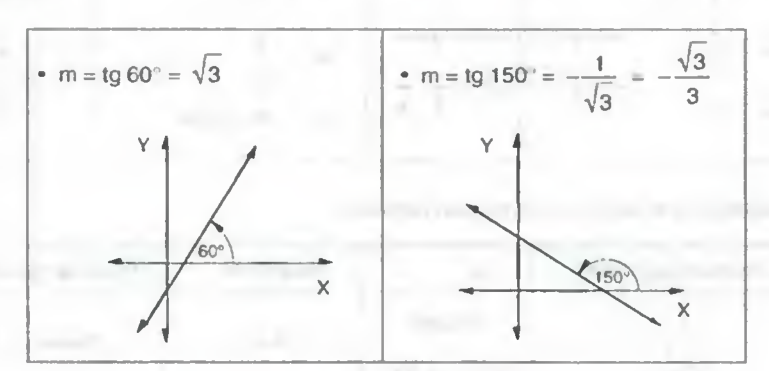
Ángulo de inclinación (α) de una recta es el ángulo que forma la recta con el eje X, medido en el sentido positivo y considerando al eje X como lado inicial.



Se llama pendiente (m) de una recta a la tangente trigonométrica de su ángulo de inclinación.

$$m = tg\,\alpha$$

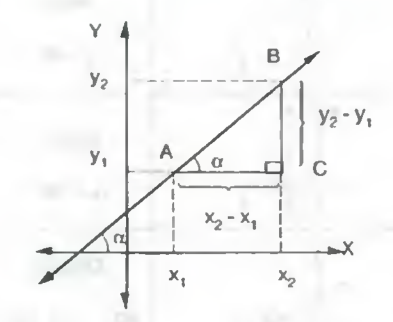
Ejemplos:



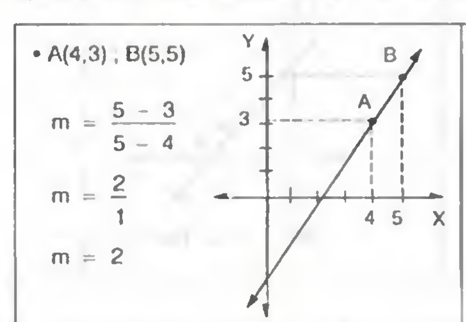
Recordemos que dos puntos diferentes de un plano determinan una recta única.

Dada una recta determinada por los puntos $A(x_1\ ,\ y_1)$ y $B\ (x_2,y_2)$, podemos calcular su pendiente (m) mediante la expresión.

$$m = tg\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Ejemplos: Calculemos la pendiente de la recta determinada por los puntos dados.



- A(4,3) ; B(5,5)

$$m = \frac{5-3}{5-4}$$

$$m = \frac{2}{1}$$

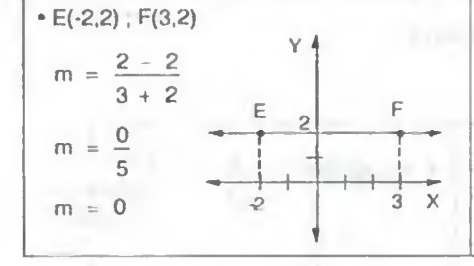
$$m = 2$$

- C(-3;-2) ; D(-5,4)

$$m = \frac{4+2}{-5+3}$$

$$m = \frac{6}{-2}$$

$$m = -3$$

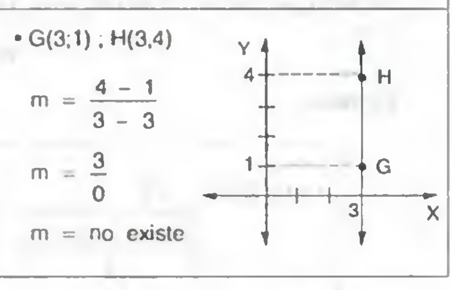


- E(-2,2) ; F(3,2)

$$m = \frac{2-2}{3+2}$$

$$m = \frac{0}{5}$$

$$m = 0$$



- G(3;1) ; H(3,4)

$$m = \frac{4-1}{3-3}$$

$$m = \frac{3}{0}$$

m = no existe

Resumiendo los casos que se pueden presentar:

Posición de la recta	α	Valor de m	Signo de tg α = m
	Agudo $0° < \alpha < 90°$	$m > 0$	Positivo (+)
	Nulo $\alpha = 0°$	$m = 0$	————
	Recto $\alpha = 90°$	No existe	————
	Obtuso $90° < \alpha < 180°$	$m < 0$	Negativo (-)

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE PENDIENTE DE UNA RECTA

Ejercicio 1 : Hallar la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta L, que pasa por los puntos (1,3) y (3,5)

Resolución:

Por fórmula de pendientes: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ...... (I)

Pero: (1,3) y (3,5)

$x_1 \leftarrow$ 1, 3 $\rightarrow y_1$; $x_2 \leftarrow$ 3, 5 $\rightarrow y_2$

Reemplazamos valores en (I): $m = \dfrac{(5) - (3)}{(3) - (1)} = \dfrac{2}{2} = 1 \rightarrow \therefore\ m = 1$ ***Rpta.***

- Calculamos el ángulo de inclinación de la recta:

Sabemos que: m = 1

$\text{tg}\,\alpha = 1$; $\rightarrow$ pero; $1 = \text{tg}\,45°$

$\text{tg}\,\alpha = \text{tg}\,45°$

$\therefore\ \alpha = 45°$ ***Rpta.***

Ejercicio 2 : La pendiente de una recta es 7/2 y pasa por los puntos (8,5) y (6,-y). Hallar "y".

Resolución:

Sabemos que: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; reemplazando valores tenemos:

$\dfrac{7}{2} = \dfrac{(-y) - (5)}{(6) - (8)} \rightarrow \dfrac{7}{2} = \dfrac{-y - 5}{-2}$

$\dfrac{7}{\not 2} = \dfrac{\not -(y+5)}{\not - \not 2} \rightarrow \therefore\ y = 2$ ***Rpta.***

Ejercicio 3 : Una recta tiene una pendiente -3/4 y pasa por los puntos (1,2) y (x,-1), hallar x

Resolución:

Sabemos que: $\boxed{m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$; reemplazando valores, obtenemos:

$$\frac{-3}{4} = \frac{(-1)-(2)}{(x)-(1)} \rightarrow \frac{-3}{4} = \frac{-3}{x-1}$$

Donde: $4 = x - 1 \rightarrow \boxed{x = 5}$ ***Rpta.***

Ejercicio 4: Aplicando el concepto de pendiente, averiguar si los siguientes puntos son colineales:

(0,5) ; (5,0) ; (6,-1)

Resolución:

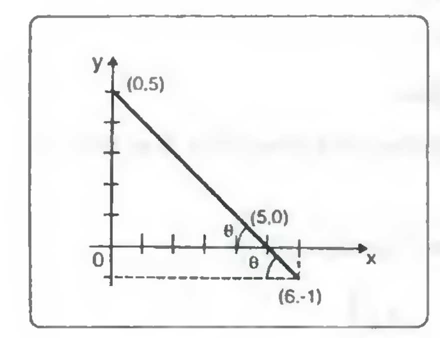
Para que dichos puntos sean colineales sus pendientes para cada par de puntos deben ser iguales, veamos:

- Cálculo de la pendiente para el par de puntos: (0,5) y (5,0)

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow m_1 = \frac{0-5}{5-0} \rightarrow \boxed{m_1 = -1}$$

- Cálculo de la pendiente para el par de puntos: (5,0) y (6,-1)

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow m_2 = \frac{(-1)-(0)}{6-5} \rightarrow \boxed{m_2 = -1}$$



Como las pendientes han resultado ser iguales, esto quiere decir que los puntos si son colineales.

Demostraremos que los puntos son colineales, graficando los puntos dados en el sistema cartesiano, veamos:

TALLER DE EJERCICIOS Nº 52

- Determinar la pendiente de las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos. Halla el ángulo de inclinación de cada recta (aproximadamente)

1. (4,7) y (3,4) **2.** (2,4) y (-3,2) **3.** (5,3) y (0,1/2)

4. La pendiente de una recta es 6 y pasa por los puntos (6,y) y (8,9) hallar "y"

5. La pendiente de una recla es 2/5 y pasa por los puntos (x,4) y (-3,2) hallar "x"

6. Aplicado el concepto de pendiente, averiguar cuáles de los conjuntos de puntos siguientes son colineales:

a) (2,3) ;	(-4,7)	y	(5,8)
b) (4,1) ;	(5,-2)	y	(6,-5)
c) (-1,-4) ;	(2,5)	Y	(7,-2)
d) (a,0) ;	(2a,-b)	y	(-a,2b)

RESPUESTAS TALLER

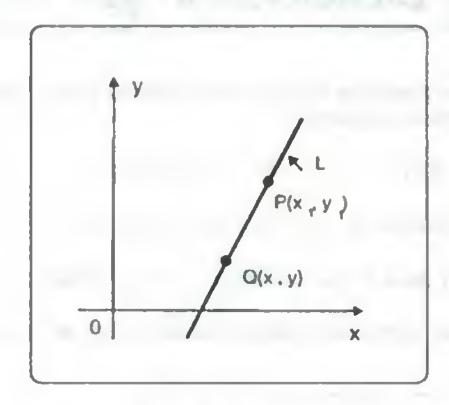
1. $m = 2$; $\theta = 63,5°$ **2.** $m = 2/5$; $\theta = 21,8°$

3. $m = 1/2$; $\theta = 26,5°$ **4.** $y = -3$

5. $x = 2$ **6.** a) No b) Si c) No d) Si

15.1.4 ECUACIÓN DE LA RECTA

A. Ecuación de la Recta Conociendo su Pendiente y las Coordenadas de uno de sus Puntos



Sea: "L" la recta que pasa por el punto $P(x_1,y_1)$ y tiene pendiente "m"

- Sobre la recta "L" tomemos un punto cualquiera Q(x,y), entonces su pendiente es:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Esta igualdad, se puede escribir así:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{(Fórmula)}$$

- A esta expresión se le denomina **ecuación punto pendiente de la recta.**

Problema 1: Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (4,6) y cuya pendiente es 1

Resolución:

Sabemos que: P(4,6) y m = 1

$x_1 \leftarrow 4$, $6 \rightarrow y_1$

Reemplazamos los valores dados en la fórmula: $y = y_1 = m(x - x_1)$ Obteniendo:

$y - 6 = 1(x - 4)$; desarrollando esta ecuación, obtenemos:

$y - 6 = x - 4$

$\therefore$ $x - y + 2 = 0$ (Denominada ecuación general de la recta)

> ***Nota:*** *Toda ecuación punto pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$, puede ser escrita de la forma: $Ax + By + C = 0$, denominada ecuación general de la recta y viceversa.*

Problema 2: Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (-5,3) y cuya pendiente es -6/7

Resolución:

Sabemos que: P(-5,3) y m = -6/7

$x_1 \leftarrow -5$, $3 \rightarrow y_1$

Reemplazamos los valores dados en la fórmula: $y - y_1 = m(x - x_1)$ obteniendo:

$y - 3 = -6/7(x -(-5))$

$7(y - 3) = -6(x + 5) \quad \rightarrow \quad 7y - 21 = -6x - 30$

$\therefore \quad 7y + 6x + 9 = 0$ (Ec. de la recta)

B. Ecuación de la Recta Cuyas Coordenadas de Dos de sus Puntos se Conocen

Problema 3: Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (1,3) y (7,1)

Resolución:

Sabemos que: (1,3) y (7,1)

$x_1 \leftarrow$ (1) ; (3) $\rightarrow y_1$ $\qquad$ $x_2 \leftarrow$ (7) ; (1) $\rightarrow y_2$

- Calculamos la pendiente de la recta: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Reemplazando los valores, obtenemos:

$$m = \frac{1-3}{7-1} \quad \rightarrow \quad m = \frac{-2}{6} \quad \rightarrow \quad m = -1/3$$

Ahora, tomamos cualquiera de los puntos o sea: (1,3) o (7,1) cuya pendiente $m = -1/3$

* Tomamos el punto (1,3) y $m = -1/3$

Por fórmula: $y - y_1 = (x - x_1)$

$y - 3 = -1/3(x - 1)$

$3(y - 3) = -x + 1 \quad \rightarrow \quad x + 3y - 10 = 0$ (Ec. de la recta)

** Tomemos el punto (7,1) y $m = -1/3$

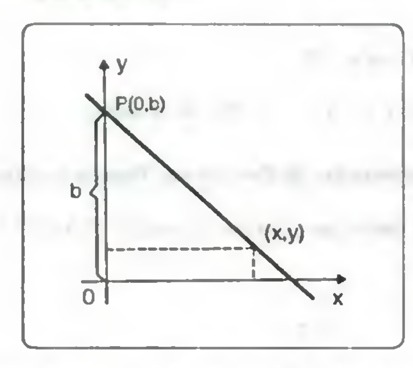
Por fórmula: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 1 = -1/3(x - 7)$

$3(y - 1) = -(x - 7) \rightarrow \quad x + 3y - 10 = 0$ (Ec. de la recta)

Nota: *Como se observará al tomar cualquiera de los dos puntos y su pendiente la ecuación de la recta es la misma.*

C. Ecuación de la Recta Conocidas su Pendiente y las Coordenadas de su Intersección en el Eje Y.



Sea: "m" la pendiente de la recta "l"

"b" la ordenada de la intersección de "l" con el eje "y"

Donde ecuación de la recta: $y - y_1 = m(x - x_1)$

Se transforma en: $y - b = m(x - 0)$

O sea: $y - b = mx$

O también: $y = mx + b$

(Ecuación de la recta)

A esta ecuación se le denomina **ecuación ordinaria de la recta.**

Problema 4: Hallar la ecuación de la recta que tiene por pendiente 2/3, y que corta al eje "y" en el punto (0,-4)

Resolución:

Empleando la fórmula: $\boxed{y = mx + b}$; y reemplazando los datos del problema.

$$y = \frac{2}{3}x + (-4)$$

$$\therefore \quad y = \frac{2}{3}x - 4 \qquad \text{(Ecuación de la Recta)}$$

Problema 5: Hallar la ecuación de la recta que tiene por pendiente -2 y que corta el eje "y" en el punto (0,5)

Resolución:

Por fórmula $y = mx + b$; Datos $m = -2$, $b = 5$

Luego: $y = -2x + 5$ (Ecuación de la recta)

D. Ecuación de la Recta Conocidas las Coordenadas de sus Intersecciones con los Ejes X e Y

Sea "l" una recta que corta a los ejes x e y como Q(a,0) y P(0,b) son 2 puntos de la recta "l" su pendiente será:

$$m = \frac{b - 0}{0 - a} \rightarrow m = -\frac{b}{a}$$

Por fórmula: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - b = - b/a\ (x - 0)$

Donde: $ay - ab = -bx$

$bx + ay = ab$

Dividimos cada término entre "ab" obteniendo: $\frac{bx}{ab} + \frac{ay}{ab} = \frac{ab}{ab} \Rightarrow \therefore \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

A esta ecuación se le denomina ecuación segmentaria de la recta.

Problema 6: Hallar la ecuación de la recta cuyas intersecciones con los ejes son(-4,0) y B(0,5)

Resolución:

De los datos del problema se deduce que: $a = -4 \quad b = 5$

Reemplazando dichos valores en la fórmula: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \rightarrow \boxed{\frac{x}{-4} + \frac{y}{5} = 1}$ (Ecuación de la recta)

OTROS TIPOS DE PROBLEMA

Problema 7: Determinar la ecuación general de la recta que pasa por la intersección de las rectas $2x + 3y + 6 = 0$, y; $5x + 2y - 7 = 0$; y es paralela a la recta $3x - 7y - 8 = 0$

Resolución:

Determinamos el punto P, intersectando las rectas dadas:

$2x + 3y + 6 = 0$, y ; $5x + 2y - 7 = 0$; para lo cual resolveremos el sistema.

Multiplicamos cada término x 2: → $2x + 3y + 6 = 0$

$4x + 6y + 12 = 0$ ......(I)

Multiplicamos cada término x (-3): → $5x + 2y - 7 = 0$

$-15x - 6y + 21 = 0$ ......(II)

Sumamos miembro a miembro: (I) y (II)

$$\begin{array}{lr} & 4x + 6y + 12 = 0 \\ & -15x - 6y + 21 = 0 \\ \hline \Sigma M.A.M. & -11x \quad + \quad 33 = 0 \end{array} \rightarrow \boxed{x = 3}$$

Reemplazamos el valor de "x" en (I)

$$4(3) + 6y + 12 = 0$$

$$6y + 24 = 0 \quad \rightarrow \quad y = -4$$

Luego, el punto P(3,-4) es la intersección y por ese punto pasa la recta en cuestión.

Ahora, hallamos la pendiente de la recta: $3x - 7y - 8 = 0$ despejando "y", obtenemos: $3x - 8 = 7y$

$$y = \frac{3}{7}x - \frac{8}{7} \qquad \text{(Ecuación ordinaria de la recta)}$$

$\frac{3}{7}$ ← pendiente

Por lo tanto, hallamos la ecuación de la recta pedida, conociendo su pendiente m = 3/7 y que pasa por el punto P(3,-4) empleando la fórmula:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \rightarrow \quad y - (-4) = \frac{3}{7}(x - 3)$$

$$\therefore \quad 7y + 28 = 3x - 9 \Rightarrow y = \frac{3}{7}x - \frac{37}{7}$$

Problema 8: Hallar la ecuación general de la recta que pasa por la intersección de las rectas $x + 3y - 5 = 0$; $2x - y - 3 = 0$ y que es paralela a la recta que pasa por (-3,1) y (2,5)

Resolución:

Determinamos el punto P, intersectando las rectas dadas:

$$x + 3y - 5 = 0 \quad \ldots\ldots(I)$$

$$2x - y - 3 = 0 \quad \text{multiplico cada término (x3)}$$

$$x + 3y - 5 = 0$$

$$6x - 3y - 9 = 0$$

$$\Sigma M.A.M.: \; 7x - 14 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

Reemplazamos el valor de "x" en (I): $2 + 3y - 5 = 0 \Rightarrow 3y = 3 \Rightarrow y = 1$

Luego, el punto P(2,1) es la intersección y por ese punto pasa la recta en cuestión.

Ahora hallamos la pendiente de la recta que pasa por los puntos (-3,1) y (2,5)

$$\boxed{m = \frac{y - y_1}{x - x_1}} \rightarrow m = \frac{(5) - (1)}{(2) - (-3)} \rightarrow \boxed{m = \frac{4}{5}}$$

Por lo tanto hallamos la ecuación de la recta pedida conociendo su pendiente m = 4/5 y que pasa por el punto P(2,1) empleando la fórmula:

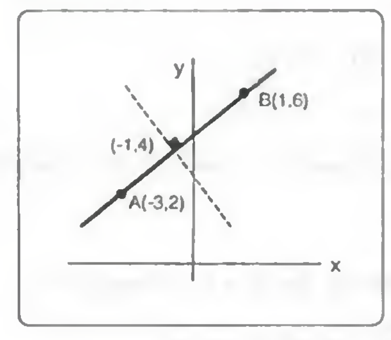
$y - y_1 = m(x - x_1)$ ➡ $y - 1 = 4/5\,(x - 2)$

$5y - 5 = 4x - 8$ ➡ $\therefore \quad y = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}$

Problema 9: Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento A(-3,2) ; B(1,6) :

Resolución:

Recordemos que: "Mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al segmento en su punto medio"



- El punto medio $P(x_0, y_0)$ del segmento AB es:

$$x_0 = \frac{(-3)+(1)}{2} \quad \boxed{x_0 = -1}$$
$$y_0 = \frac{(2)+(6)}{2} \quad \boxed{y_0 = 4} \quad \therefore \; P(-1, 4)$$

- La pendiente de la recta "l" es:

$$m_1 = \frac{y - y_1}{x - x_1} \rightarrow m_1 = \frac{(6)-(2)}{(1)-(-3)} \quad \therefore \; m_1 = 1$$

Por propiedad: $\boxed{m_1 \cdot m_2 = -1}$

Luego: $1 \cdot m_2 = -1 \rightarrow \boxed{m_2 = -1}$

La ecuación de la mediatriz sería: $y - y_0 = m_2(x - x_0)$

Donde: $y - 4 = -1\,[x - (-1)]$ ➡ $\therefore \quad x + y - 3 = 0$

15.1.5 RECTAS PARALELAS Y RECTAS PERPENDICULARES

* Dos rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente. Esto es, si la pendiente de "L_1" es m_1 y la de "L_2" es m_2 entonces:

$$\boxed{L_1 \parallel L_2 \iff m_1 = m_2}$$

** Dos rectas son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es - 1, esto es, si la pendiente de L_1 es m_1 y la de L_2 es m_2, entonces:

$$\boxed{L_1 \perp L_2 \iff m_1 \cdot m_2 = -1}$$

O bien: $\boxed{L_1 \perp L_2 \iff m_1 = -\frac{1}{m_2}}$

Problema 10: Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (3,-1) y es paralela a una recta con pendiente 2/3

Resolución

Sabemos que una de las rectas tiene por pendiente $m_1 = 2/3$ siendo la pendiente de la otra recta $m_2 = 2/3$ por ser paralelas.

Ahora calculamos la ecuación de la recta que pasa por el punto (3,-1)

Por fórmula: $y - y_1 = m(x - x_1)$

Donde: $y - (-1) = \frac{2}{3}(x - 3) \rightarrow 3(y + 1) = 2(x - 3)$

$3y + 3 = 2x - 6 \quad \therefore \quad 2x - 3y - 9 = 0$

Problema 11: Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (3,-2) y es paralela a la recta cuya ecuación es: $-3x - 2y + 6 = 0$

Resolución:

- Hallamos la pendiente de la recta cuya ecuación es: $-3x - 2y + 6 = 0$ despejando

"y" obtenemos: $-3x + 6 = 2y \rightarrow -\frac{3x}{2} + \frac{6}{2} = y$

$$\therefore \quad y = -\frac{3}{2}x + 3$$

Esta última ecuación tiene la forma: $y = mx + b$

Por comparación: $m = -3/2$

Para hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (3,-2) empleamos la pendiente calculada $m = -3/2$, puesto que se trata de dos rectas paralelas.

Por fórmula: $y - y_1 = m(x - x_1)$

Donde: $y - (-2) = -\frac{3}{2}(x - 3)$

$2y + 4 = -3x + 9 \rightarrow 2y + 3x - 5 = 0$

Problema 12: Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (-2,1) y es perpendicular a la recta cuya ecuación es: $3x + 4y - 5 = 0$

Resolución:

Hallamos la pendiente "m_1" de la recta dada: $3x + 4y - 5 = 0$

Despejando "y"; obtenemos: $4y = -3x + 5$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$; tiene la forma y = mx + b

pendiente

$$m_1 = -3/4$$

Si llamamos "m_2" a la pendiente de la recta, cuya ecuación buscamos, podemos escribir:

$m_1 m_2 = -1$; por ser perpendiculares $-\frac{3}{4}m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = \frac{4}{3}$

Ahora escribimos la ecuación de la recta que pasa por el punto (-2,1) y cuya pendiente es: $m_2 = 4/3$

Por fórmula: $y - y_1 = m(x - x_1)$ $\rightarrow$ $y - 1 = \frac{4}{3}[x - (-2)]$

$\Rightarrow$ $3y - 3 = 4x + 8$ ➡ $\therefore$ $3y - 4x - 11 = 0$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 53

A. En cada ejercicio se de la pendiente de una recta y un punto de la misma. Halla la ecuación de cada recta.

a) En su forma punto pendiente **b)** En su forma general

c) En su forma ordinaria

1. m = 3 ; P(-4,3)	**3.** m = 2/3 ; P($-\frac{1}{2}$; 3)	**5.** m = 5 ; P(-2,-5)
2. m = -2 ; P(3,5)	**4.** m = $-\frac{4}{5}$; P(0, $\frac{3}{4}$)	**6.** m = -4 ; P(-3,-4)

B. Halla la ecuación general y la ecuación ordinaria de la recta que pasa por:

7. (3,-2) y (1,4)	**9.** (-5,1) y (7,3)
8. (-2,5) y (4,3)	**10.** (0,4) y (-3,2)

11. Hallar la ecuación de la recta que tiene por pendiente -3, y que corta al eje "y" en el punto (0,5)

12. Hallar la ecuación de la recta cuyas intersecciones con los ejes son: (3,0) y (0,–2)

13. Halla la ecuación de la recta que pasa por la intersección de las rectas $2x + y + 5 = 0$; $4x - 3y - 5 = 0$; y que es paralela a la recta $2x - y - 6 = 0$

14. Halla la ecuación de la recta, que pasa por el punto (2,5) y que es paralela a la recta cuya ecuación es: $2y - 3x + 4 = 0$

15. Halla la ecuación de la recta, que pasa por el punto (-4,1) y que es perpendicular a la recta cuya ecuación es: $3x - 2y - 5 = 0$

16. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos. P(6,5) y Q(-2,-3)

17. Dadas las ecuaciones de las rectas:

a)	$3x + 4y = 6$	c)	$6x - 8y = 7$
b)	$4x - 3y = 2$	d)	$3x - 4y = 5$

¿Decir qué rectas son paralelas y cuáles son perpendiculares?

RESPUESTAS TALLER

A)

1. $y - 3 = 3(x + 4)$
$y - 3x - 15 = 0$
$y = 3x + 15$

2. $y - 5 = -2(x - 3)$
$y + 2x - 11 = 0$
$y = -2x + 11$

3. $y - 3 = \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)$
$3y - 2x - 10 = 0$
$y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$

4. $y - \frac{3}{4} = -\frac{4}{5}(x - 0)$
$20y + 16x - 15 = 0$
$y = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{4}$

5. $y + 5 = 5(x + 2)$
$y - 5x - 5 = 0$
$y = 5x + 5$

6. $y + 4 = -4(x + 3)$
$y + 4x + 16 = 0$
$y = -4x - 16$

B)

7. $y = -3x + 7$
$y + 3x - 7 = 0$

8. $y = \frac{-1}{3}x + \frac{13}{3}$
$y + \frac{1}{3}x - \frac{13}{3} = 0$

9. $y = \frac{1}{6}x + \frac{11}{6}$
$y - \frac{1}{6}x - \frac{11}{6} = 0$

10. $y = \frac{2}{3}x + 4$
$y - \frac{2}{3}x - 4 = 0$

11. $y = -3x + 5$

12. $y = \frac{2}{3}x - 2$

13. $y = 2x - 1$

14. $y = \frac{2}{3}x + 2$

15. $y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$

16. $y = -x + 3$

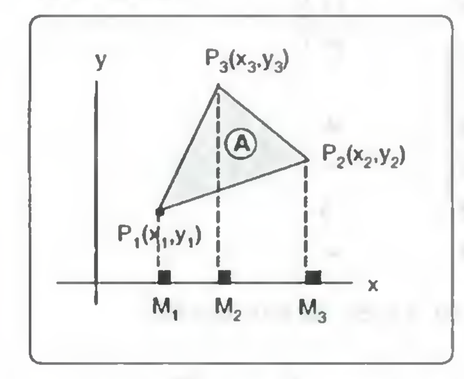
17. a y b → son perpendiculares
c y d → son paralelas

15.1.6 ÁREA DE UN POLÍGONO EN FUNCIÓN DE LAS COORDENADAS DE SUS VÉRTICES

Sean $P_1(x_1,y_1)$; $P_2(x_2,y_2)$ y $P_3(x_3,y_3)$ los vértices de un triángulo. El área A en función de las coordenadas de los vértices viene dada por la expresión.

$$A = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_3y_2 - x_2y_1)$$

Demostración:



Área Δ = Área del trapecio $M_1P_1P_3M_3$ + Área del trapecio $M_3P_3P_2M_2$ - Área del trapecio $M_1P_1P_2M_2$

Por lo tanto: $A = \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + \frac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_2 - x_3) - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1)$

$$A = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_3y_2 - x_2y_1)$$

Este resultado se puede expresar de otra manera más fácil de recordar, teniendo en cuenta la notación de determinante. ➡

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Otra forma de expresar el área de un triángulo, muy útil cuando se trate de hallar áreas de polígonos de más de tres lados es la siguiente:

$$A = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_3y_2 - x_2y_1)$$

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} (-) & \\ (-) & (+) \\ (-) & (+) \\ & (+) \end{matrix}$$

Obsérvese que se ha repetido la primera fila en la cuarta

Problema 1: Hallar el área del triángulo cuyos vértices son: $P_1(-1,-4)$;

$p_2(3,-1)$ y $P_3(2,5)$

Resolución:

Por fórmula: $$\text{Área } \Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

Reemplazando valores obtenemos:

$$\text{Área } \Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 3 & -1 \\ 2 & 5 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\text{Área } \Delta = \frac{1}{2}\ |(-1)(-1) + (5)(3) + (-4)(2) - (-1)(5) - (2)(-1) - (3)(-4)|$$

$$\text{Área } \Delta = \frac{1}{2}\ |1 + 15 - 8 + 5 + 2 + 12| \Rightarrow \text{Área } \Delta = \frac{1}{2}\ |27| = \frac{27}{2} = 13.5$$

$$\therefore \quad \text{Área} = 13{,}5\ \mu^2$$

OTRO MÉTODO: Vértices del triángulo $P_1(-1,-4)$; $P_2(3,-1)$ y $P_3(2,5)$

Resolución:

	-1	-4	
-12 ←	3	-1	→ 1
-2 ←	2	5	→ 15
-5 ←	-1	-4	→ -8
-19			8

$$\text{Área } \Delta = \frac{\square - \square}{2} = \frac{8-(-19)}{2} = \frac{27}{2} \Rightarrow \therefore \quad \text{Área } \Delta = 13{,}5\ \mu^2$$

Problema 2: Hallar el área del triángulo cuyos vértices son:

$P_1(-3,-3)$; $P_2(4,-1)$ y $P_3(1,5)$

Resolución:

$$\text{Área } \Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 4 & -1 \\ 1 & 5 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\text{Área } \Delta = \frac{1}{2}\ |(-1)(-3) + (5)(4) + (-3)(1) - (-3)(5) - (1)(-1) - (4)(-3)|$$

$$\text{Área } \Delta = \frac{1}{2}\ |3 + 20 - 3 + 15 + 1 + 12|$$

$$\text{Área } \Delta = \frac{1}{2}\ |48| = \frac{1}{2}\ 48 \quad \rightarrow \quad \text{Área } \Delta = 24\ \mu^2$$

OTRO MÉTODO: Vértices del triángulo: $P_1(-3,-3)$; $P_2(4,-1)$ y $P_3(1,5)$

Resolución:

	-3	-3	
-12 ←	4	-1	→ 3
-1 ←	1	5	→ 20
-15 ←	-3	-3	→ -3
-28			20

$$\text{Área } \Delta = \frac{\square - \square}{2} = \frac{20-(-28)}{2} = \frac{48}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Área } \Delta = 24\ \mu^2}$$

Problema 3: Hallar el área del polígono cuyos vértices son:

$P_1(-3,2)$; $P_2(1,5)$; $P_3(5,3)$ y $P_4(1,-2)$

Resolución:

$$\text{Área } \Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \\ 5 & 3 \\ 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{Área } \Delta = \frac{1}{2}\ |(5)(-3) + (3)(1) + (-2)(5) + (2)(1) - (-3)(-2) - (1)(3) - (5)(5) - (1)(2)|$$

$$\text{Área } \Delta = \frac{1}{2}\ |-15 + 3 - 10 + 2 - 6 - 3 - 25 - 2|$$

$$\text{Área } \Delta = \frac{1}{2}\ |-56| = \frac{1}{2}(56) \quad \rightarrow \quad \text{Área } \Delta = 28\ u^2$$

OTRO METODO: Vértices: $P_1(-3,2)$; $P_2(1,5)$; $P_3(5,3)$ y $P_4(1,-2)$

$$\begin{array}{ccccccc} & & -3 & & 2 & & \\ 2 & \leftarrow & 1 & & 5 & \rightarrow & -15 \\ 25 & \leftarrow & 5 & & 3 & \rightarrow & 3 \\ 3 & \leftarrow & 1 & & -2 & \rightarrow & -10 \\ 6 & \leftarrow & -3 & & 2 & \rightarrow & 2 \\ \hline 36 & & & & & & -20 \end{array}$$

$$\text{Área} = \frac{\square - \square}{2} = \frac{+36-(-20)}{2} = \frac{56}{2}$$

$\therefore$ $\boxed{\text{Área} = 28\ \mu^2}$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 54

A. Hallar las áreas de los triángulos cuyos vértices son:

1. (2,-3) ; (4,2) y (-5,-2)	**3.** (-8,-2) ; (-4,-6) y (-1,5)
2. (-3,4) ; (6,2) y (4,-3)	**4.** (0,4) ; (-8,0) y (-1,-4)

B. Hallar las áreas de los polígonos cuyos vértices son:

5. (2,5) ; (7,1) ; (3,-4) y (-2,3)	**7.** (1,5) ; (-2,4) ; (-3,-1) ; (2,-3) y (5,1)
6. (0,4) ; (1,-6) ; (-2,-3) y (-4,2)	**8.** (-3,-4) ; (-2,3) ; (4,5) ; (2,1) y (6,-2)

RESPUESTAS TALLER

A)	**1.**	18,5 u^2	**3.**	28 u^2
	2.	24.5 u^2	**4.**	30 u^2
B)	**5.**	39,5 u^2	**7.**	40 u^2
	6.	25,5 u^2	**8.**	42,5 u^2

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE LA LÍNEA RECTA

Ejercicio 1: La recta que pasa por los puntos (1; 2) y (-3 ;1) tiene por ecuación:

A) $x - 4y + 9 = 0$ B) $x + 4y - 9 = 0$
C) $x + 4y + 7 = 0$ D) $x - 4y - 7 = 0$
E) $x - 4y + 7 = 0$

Ejercicio 2: La recta cuya ecuación es: $2y - x + 1 = 0$ intersecta el eje x y al eje y en los puntos:

A) 1y - 1 B) -1y 1 C) $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$

D) 1y -1/2 E) $-\frac{1}{2}$ y 1

Ejercicio 3: La recta cuya pendiente es -2 y que pasa por el punto (1; 1) tiene por ecuación:

A) $2x + y - 3 = 0$ B) $2x - y + 3 = 0$
C) $2x - y - 3 = 0$ D) $2x + y - 4 = 0$
E) $2x + y + 4 = 0$

Ejercicio 4: De los trios de puntos siguientes son colineales.

I. (3 ; 2), (1 ; 0); (-1 ; -2)
II. (6 ; 1), (3 ; 2); (3 ; 4)
III. (3 ; 1), (4 ; 3), (5 ; 7)

A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III
D) Sólo I y II E) Sólo II y III

Ejercicio 5: De las ecuaciones siguientes la que representa una recta paralela a la recta $x - 2y + 3 = 0$; es:

A) $2y + x + 3 = 0$ B) $2y - x - 6 = 0$
C) $2y + x + 6 = 0$ D) $y + 2x - 3 = 0$
E) $y + 2x + 6 = 0$

Ejercicio 6: Una recta perpendicular a la recta de ecuación: $3x - y + 1 = 0$ es la representada por:

A) $3x + y + 3 = 0$ B) $3y - x - 2 = 0$
C) $3y - x + 2 = 0$ D) $3y + x + 2 = 0$
E) $3x + y - 1 = 0$

Ejercicio 7: En: $Kx - x + y + 3 = 0$, el valor de "K" para que la ecuación represente a una recta que pasa por el punto (1; -3) es:

A) 0 B) 1 C) 2 D) -1 E) -2

Ejercicio 8: La pendiente de la recla que pasa por los puntos (3 ; 5) y (-2 ; 1) es:

A) 4 B) 5 C) 4/5 D) 5/4 E) -4/5

Ejercicio 9: De las siguientes rectas cuáles pasan por el origen.

I. $x + 2y - 1 = 0$ II. $3x + 2y + 2 = 0$
III. $x - 5y = 0$

A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo II y III
D) Sólo I y III E) I, II y III

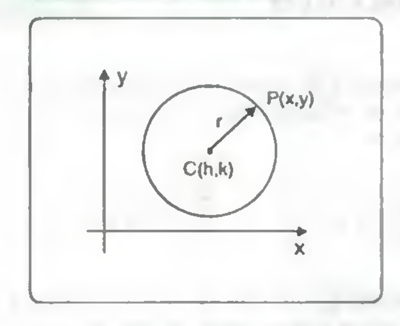
Ejercicio 10: La ecuación de la recta paralela al eje x que pasa por el punto (4; -1);es:

A) $x - 1 = 0$ B) $x + 1 = 0$ C) $y - 1 = 0$
D) $y + 1 = 0$ E) $x + y = 1$

Clave de Respuestas

1. E	2. D	3. A	4. A	5. B
6. D	7. B	8. C	9. C	10. D

15.2 LA CIRCUNFERENCIA



- Es el conjunto de puntos de un plano que están a una misma distancia constante de un punto fijo del mismo plano.
- Al punto fijo se le denomina centro (C). A la distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia se le llama radio (r).
- Toda ecuación de la forma:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Tiene como gráfica a una circunferencia de centro C(h,k) y radio r.

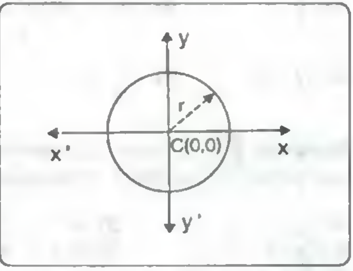
Esta ecuación: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Es la llamada **forma ordinaria** de la ecuación de una circunferencia

Si el centro de la circunferencia está en el origen O(0,0), entonces la forma ordinaria se convierte en:

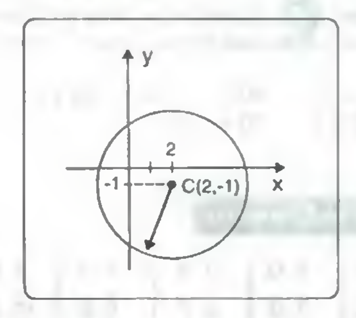
$$x^2 + y^2 = r^2$$

A esta ecuación se le llama **Ecuación Canónica** de la circunferencia.



Ejemplo 1 Hallar la ecuación ordinaria de la circunferencia de centro (2,-1) y radio 3

Resolución:



En este caso el centro C(2,-1) nos indica que h = 2 y k = -1; por otro lado r = 3

Reemplazando estos valores en la forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia obtenemos:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x - 2)^2 + [y - (-1)]^2 = 3^2$$

$$\therefore \quad (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

Ejemplo 2 : ¿Cuál es el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es:

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 36?$$

Resolución:

La ecuación dada, la comparamos con: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Donde: $h = -3$; $k = 4$; $r^2 = 36$ $\rightarrow$ $r = 6$

$\therefore$ El centro es el punto C(-3,4) y el radio mide 6

Ejemplo 3 : Hallar la ecuación de la circunferencia de 8 cm de radio cuyo centro está en el origen de coordenadas.

Resolución:

Como el origen de coordenadas es el punto C(0,0), se tiene:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \rightarrow (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 8^2 \Rightarrow \therefore \quad x^2 + y^2 = 64$$

15.2.1 FORMA GENERAL DE LA ECUACIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA

Desarrollando la ecuación ordinaria: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$; obtenemos:

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2 \text{ ; ordenamos términos:}$$

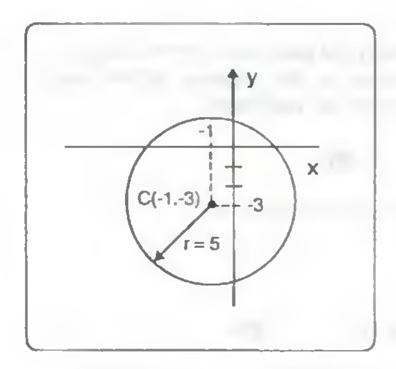
$$x^2 + y^2 \underbrace{- 2hx}_{} \underbrace{- 2ky}_{} + \underbrace{h^2 + k^2 - r^2}_{} = 0$$

Esta última ecuación puede escribirse en la forma: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Donde: $D = -2h$; $E = -2k$; esta es la llamada **forma general** de la ecuación de la circunferencia.

Ejemplo 4 : Hallar la ecuación general de la circunferencia de centro C(-1,-3) y radio 5.

Resolución:



Reemplazamos valores en la forma ordinaria y desarrollando, obtenemos:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$[x - (-1)]^2 + [y - (-3)]^2 = 5^2$$

$$(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 25$$

$$\therefore \quad x^2 + y^2 + 2x + 6y - 15 = 0$$

Observaciones:

1. *Ecuaciones de la forma: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = 0$, no representa una circunferencia. Su expresión gráfica es un sólo punto: (h,k)*

   Ejemplo : El único par que satisface a la ecuación:

   $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 0$ *es* $(-2,5)$

2. *Ecuación de la forma: $(x - h)^2 + (y - k)^2 =$ Número negativo. No representa lugar geométrico alguno.*

   Ejemplo: La ecuación $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = -16$, no tiene solución, en consecuencia no tiene representación gráfica.

15.2.2 TRANSFORMACIÓN DE LA FORMA GENERAL A LA FORMA ORDINARIA

Toda ecuación de la forma: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ y que representa a una circunferencia puede escribirse de la forma: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, completando cuadrados para los términos "x", como para los términos en "y".

Ejemplo 5 : Graficar la ecuación: $x^2 + y^2 - 10x + 2y - 10 = 0$

Resolución:

Agrupamos términos en "x" y en "y".

$$(x^2 - 10x) + (y^2 + 2y) - 10 = 0 \qquad ...(I)$$

Completamos cuadrados para los términos de "x"

$x^2 - 10x = (\ \ -\ \ )^2$; Abrimos paréntesis y elevamos al cuadrado.

sacamos $\sqrt{x^2} = x$

$x^2 - 10x = (\ \ -\ \ )^2$

sacamos la mitad = 5

fuera del paréntesis escribimos (–), el cuadrado del segundo término escrito dentro del paréntesis.

Resultando así: $x^2 - 10x = (x - 5)^2 - 5^2 \qquad ...(II)$

De igual manera completamos cuadrados para los términos en "y"

si: $\sqrt{y^2} = y$

$y^2 + 2y = (\ \ +\ \ )^2 \quad \rightarrow \quad y^2 + 2y = (y + 1)^2 - 1^2 \qquad ...(III)$

Su mitad = 1

Fuera de ( ) escribimos (–) el cuadrado del 2do térmimo escrito dentro de ( )

Reemplazamos (II) y (III) en (I):

$\underbrace{(x-5)^2-5^2}+\underbrace{(y+1)^2-1^2}-10=0$

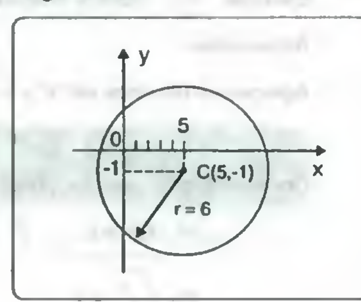
$(x-5)^2-25+(y+1)^2-1-10=0$

$(x-5)^2+(y+1)^2=36$

$(x-5)^2+(y+1)^2=6^2$ < > $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

Siendo: $h=5$; $k=-1$ y $r=6$

La gráfica es:



Ejemplo 6 : Graficar la ecuación: $x^2+y^2+6x+4y-3=0$

Resolución:

Agrupamos términos en "x" y en "y" $(x^2+6x)+(y^2+4y)-3=0$...(I)

Completamos cuadrados para los términos en "x"

$x^2+6x=(\ \ +\ \ )^2$; Abrimos paréntesis y elevamos al cuadrado.

Su $\sqrt{x^2}=x$

$x^2+6x=(\ \ +\ \ )^2$ → $x^2+6x=(x+3)^2-3^2$ ...(II)

Su mitad = 3

Completamos cuadrados para los términos en "y"

$y^2+4y=(\ \ +\ \ )^2$

su $\sqrt{y^2}=y$

$y^2+4y=(\ \ +\ \ )^2$ → $y^2+4y=(y+2)^2-2^2$ ...(III)

Su mitad = 2

Reemplazamos (II) y (III) en (I):

$(x+3)^2-3^2+(y+2)^2-2^2-3=0$

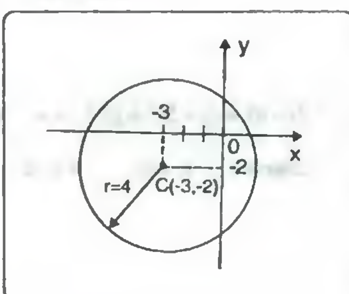
$(x+3)^2-9+(y+2)^2-4-3=0$

$(x+3)^2+(y+2)^2=16$

$(x+3)^2+(y+2)^2=4^2$

Siendo: $h=-3$; $k=-2$ y $r=4$

La gráfica es:



Ejemplo 7 : Graficar la ecuación: $x^2 + y^2 - 12x + 10y - 3 = 0$

Resolución:

Agrupamos términos en "x" y en "y"

$$(x^2 - 12x) + (y^2 + 10y) - 3 = 0 \qquad \text{... (I)}$$

Completamos cuadrados para los términos en "x"

$x^2 - 12x = (\quad - \quad)^2$

Su $\sqrt{x^2} = x$

$x^2 - 12x = (\quad - \quad)^2 \quad \rightarrow \quad x^2 - 12x = (x - 6)^2 - 6^2 \qquad \text{...(II)}$

Su mitad = 6

Completamos cuadrados para los términos en "y"

$y^2 + 10x = (\quad + \quad)^2$

Su $\sqrt{y^2} = y$

$y^2 + 10y = (\quad + \quad)^2 \quad \rightarrow \quad y^2 + 10y = (y + 5)^2 - 5^2 \qquad \text{...... (III)}$

Su mitad = 5

Reemplazamos (II) y (III) en (I):

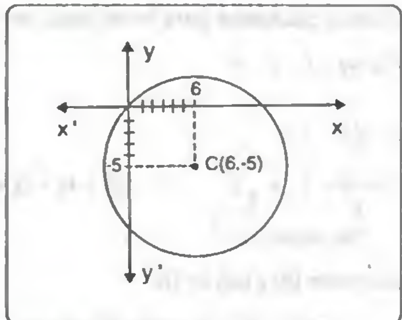
$(x - 6)^2 - 6^2 + (y + 5)^2 - 5^2 - 3 = 0$

$(x - 6)^2 - 36 + (y + 5)^2 - 25 - 3 = 0$

$(x - 6)^2 + (y + 5)^2 = 64$

$(x - 6)^2 + (y + 5)^2 = \left(\sqrt{64}\right)^2$

La gráfica es:



$(x - 6) + (y + 5)^2 = (8)^2 \quad <> \quad (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Siendo: $h = 6$; $k = -5$ y $r = 8$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 55

A Grafica cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$	**2.** $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$
3. $(x - 3)^2 + y^2 = 49$	**4.** $x^2 + (y + 5)^2 = 36$

B En cada ejercicio escribe la ecuación de la circunferencia: en su forma ordinaria y en su forma general.

5. $C(3,4)$; $r = 5$	**6.** $C(-2,3)$; $r = 4$
7. $C(\frac{1}{2},3)$; $r = 6$	**8.** $C(-2,3/2)$; $r = 7$

C En cada ejercicio escribe P es un punto de la circunferencia y C es su centro. Escribe su forma ordinaria y su forma general (Sugerencia aplica la fórmula:

$D = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$ distancia entre dos puntos para hallar el radio).

9. $P(2,-2)$; $C(-3,-5)$	**10.** $P(0,0)$; $C(3,-4)$
11. $P(3,-4)$; $C(-7,-9)$	**12.** $P(1,3)$; $C(-3,-2)$

D Transforma cada ecuación siguiente a su forma ordinaria, grafícala (si es que tiene expresión gráfica).

13. $x^2 + y^2 - 10x - 2y - 62 = 0$	**14.** $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$
15. $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 22 = 0$	**16.** $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 15 = 0$
17. $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$	**18.** $x^2 + y^2 - 8x - 7y = 0$
19. $2x^2 + 2y^2 - x = 0$	**20.** $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 12 = 0$
21. Escribe la ecuación de la circunferencia cuyos extremos de uno de sus diámetros son los puntos (-2,2) y (6,-4)	

RESPUESTAS TALLER

5. $\begin{cases} (x-3)^2+(y-4)^2=5^2 \\ x^2+y^2-6x-8y=0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} (x+2)^2+(y-3)^2=4^2 \\ x^2+y^2+4x-6y-3=0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} (x-\frac{1}{2})^2+(y-3)^2=6^2 \\ 4x^2+4y^2-4x-24y-107=0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} (x+2)^2+(y-\frac{3}{2})^2=7^2 \\ 4x^2+4y^2+16x-12y-171=0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} (x+3)^2+(y+5)^2=\sqrt{34}^2 \\ x^2+y^2+6x+10y=0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} (x-3)^2+(y+4)^2=5^2 \\ x^2+y^2-6x+8y=0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} (x+7)^2+(y+9)^2=\left(5\ \sqrt{5}\right)^2 \\ x^2+y^2+14x+18y+5=0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} (x+3)^2+(y+2)^2=\left(\sqrt{41}\right)^2 \\ x^2+y^2+6x+4y-28=0 \end{cases}$

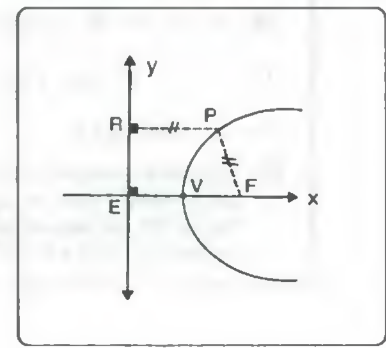
21. $\begin{cases} (x-2)^2+(y+1)^2=5^2 \\ x^2+y^2-4x+2y-20=0 \end{cases}$

15.3 LA PARÁBOLA.

- Cuando estudiamos la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, vimos que la expresión gráfica de estas funciones son parábolas que se abren "Hacia Arriba" o "Hacia Abajo".
- Ahora estudiaremos más detenidamente estas curvas de tal manera que el estudiante logre reconocer sus ecuaciones y que sea capaz de graficarlas en el plano cartesiano.

Una parábola es el conjunto de todos los puntos de un plano, tal que la distancia desde cualquiera de estos puntos P a un punto fijo es siempre igual a la distancia de P a una recta fija.

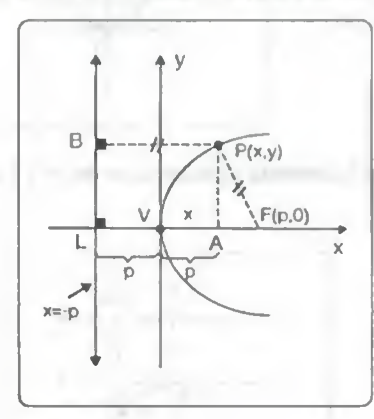
15.3.1 ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA



- El punto fijo "F" se llama foco de la parábola.
- La recta fija $\overleftrightarrow{RE}$ es la directriz.
- La recta que pasa por "F" y es perpendicular a su directriz, tal que como $\overline{FE}$, se llama eje de la parábola.
- Por la definición dada, se cumple que: PR = PF.

- "V" es un punto de la parábola, por consiguiente también se cumple que: VE = VF.
- Al punto "V" se le llama vértice de la parábola.

15.3.2 ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA



Ubicamos la parábola en el plano cartesiano (ver figura) de tal manera que:

1. Su eje coincida con el eje x
2. Su vértice V coincida con el origen de coordenadas
3. Su foco "F" tenga por coordenadas al par (p,0)
4. Como consecuencia: VF = p
5. La directriz tendrá como ecuación: **x = -p**, por ser una recta paralela al eje y, situada a una distancia "p" a la izquierda del origen
6. Consideremos ahora un punto P(x,y) variable, que está sobre la parábola
7. Trazamos PA perpendicular al eje **x**

Demostración:

1. Por definición de parábola: PF = PB
2. De la figura: VA = **x** ; LV = p ; PB = LA = LV + VA
3. PB = x + p → PF = x + p
4. Aplicamos la fórmula distancia entre los puntos P y F

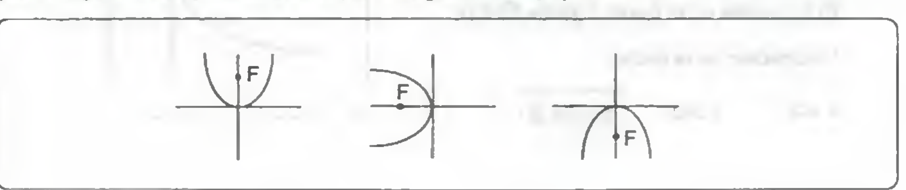
$$PF = \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2}$$

$$x + p = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$$; elevamos al cuadrado los dos miembros

$$(x+p)^2 = \sqrt{\left((x-p)^2 + y^2\right)}^2 \rightarrow x^2 + 2xp + p^2 = (x-p)^2 + y^2$$

$$\cancel{x^2} + 2xp + \cancel{p^2} = \cancel{x^2} - 2xp + \cancel{p^2} + y^2 \rightarrow 4xp = y^2 \rightarrow \therefore \boxed{y^2 = 4px}$$

Esta es la llamada forma ordinaria de la ecuación de la parábola de la misma manera puede obtenerse las formas para los casos en que el foco esté sobre la parte positiva del eje y, parte negativa del eje x o sobre la parte negativa del eje y.



En cada caso, 2p es la distancia de la directriz al foco; "p" es la distancia entre el vértice y el foco, |4p| es la longitud del lado recto.

- El segmento de recta perpendicular al eje, que pasa por el foco y está limitado por las intersecciones de esta recta con la parábola, se llama lado recto.

MN = lado recto de la parábola.

Ejemplo 1: Encontrar el foco y la directriz de la parábola cuya ecuación es: $x^2 + 12y = 0$; además dibujar la parábola.

Resolución:

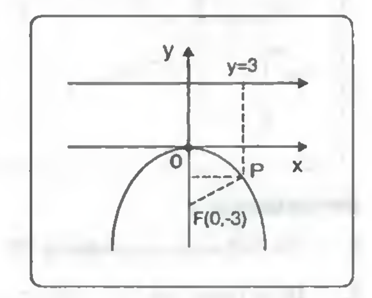
La ecuación dada: $x^2 + 12y = 0$;
se puede escribir así:

$$x^2 = -12y$$

(Esta ecuación tiene la forma $x^2 = 4py$)

Donde: $\boxed{4p = -12}$ → $\boxed{p = -3}$

La gráfica es:



- El foco esta en el punto F(0,-3)
- La directriz es la recta y = 3

Ejemplo 2: Encontrar el foco y la directriz de la parábola cuya ecuación es: $8x + y^2 = 0$, además dibujar la parábola.

Resolución:

La ecuación dada: $8x + y^2 = 0$;
se puede escribir así:

$$y^2 = -8x$$

(Esta ecuación tiene la forma $y^2 = 4px$)

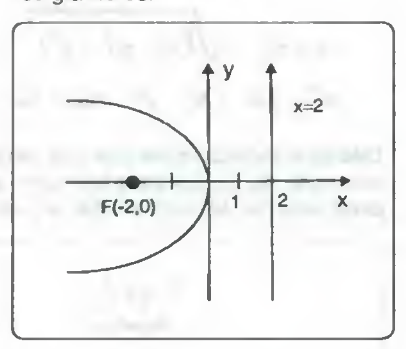
Donde: $4p = -8$ → $\boxed{p = -2}$

El foco esta en el punto F(p,0)= F(-2,0)

La directriz es la recta

$x = 2$; o sea: $\boxed{x - 2 = 0}$

su gráfica es:



TALLER DE EJERCICIOS Nº 56

Encontrar el foco, la directriz y dibuja la parábola que se representa por las ecuaciones siguientes:

1. $x^2 + 16y = 0$	3. $x^2 + y = 0$	5. $y^2 - 5x = 0$
2. $4x + y^2 = 0$	4. $x^2 - 8y = 0$	6. $y^2 + 2x = 0$

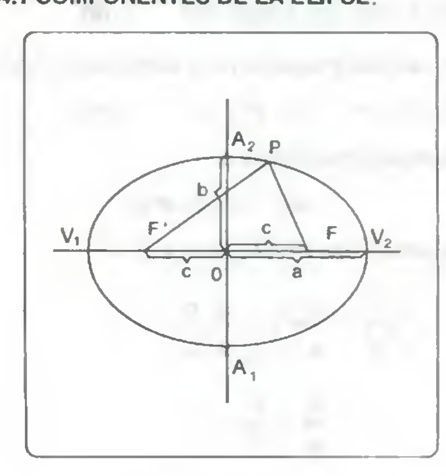
Encontrar la ecuación de las parábolas siguientes:

7. Tiene vértice en el origen, y su directriz es la recta $x = -5$
8. Tiene por directriz $x = 6$; y su vértice está en el origen
9. Tiene por foco F(0,3) ; y por directriz $y + 6 = 0$
10. Tiene por foco F(0,-4) ; y por directriz $y - 3 = 0$

15.4 LA ELIPSE

Una elipse es el conjunto de todos los puntos de un plano, tal que la suma de las distancias desde cualquiera de estos puntos "**P**" a dos puntos fijos, es constante.

15.4.1 COMPONENTES DE LA ELIPSE:



De la figura:

- A los puntos fijos F y F' se llaman focos
- El punto "O" es el centro de la elipse y es el punto medio de FF'
- A la recta que pasa por los focos se le denomina eje focal
- A los puntos de intersección V_1 y V_2 de la elipse con el eje focal se le llama vértices
- Al segmento $\overline{V_1V_2}$ se le denomina eje mayor y mide 2a
- Al segmento $\overline{A_1A_2}$ se le denomina eje menor y mide 2b

A la recta que pasa por el centro, y es perpendicular al eje local, se llama eje normal, el cual corta a la elipse en los puntos A_2 y A_1

- OF y OF' se le llaman distancias focales, y se representan por "c" por lo tanto: FF' = 2c.

- **Valor de la Constante de la Definición (De una Elipse)**

De la ligura y de acuerdo a la delinición de elipse se dice que:

$$PF + PF' = \underbrace{V_2F + V_2F' = V_1F + V_1F'} = \text{Constante}$$

(siendo: V_2 ,P y V_1 puntos de la elipse)

15.4.2 ECUACIÓN DE LA ELIPSE

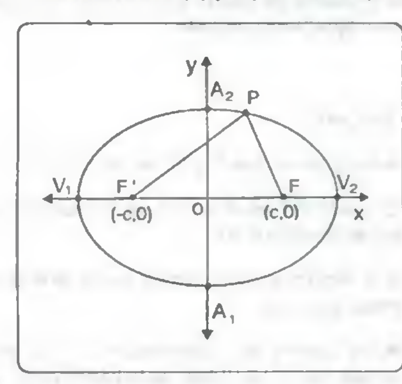
Por definición de elipse: PF + PF' = 2a (constante) ...(I)

- Por lórmula de distancia entre dos puntos hallamos PF y PF

1. $PF = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

2. $PF' = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$

Reemplazamos (1) y (2) en (I): $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$



Eliminando radicales, obtenemos:

$a^2y^2 + x^2(a^2 - c^2) = a^2(a^2 - c^2)$ ... (II)

Por relación Pitagórica en la elipse sabemos que:

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 - c^2 = b^2$ ...(III)

Reemplazamos (III) en (II):

$$a^2y^2 + x^2b^2 = a^2b^2$$

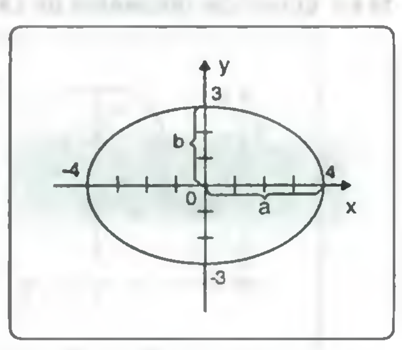
dividimos cada término entre $a^2b^2 \neq 0$

$$\frac{a^2y^2}{a^2b^2} + \frac{x^2b^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(Es la ecuación normal de la elipse cuando sus locos están sobre el eje x)

Ejemplo 1: La ecuación: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$



Tiene por gráfica a una elipse con las siguientes caracteristicas:

- Su centro es el origen (0,0)
- Sus focos estan sobre el eje x o también, su eje mayor está sobre el eje x
- La longitud de su semi eje mayor es: a = 4
- La longitud de su semi eje menor es: b = 3

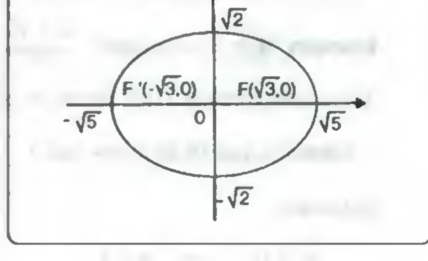
15.4.3 ECUACIÓN NORMAL DE LA ELIPSE CUYOS FOCOS ESTÁN SOBRE EL EJE "Y".

Cuando los focos están sobre el eje y, con un procedimiento similar al anterior, se puede deducir que la ecuación normal de la elipse es:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

("a" sigue representado al semi eje mayor y "b" al semi eje menor)

Ejemplo 2: La elipse cuya ecuación es: $2x^2 + 5y^2 = 10$, puede graficarse fácilmente, conociendo las coordenadas de sus focos y los valores de sus semi ejes.



La ecuación dada: $2x^2 + 5y^2 = 10$

Dividimos cada término entre 10

$$\frac{2x^2}{10} + \frac{5y^2}{10} = \frac{10}{10}$$

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{2} = 1 \quad <> \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

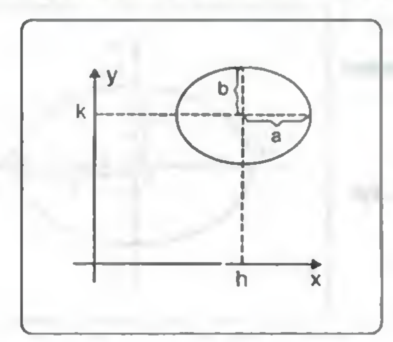
Por comparación: $\begin{cases} a^2 = 5 \rightarrow a = \sqrt{5} \\ b^2 = 2 \rightarrow b = \sqrt{2} \end{cases}$

Nota: Deducimos que sus focos están sobre el eje x, porque a la variedad x le corresponde el mayor denominador.

- Por relación Pitagórica: $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 5 = 2 + c^2 \quad \therefore \quad c = \sqrt{3}$
- Las coordenadas de los focos son: $F(c,o) = F(\sqrt{3},0)$

$$F(-c,0) = F(-\sqrt{3},0)$$

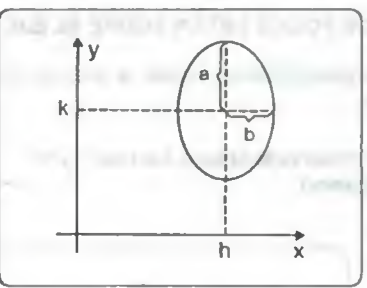
15.4.4 ECUACIÓN ORDINARIA DE LA ELIPSE:



La ecuación de forma:

$$\frac{(x-h)}{a^2}+\frac{(y-k)}{b^2}=1$$

Tiene como expresión gráfica a una elipse de centro C(h,k)



La ecuación de forma:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-h)^2}{a^2}=1$$

Tiene como expresión gráfica a una elipse de centro C(h,k)

Ejemplo 3: La ecuación: $\frac{(x+1)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$

Tiene como gráfica a una elipse de centro: C(h,k) = C(-1,2)

- Sabemos que 16 es mayor que 4

Entonces:

$a^2 = 16 \quad \rightarrow \quad a = 4$

$b^2 = 4 \quad \rightarrow \quad b = 2$

Para graficar la elipse ubicamos el centro, los vértices y los extremos del eje menor, en un mismo plano

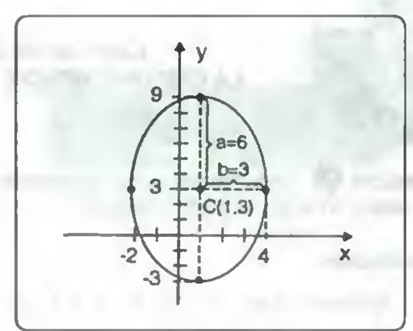
Desarrollando la ecuación:

$$\frac{(x+1)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{4}=1\ ;$$

Obtenemos: $x^2 + 4y^2 + 2x - 16y + 1 = 0$; que pertenece a la forma

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$; $A,C > 0$ (Denominada forma general de la elipse)

Ejemplo: La ecuación: $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{36}=1$; Representa a una elipse de centro C(1,3)



Sabemos que 36 es mayor que 9

Entonces:

$$\begin{cases} a^2 = 36 & \rightarrow \quad a = 6 \\ b^2 = 9 & \rightarrow \quad b = 3 \end{cases}$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 57

A. Grafique las siguientes elipses:

1. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$	3. $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}=1$
2. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$	4. $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{36}=1$

B. Grafique las siguientes elipses:

5. $\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$	8. $\frac{x^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$
6. $\frac{(x-6)^2}{36}+\frac{(y+5)^2}{1}=1$	9. $\frac{(x+3)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{49}=1$
7. $\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$	10. $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{81}=1$

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE LA CIRCUNFERENCIA - LA PARÁBOLA - LA ELIPSE

Ejercicio 1: Determinemos los coeficientes D; E y F de la ecuación general de la circunferencia de centro en el punto (2; 5) y radio 6.

Resolución:

- Sabemos que: $h = 2$; $k = 5$ y $r = 6$

  Reemplacemos en la ecuación principal: $(x-h)^2 + (y-K)^2 = r^2$

  Obtenemos: $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 6^2$

  Desarrollemos los cuadrados de los binomios:

  $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 = 36$; ordenamos y obtenemos la Ecuación general de la circunferencia:

  $x^2 + y^2 - 4x - 10y - 7 = 0$; esta ecuación es de la forma: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

  Por comparación: $D = -4$; $E = -10$ y $F = -7$ ***Rpta.***

Ejercicio 2: Determinemos la ecuación general de la circunferencia si uno de sus diámetros es el segmento que une los puntos A (-5 ; 7) y B (7 ; -3)

Resolución:

- Como las coordenadas del centro corresponde a las coordenadas del punto medio de ambos puntos, sus coordenadas son:

$$(h \; ; \; K) = \left(\frac{-5 + 7}{2} \; ; \; \frac{7 - 3}{2} \right) = (1 \; ; \; 2)$$

  Además, la medida de radio se calcula como la distancia desde el centro a uno de los puntos A o B.

$$r = \sqrt{(7-1)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{36 + 25} = \sqrt{61}$$

  Reemplacemos las coordenadas del centro y radio en la ecuación principal, desarrollemos los cuadrados del binomio y ordenemos:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = \left(\sqrt{61}\right)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y - 56 = 0$$ ***Rpta***

Ejercicio 3: Encontremos la ecuación de la circunferencia que pasa los puntos A(1;0); B(3;-2) y C(1;-4).

Resolución:

- Consideremos la ecuación general: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

  Cada punto A(1;0); B(3;-2) y C(1;-4) pertenece a la circunferencia, y por lo tanto debe satisfacer su ecuación. Reemplazamos y resolvemos el sistema de ecuaciones.

  $1 + 0 + D.1 + E.0 + F = 0 \Rightarrow 1 + D + F = 0$ ...(1)

  $9 + 4 + D.3 + E.(-2) + F = 0 \Rightarrow 13 + 3D - 2E + F = 0$ ...(2)

  $1 + 16 + D.1 + E.(-4) + F = 0 \Rightarrow 17 + D - 4E + F = 0$ ...(3)

- Resolviendo el sistema de ecuaciones; obtenemos:

  $D = -2$; $E = 4$ y $F = 1$; Luego estos valores los reemplazamos en la ecuación general:

  $$x^2 + y^2 + (-2)x + 4y + 1 = 0 \Rightarrow \therefore \boxed{x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0}$$ ***Rpta.***

Ejercicio 4: Consideremos la circunferencia de ecuación: $2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$, calculemos su radio y las coordenadas del centro.

Resolución:

- Multilpicamos la ecuación: $2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$; por 1/2 con el objeto de los coeficientes de x^2 e y^2 sean iguales a 1, como lo establece la ecuación general de la circunferencia.

  $$x\ \frac{1}{2} \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y + 3 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 3y + \frac{3}{2} = 0$$

  Agrupamos los términos según las variables:

  $x^2 - 2x + y^2 + 3y = -\frac{3}{2}$; sumamos en ambos miembros de la igualdad el **cuadrado de la mitad de los coeficientes de x e y.**

  Asi sumaremos: $\left(-\frac{2}{2}\right)^2 = 1$ y $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

  Obteniendo ahora: $\underbrace{x^2 - 2x + 1}_{} + \underbrace{y^2 + 3y + \frac{9}{4}}_{} = \underbrace{-\frac{3}{2} + 1 + \frac{9}{4}}_{}$

  $$(x-1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}$$; que se la ecuación principal de la circunferencia dada.

Por lo tanto: $C\left(1;-\frac{3}{2}\right)$ y $r=\frac{1}{2}\sqrt{7}$ ***Rpta.***

Ejercicio 5 : Determinemos los elementos de la parábola de ecuación $x^2 = 8y$.

Resolución:

- Como la ecuación se de la Forma: $x^2 = 4py$

  Entonces: $4p = 8 \Rightarrow p = 2$; como $p > 0$ y el eje focal coincide conel eje **y**,la curva tiene su **concavidad hacia arriba.**

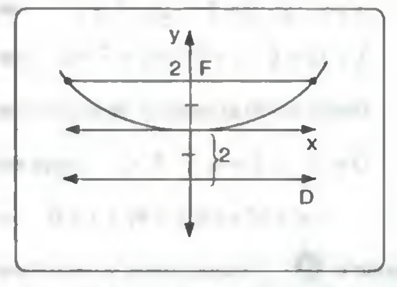
  Las coordenadas del foco son: (0 ; p)

  En este caso; **F(0;2)**

  La ecuación de la directriz es: $y = -p$

  Luego: **D : y = -2**

  El lado recto es: **L.R. = l4pl = 8**



Ejercicio 6 : Determinemos la ecuación de la parábola de Foco F(3;0) y disectriz $x + 3 = 0$

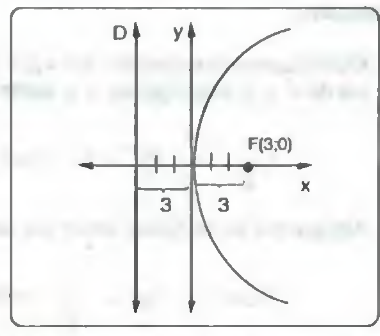
Resolución:

- De las coordenadas del foco; deducimos que el eje focal coincide con el eje x y que $p = 3$.

  Por lo tanto la curva tiene su **concavidad hacia la derecha (p > 0)**

  La ecuación es de la Forma: $y^2 = 4\ px$

  Luego la ecuación pedida es: $y^2 = 12x$



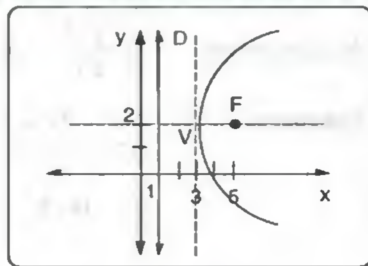
Ejercicio 7: Determinemos los elementos de la parábola de ecuación $y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$

Resolución:

Ordenamos la ecuación para completar el cuadrado del binomio

$$y^2 - 4y = 8x - 28$$
$$y^2 - 4y + 4 = (8x - 28 + 4$$
$$(y - 2)^2 = 8x - 24$$
$$(y - 2)^2 = 8\ (x - 3)$$

Luego, $h = 3$; $k = 2$ y $p = 2$



Entonces el vertice es el punto V(3,2)y el lado recto es 8.

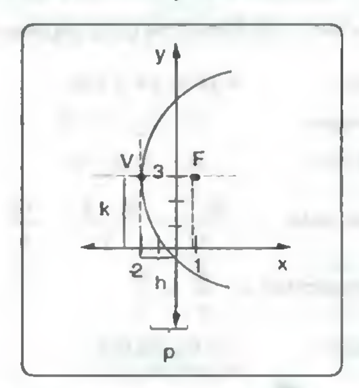
Como esta parábola ha sido trasladada, su eje focal también se ha trasladado en $h = 3$ unidades, por lo tanto las coordenadas del foco son.

$(3 + p, 2 + 0) = (5,2)$ y la ecuación de la directriz es: D: $x = -p + h = -2 + 3 = 1$

D: $x = 1$

Ejercicio 8 : Determinemos la ecuación de la parábola de foco F(1,3) y vértice V(-2,3)

Resolución:



Su ecuación es de la forma.:

$$(y - k)^2 = 4p\,(x - h)$$

Ademas $d(V,F) = p = 3$

Remplazando: $(y - 3)^2 = 4 \,.\, 3\,(x + 2)$

$$y^2 - 6y + 9 = 12x + 24$$

Luego de la Parábola es:

$$y^2 - 6y - 12x - 15 = 0$$

Ejercicio 9: Determinemos la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos (x,y) del plano que equidistan del punto F(2,2) y del eje de las abscisas.

Resolución:

Sabemos que por definición será una parábola con foco en el punto dado y cuya directriz es el eje X.

Entonces,

Foco: F(2,2) Directriz: $y = 0$

Para calcular las coordenadas del vertice, determinemos el punto medio entre el foco (2,2) y el punto (2,0), intersección del eje focal con la directriz, que en este caso, es el propio eje X:

$$h = \frac{2 + 2}{2} = 2 \quad ; \quad k = \frac{2 + 0}{2} = 1$$

La ecuación del lugar geométrico pedido es: $(x - 2)^2 = 4\,(y - 1)$

Ejercicio 10: Encontremos los elementos de la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

Resolución:

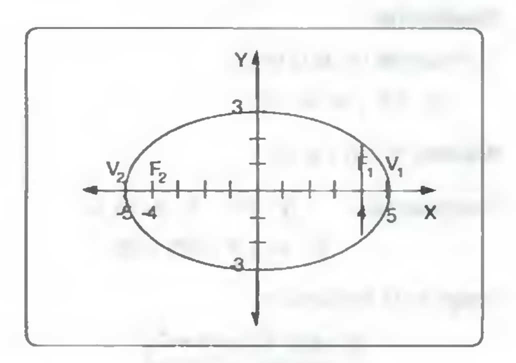
Como la ecuación es de la forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; $(a > b)$

tenemos que: $a^2=25 \Rightarrow a=5$ y $b^2=9 \Rightarrow b=3$

Además: $b^2+c^2=a^2$

de donde $c^2=16 \Rightarrow c=4$

Por lo tanto, los elementos de la elipse son:



Focos: $F_1(4,0)$ y $F_2(-4,0)$

Eje mayor: $2a = 2\ .\ 5 = 10$

Eje menor: $2b = 2\ .\ 3 = 6$

Lado recto $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\cdot 9}{5}=\frac{18}{5}$

Excentricidad $=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$

Vértices: (5,0) y (-5,0)

Ejercicio 11: Determinemos la ecuación de la elipse con focos (0,6) y (0,-6) y semieje menor 8.

Resolución:

De las abscisas de los focos deducimos que el eje focal coincide con el eje de las ordenadas (Y), por lo tanto, la ecuación es de la forma: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

También observamos que: $c=6$; $b=8$

Por la Propiedad pitagórica, obtenemos: $a=10$

La ecuación pedida es: $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$

Ejercicio 12: Determinemos los elementos de la elipse de ecuación $5x^2+9y^2-80x+54y+221=0$

Resolución:

Ordenamos la ecuación para completar los cuadrados de binomio.

$$5x^2-80x+9y^2+54y=-221$$

$$5(x^2-16x)+9(y^2+6y)=-221$$

$$5\ (x^2-16x+64)\ +\ 9\ (y^2+6y+9)\ =\ -221+320+81$$

$$5\ (x-8)^2+9\ (y+3)^2\ =\ 180\ /\ \cdot\ \frac{1}{180}$$

$$\frac{(x-8)^2}{36}+\frac{(y+3)^2}{20}=1$$

Luego, $h=8$ y $k=-3$

entonces el centro es el punto: C(8,-3)

Ademas, $a^2=36 \Rightarrow a=6$

$b^2=20 \Rightarrow b=\sqrt{20}=2\sqrt{5} \Rightarrow b=2\sqrt{5}$

Como $a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c^2=16 \Rightarrow c=4$

Como esta elipse ha sido trasladada con respecto a su posición canónica, su eje focal también se ha trasladado en h = 8 unidades; por lo tanto, las coordenadas de los focos son:

F_1 (8 + c, -3) y F_2 (8 - c,-3).

Entonces,

Focos: F_1(12,-3) y F_2(4,-3)

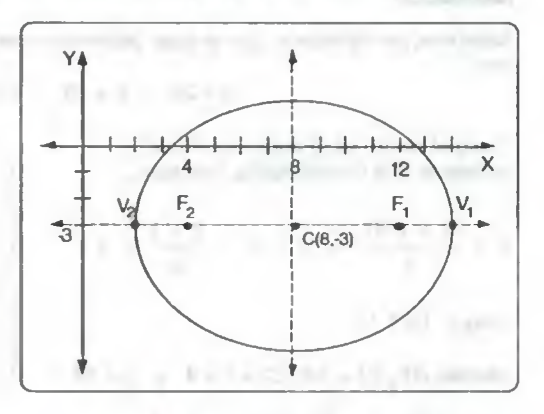
Vertices: V_1(14,-3) y V_2(2,-3)

Eje mayor: $2a=2\cdot6=12$

Eje menor: $2b=2\cdot2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$

Lado recto: $\frac{2b^2}{a}=\frac{2\cdot20}{6}=\frac{40}{6}=\frac{20}{3}$

Excentricidad: $\frac{c}{a}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$



Ejercicio 13: Determinemos la ecuación de la elipse con centro en (3,1), uno de sus vértices (3,-2) y excentricidad 1/3.

Resolución:

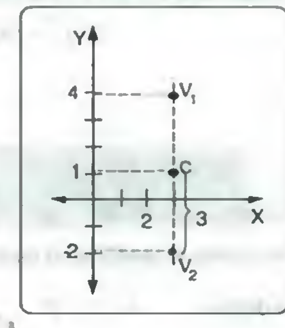
Para determinar la ecuación, ubicamos en un sistema de ejes cartesianos, el punto centro y el vertice,como se ve en la figura.

Como el eje focal es paralelo al eje Y, la ecuación es de la forma

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1\ ,\ \text{con}\ h=3\ \ y\ \ k=1$$

De la figura, tenemos $a = 3$

Además $e = \dfrac{1}{3} = \dfrac{c}{a}$ $\Rightarrow$ $c = 1$



Por propiedad: $b^2 + c^2 = a^2$ obtenemos

$$b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 1 = 8$$

La ecuación pedida en su forma principal es

$$\frac{(x-3)^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

o su equivalente, en forma general: $9x^2 + 8y^2 - 54x - 16y + 17 = 0$

Ejercicio 14 : Determinemos la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos (x, y) del plano, cuya suma de distancias a los puntos fijos (3,1) y (-5,1) es 20.

Resolución:

Sabemos, por definicion, que el lugar geométrico será una elipse con focos en los puntos dados y que:

$$2a = 20 \;\; ; \;\; a = 10 \;\; ; \;\; F_1(3,1) \;\; ; \;\; F_2(-5,1)$$

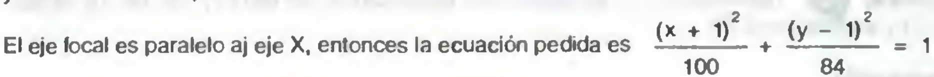
Como el centro es el punto medio del segmento que une los focos, entonces

$$h = \frac{3 + (-5)}{2} = -1 \;\; ; \;\; k = \frac{1 + 1}{2} = 1$$

Luego, $C(-1,1)$

además $d(F_2,C) = d(F_1,C) = c = 4$ y $a = 10$

y como $b^2 + c^2 = a^2$, entonces $b^2 = 84$.



El eje focal es paralelo aj eje X, entonces la ecuación pedida es $\dfrac{(x+1)^2}{100} + \dfrac{(y-1)^2}{84} = 1$

o su equivalente $21x^2 + 25y^2 + 42x - 50y - 2\,054 = 0$

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE LA LÍNEA RECTA - LA CIRCUNFERENCIA - LA PARÁBOLA Y LA ELIPSE

Ejercicio 1: Calcula el valor de "K" en la recta de ecuación: $3Kx - 5y + 1 = 0$ si su pendiente es 5/3.

A) 1 **B)** -1 **C)** 25/9 **D)** 10/6 **E)** 2/5

Ejercicio 2: ¿Cuál es el valor de "K" si las rectas. $L_1: 3x - 2y = 5$ y $L_2: x - Ky = 7$ son paralelas?

A) 2 **B)** 3 **C)** 3/2 **D)** 2/3 **E)** 1/15

Ejercicio 3: La distancia del punto (5;7) a la recta de ecuación $4x - 3y + 2 = 0$ es:

A) $3/\sqrt{29}$ **B)** 3/5 **C)** $\sqrt{29}$ **D)** 1/4 **E)** 1/5

Ejercicio 4: Determina la ecuación de una recta que pasa por el punto (0,0) y es perpendicular a la recta de ecuación $8x + 3y - 2 = 0$

A) $8x + 3y = 0$ **B)** $3x + 8y = 0$
C) $3x - 8y = 0$ **D)** $8x - 3y = 0$
E) Ninguna de las Anteriores.

Ejercicio 5: Determina la ecuación de una recta que pasa por el punto (-3; -2) y forma un angulo de 45 con el eje X.

A) $y = x + 1$ **B)** $y = -x + 1$ **C)** $y = \sqrt{3}x - 3$
D) $y = x + 5$ **E)** $y = -x + 5$

Ejercicio 6: ¿Cuál es el valor de "K" en la circunferencia de ecuación:

$x^2 + y^2 - 3x - 3y + K = 0$, si el radio mide $\sqrt{10/4}$?

A) 1 **B)** -1 **C)** 1/2 **D)** 2 **E)** 3

Ejercicio 7: Las coordenadas del centro de la circunferencia de ecuación:

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 13 = 0; \text{ son:}$$

A) (2;1) **B)** (0;-2) **C)** (8;-2) **D)** (1;2) **E)** (3;4)

Ejercicio 8: En la parábola de ecuación: $y^2 - 4y - 6x + 13 = 0$, las coordenadas del foco son:

A) (2 ; 2) **B)** (3/2 ; 2) **C)** (-2 ; 2)
D) (1/2 ; 2) **E)** (3 ; 2)

Ejercicio 9: Calcula el valor de "K" en la ecuación de la parábola $x^2 = 2xy$, si esta pasa por el punto (3;-2)

A) 5 **B)** -5 **C)** 4/9 **D)** -9/4 **E)** 4

Ejercicio 10: En la elipse de ecuación:

$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$, el lado recto mide:

A) 25/13 **B)** 50/13 **C)** 5/13 **D)** 12 **E)** 8/17

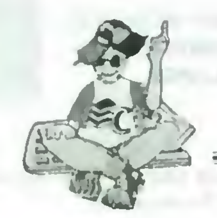
Ejercicio 11: Las coordenadas del centro de la elipse de ecuación:

$$4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0; \text{ son:}$$

A) (0;-4) **B)** (12;-4) **C)** (5 ; 6)
D) (1;2) **E)** (6;-4)

Clave de Respuestas

1. C	2. D	3. E	4. C	5. A
6. D	7. D	8. D	9. D	10. B
11. E				



LA PRIMERA MATEMÁTICA
Hypatia (370 - 412)

La primera mujer matemática de reconocida fama vivió en Alejandría, en una época extraordinariamente tempestuosa y violenta.

Hypatia fue hija de Theon, matemático y filósofo neoplatónico. Aunque parece que ella se ocupó más bien de problemas matemáticos y astronómicos, se convirtió en la cabeza de la escuela neoplatónica de Alejandría. Su elocuencia, modestia, belleza e inteligencia atrajeron a un gran número de seguidores, entre ellos, Synesius de Cirene, que más tarde llegó a ser obispo cristiano y del que se conservan varias cartas dirigidas a Hypatia en las que le pide información sobre la construcción de un astrolabio y otros instrumentos astronómicos.

La ciudad de Alejandría fue lugar de enfrentamientos violentos entre la comunidad cristiana y la pagana. Hypatia simboliza para los cristianos el saber y la ciencia de los clásicos griegos, identificados por los cristianos de Alejandría con el paganismo y, en el año 412, fue bárbaramente asesinada por una multitud de fanáticos seguidores del obispo Cirilo. Su muerte llevó consigo el abandono de la ciudad de muchos intelectuales, lo que marcó el comienzo de la decadencia de Alejandría como centro cultural del saber clásico.

Hypatia escribió comentarios, hoy perdidos, a la Aritmética de Diofanto, a las Crónicas de Apolonio y a la obra de Tolomeo.

Astrolabio

Capítulo 16 REPARTO PROPORCIONAL

Antes de pasar a estudiar el reparto proporcional, hablemos primero sobre magnitudes proporcionales.

16.1 MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

"Dos magnitudes se llaman directamente proporcionales cuando el cociente de sus valores correspondientes es una cantidad constante".

Ejemplo 1 : En el movimiento uniforme, el espacio y el tiempo son magnitudes directamente proporcionales porque el cociente de sus valores correspondientes es, para cada movimiento, una constante llamada velocidad.

MAGNITUDES	VALORES CORRESPONDIENTES			
Espacio	$e_1 = 20$ Km	$e_2 = 40$ Km	$e_3 = 60$ Km	$e_4 = 80$ Km
Tiempo	$t_1 = 2$h	$t_2 = 4$h	$t_3 = 6$h	$t_4 = 8$h

Luego: $\dfrac{e_1}{t_1} = \dfrac{e_2}{t_2} = \dfrac{e_3}{t_3} = \dfrac{e_4}{t_4} =$ Constante = Velocidad

$$\therefore \quad \frac{\text{Espacio (e)}}{\text{Tiempo (t)}} = \text{velocidad (V)}$$

Ejemplo 2 : La circunferencia y el diámetro son magnitudes directamente proporcionales, porque el cociente de sus valores correspondientes es la constante (π)

MAGNITUDES	VALORES CORRESPONDIENTE		
		x 4/3	x 5/4
Circunferencia	$c_1 = 2\pi r_1 = 2\pi(3) = 6\pi$	$c_2 = 2\pi r_2 = 2\pi(4) = 8\pi$	$c_3 = 2\pi r_3 = 2\pi(5) = 10\pi$
Diámetro	$d_1 = 2r_1 = 2(3) = 6$	$d_2 = 2r_2 = 2(4) = 8$	$d_3 = 2r_3 = 2(5) = 10$
		x 4/3	x 5/4

Luego: $\frac{C_1}{d_1} = \frac{C_2}{d_2} = \frac{C_3}{d_3} = \text{Constante} = \pi$

$$\therefore \quad \frac{\text{Longitud de la circunferencia (C)}}{\text{Diámetro de la circunferencia (D)}} = \pi$$

16.2 MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

"Dos magnitudes se llaman inversamente proporcionales, cuando el producto de sus valores correspondientes es una constante"

Ejemplo 1 : En el movimiento uniforme la velocidad y el tiempo son magnitudes inversamente proporcionales porque el producto de sus valores correspondientes es, para cada movimiento, una constante llamada espacio.

MAGNITUDES	VALORES CORRESPONDIENTES			
Velocidad	v_1 = 30 Km/h	v_2 = 60 Km/h	v_3 = 80 Km/h	v_4 = 40 Km/h
Tiempo	t_1 = 8h	t_2 = 4h	t_3 = 3h	t_4 = 6h

Luego: $v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2 = v_3 \cdot t_3 = v_4 \cdot t_4$ = Constante = Espacio

$\therefore$ velocidad (v) tiempo (t) = espacio (e)

- En este ejemplo 1, se cumple que: a mayor velocidad menor será el tiempo empleado.

Nota Importante: Las definiciones anteriores son las que se deben aceptar bajo un punto de vista estrictamente matemático. Es corriente decir que dos magnitudes son directamente proporcionales cuando van de más a más y son inversamente proporcionales cuando van de más a menos. Estos son criterios que se deben desechar, porque hay magnitudes que van de más a más o van de más a menos y sin embargo no son derecta o inversamente proporcionales.

Ejemplo: A mayor radio es evidente que se tiene mayor área en el círculo sin embargo el radio y el circulo no son magnitudes, directamente proporcionales, como vamos a demostrar.

MAGNITUDES	VALORES CORRESPONDIENTES	
Circulo	$\pi \cdot r^2 = \pi(3)^2 = 9\pi$	$\pi R^2 = \pi(4)^2 = 16\pi$
Radios	$r = 3$	$r = 4$

Si estas dos magnitudes fueron directamente proporcionales el cociente de sus valores correspondientes deberia ser constante, lo que no es cierto, porque: ➡

$$\left(\frac{\pi r^2}{r}\right) = \frac{\pi(3)^2}{3} = 3\pi$$

$$\left(\frac{\pi R^2}{R}\right) = \frac{\pi(4)^2}{4} = 4\pi$$

(no son iguales)

Propiedad Importante en las Magnitudes Directamente Proporcionales

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_4}{b_4} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{b_1 + b_2 + b_3 + b_4} = K \text{ (Constante}$$

Verificación

$$\frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{12}{6} = \frac{4 + 6 + 8 + 12}{2 + 3 + 4 + 6} = 2 \text{ (constante)}$$

16.3 REPARTO PROPORCIONAL

El reparto proporcional es una regla que tiene por objeto repartir una cantidad en partes, directa o inversamente proporcional a dos o más números dados.

Notación:

S: Número o suma que se debe repartir
a,b,c: factores de proporcionalidad (pueden ser dos o más)
x,y,z: partes o sumandos respectivamente proporcionales a: a, b y c

Osea: $s = x + y + z$

PROBLEMA GENERAL: Repartir el número (N) en tres partes que sean directamente proporcionales a tres números dados a, b, y c.

Resolución:

Llamemos x, y, z a las partes buscadas, como estas partes deben ser directamente

proporcionales a los números a, b y c, el cociente debe ser constante, de acuerdo con la definición de magnitudes directamente proporcionales:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \text{constante}$$

Por propiedad: $\dfrac{x+y+z}{a+b+c} = \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$ ...(I)

Sabemos que: $x + y + z = N$ ...(II)

Hacemos que: $a + b + c = S$ ...(III)

Reemplazamos (II) y (III) en (I):

$$\frac{N}{S} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

Donde:

Fórmulas por usar ⇨ $x = \dfrac{a.\,N}{S}$; $y = \dfrac{b.\,N}{S}$; $z = \dfrac{c.\,N}{S}$

Aplicación: Dividir el número 1 000 en 3 partes que sean directamente proporcionales a los números 2, 3 y 5.

Resolución:

Llamemos x, y, z a las partes buscadas. Como estas partes deben ser directamente proporcionales a los números a, b y c, el cociente debe ser constante, de acuerdo a la definición de magnitudes directamente proporcionales.

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \text{Constante}$$

Por propiedad: $\dfrac{x + y + z}{2 + 3 + 5} = \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{5}$ pero : $x + y + z = 1\,000$

$$\frac{1\,000}{10} = \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$$

Donde: i) $100 = \dfrac{x}{2}$ → $\boxed{x = 200}$

ii) $100 = \dfrac{y}{3}$ → $\boxed{y = 300}$

iii) $100 = \dfrac{z}{5}$ → $\boxed{z = 500}$

Luego, las 3 partes buscadas son: **200, 300 y 500** **Rpta.**

MÉTODO PRACTICO: Dividir el número 1 000 en tres partes directamente proporcionales a los números 2, 3 y 5.

Resolución:

Sean las 3 partes pedidas — 2k, 3k, 5k ......(I)

Luego: $2k + 3k + 5k = 1\,000$

$10k = 1\,000 \rightarrow k = 100$

Reemplazamos el valor de "k" en (I): obteniendo:

$2k = 2(100) = 200$
$3k = 3(100) = 300$
$5k = 5(100) = 500$

Nota: Si los números a, b y c son heterogéneos habrá que hacerlos previamente homogéneos. Tal es el caso en que los números a, b y c sean quebrados heterogéneos. En este caso se dá un común denominador y se toman solamente los numeradores.

Ejemplo: Repartir 858 en partes directamente proporcionales a los números: $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ y $\frac{4}{5}$

Resolución:

Damos común denominador a los quebrados: $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{4}{5} = \frac{45}{60}, \frac{50}{60}, \frac{48}{60}$

- Tomando sólo los numeradores, obtenemos: $\frac{x}{45} = \frac{y}{50} = \frac{z}{48} =$ constante

Por propiedad: $\frac{\overbrace{x+y+z}}{45+50+48} = \frac{x}{45} = \frac{y}{50} = \frac{z}{48}$; pero: $x + y + z = 858$

Donde: $\frac{858}{143} = \frac{x}{45} = \frac{y}{50} = \frac{z}{48}$

i) $\frac{858}{143} = \frac{x}{45} \rightarrow x = \frac{858 \times 45}{143} \rightarrow$ $x = 270$

ii) $\frac{858}{143} = \frac{y}{50} \rightarrow y = \frac{858 \times 50}{143} \rightarrow$ $y = 300$

iii) $\frac{858}{143} = \frac{z}{48} \rightarrow z = \frac{858 \times 48}{143} \rightarrow$ $z = 288$

Luego, las partes pedidas son: 270, 300 y 288 ***Rpta.***

MÉTODO PRACTICO:

$$858 \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{4}k \\ \frac{5}{6}k \\ \frac{4}{5}k \end{array} \right. \quad \ldots\ldots (I)$$

Donde: $\frac{3}{4}k + \frac{5}{6}k + \frac{4}{5}k = 858$; Damos, común denominador:

$$\frac{45k + 50k + 48k}{60} = 858$$

$$143k = 858 \times 60 \quad \rightarrow \quad k = \frac{858 \times 60}{143} \quad \rightarrow \quad \boxed{k = 360}$$

Reemplazamos el valor de "k" en (I), obteniendo:

$$\frac{3}{4}k = \frac{3}{4} \times 360 = 270$$

$$\frac{5}{6}k = \frac{5}{6} \times 360 = 300$$

$$\frac{4}{5}k = \frac{4}{5} \times 360 = 288$$

16.4 REPARTO PROPORCIONAL INVERSO

PROBLEMA GENERAL: Dividir un número (N) en 3 partes que sean inversamente proporcionales a 3 números dados a, b y c.

Resolución

Llamemos x, y, z las partes buscadas como estas partes deben ser inversamente proporcionales a los números a, b y c, el producto debe ser constante de acuerso con la definición de magnitudes inversamentes proporcionales:

$$x \,.\, a = y \,.\, b = z \,.\, c = \text{constante}$$

Estas igualdades pueden escribirse así: $\boxed{\dfrac{x}{1/a} = \dfrac{y}{1/b} = \dfrac{z}{1/c} = \text{constante}}$

Estas igualdades nos indican que las partes x, y, z son directamente proporcionales a las inversas de los números a, b, c. Se tiene entonces las siguiente resolución general.

"Para dividir el número (N) en partes inversamente proporcionales a otros números dados a, b, y c se divide el número "N" en partes directamente proporcionales a las inversas de los números a, b y c, es decir a: 1/a, 1/b y 1/c"

Aplicación: Repartir 360 en 3 partes que sean inversamente proporcionales a los números 3, 4 y 6.

Resolución:

Tomamos la inversa a los números 3, 4 y 6, obteniendo: 1/3, 1/4 y 1/6.

Luego, damos común denominador a los quebrados: $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6} = \frac{④}{12}, \frac{③}{12}, \frac{②}{12}$

Tomando sólo los numeradores, obtenemos que: $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$ = constante

Por propiedad: $\frac{x+y+z}{4+3+2} = \frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$ Pero: $x + y + z = 360$

$$\frac{360}{9} = \frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$$

Donde: i) $\frac{360}{9} = \frac{x}{4} \rightarrow 40 = \frac{x}{4} \rightarrow \boxed{x = 160}$

ii) $\frac{360}{9} = \frac{y}{3} \rightarrow 40 = \frac{y}{3} \rightarrow \boxed{y = 120}$

iii) $\frac{360}{9} = \frac{z}{2} \rightarrow 40 = \frac{z}{2} \rightarrow \boxed{z = 80}$

Luego, Las partes pedidas son: 160, 120 y 80 ***Rpta.***

MÉTODO PRÁCTICO:

$$360 \begin{cases} \frac{k}{3} \\ \frac{k}{4} \\ \frac{k}{6} \end{cases} \quad \ldots\ldots (I)$$

Donde: $\frac{k}{3} + \frac{k}{4} + \frac{k}{6} = 360$; Damos común denominador

$\frac{4k + 3k + 2k}{12} = 360 \rightarrow 9k = 360 \times 12$

$k = 40 \times 12 \rightarrow \boxed{k = 480}$

Reemplazamos el valor de "k" en (I):

$$\frac{k}{3} = \frac{480}{3} = 160$$
$$\frac{k}{4} = \frac{480}{4} = 120$$
$$\frac{k}{6} = \frac{480}{6} = 80$$

Ejemplo: Repartir 735 en partes inversamente proporcionales a: $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$ y 3

Resolución:

Se toman los inversos de los factores de proporcionalidad, osea:

La inversa de ; $\frac{1}{5}$ es $\frac{5}{1} = 5$

La inversa de $\frac{3}{5}$ es $\frac{5}{3}$

La inversa de 3 es 1/3

- Damos común denominador a: $5 , \frac{5}{3} , \frac{1}{3} = \frac{(15)}{3} , \frac{(5)}{3} , \frac{(1)}{3}$

- Se hace el reparto proporcional directo entre los numeradores

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{5} = \frac{z}{1} = \text{Constante}$$

Por propiedad: $\frac{x + z + y}{15 + 5 + 1} = \frac{x}{15} = \frac{y}{5} = \frac{z}{1}$; Pero: $\boxed{x + y + z = 735}$

$$\frac{735}{21} = \frac{x}{15} = \frac{y}{5} = \frac{z}{1}$$

Donde:

i) $\frac{735}{21} = \frac{x}{15} \rightarrow 35 = \frac{x}{15} \rightarrow \boxed{x = 525}$

ii) $\frac{735}{21} = \frac{y}{5} \rightarrow 35 = \frac{y}{5} \rightarrow \boxed{y = 175}$

iii) $\frac{735}{21} = \frac{z}{1} \rightarrow 35 = \frac{z}{1} \rightarrow \boxed{z = 35}$

16.4.1 CASOS COMBINADOS DE REPARTO PROPORCIONAL

Ejemplo: Repartir 276 en 3 partes directamente proporcionales a 2, 4 y 5 e inversamente proporcionales a 12, 18 y 20

Resolución:

- Los factores directos son: 2, 4 y 5

- Tomamos la inversa a 12, 18 y 20 $\rightarrow$ 1/12, 1/18 y 1/20

Damos común denominador a: $\frac{1}{12} ; \frac{1}{18} ; \frac{1}{20} = \frac{(15)}{180} ; \frac{(10)}{180} ; \frac{(9)}{180}$;

Tomamos solo los numeradores y los multiplicamos por los factores directos 2, 4 y 5 puesto que ambos ya son directos, obteniendo:

$$\boxed{\begin{matrix}2\\15\end{matrix}} \; ; \; \boxed{\begin{matrix}4\\10\end{matrix}} \; ; \; \boxed{\begin{matrix}5\\9\end{matrix}}$$

$$\underbrace{2 \times 15}_{30} \; ; \; \underbrace{4 \times 10}_{40} \; ; \; \underbrace{5 \times 9}_{45}$$

Sacamos quinta a cada término osea dividimos entre 5, obteniendo:

$$30 \Downarrow 6 \; ; \; 40 \Downarrow 8 \; ; \; 45 \Downarrow 9$$

Luego, el reparto sería: $\frac{x}{6} = \frac{y}{8} = \frac{z}{9} = \text{constante}$

Por propiedad: $\frac{x + y + z}{6 + 8 + 9} = \frac{x}{6} = \frac{y}{8} = \frac{z}{9}$; pero : $\boxed{x + y + z = 276}$

$$\frac{276}{23} = \frac{x}{6} = \frac{y}{8} = \frac{z}{9}$$

Donde:

i) $\frac{276}{23} = \frac{x}{6} \rightarrow 12 = \frac{x}{6} \rightarrow \boxed{x = 72}$

ii) $\frac{276}{23} = \frac{y}{8} \rightarrow 12 = \frac{y}{8} \rightarrow \boxed{y = 96}$

iii) $\frac{276}{23} = \frac{z}{9} \rightarrow 12 = \frac{z}{9} \rightarrow \boxed{z = 108}$

Luego, las partes pedidas son: **72; 96 y 108** ***Rpta.***

Ejemplo: Repartir el número 1 560 en tres partes de modo que la primera sea a la tercera como 7 es a 3 y que la primera sea a la segunda como 5 es a 4.

Resolución:

Sean: x = primera parte

y = segunda parte ⇨ $\boxed{x + y + z = 1\,560}$ ......(I)

z = tercera parte

Del enunciado, obtenemos:

i) $\frac{x}{z} = \frac{7}{3}$

ii) $\frac{x}{y} = \frac{5}{4}$

Como "X" se repite tratamos que sean homogéneos o sea que tomen el mismo valor para eso multiplicamos × 5 a los dos términos de (i) y × 7 a los dos términos de (ii), obteniendo:

i) $\frac{x}{z} = \frac{7 \times 5}{3 \times 5} \rightarrow \frac{x}{z} = \frac{35}{15}$ → $x = 35k$, $z = 15k$

ii) $\frac{x}{y} = \frac{5 \times 7}{4 \times 7} \rightarrow \frac{x}{y} = \frac{35}{28}$ → $x = 35k$, $y = 28k$

Reemplazamos los valores de x, y, z en (I): $35k + 28k + 15k = 1\ 560$

$78k = 1\ 560 \quad \therefore \quad k = 20$

Reemplazamos el valor de "k" en: $x = 35k \rightarrow x = 35(20) \rightarrow \boxed{x = 700}$

$y = 28k \rightarrow y = 28(20) \rightarrow \boxed{y = 560}$

$z = 15k \rightarrow z = 15(20) \rightarrow \boxed{z = 300}$

Luego; Las 3 partes pedidas son: 700, 560 y 300 ***Rpta.***

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE REPARTO PROPORCIONAL

Problema **:** Repartir 288 en partes directamente proporcionales a 3 y 5

Resolución:

Sean las dos partes pedidas: x é y

$$288 \begin{cases} x = 3k \\ y = 5k \end{cases} \quad \ldots\ldots(I)$$

Luego: $3k + 5k = 288 \rightarrow 8k = 288 \rightarrow k = \frac{288}{8} \quad \therefore \quad \boxed{k = 36}$

Reemplazamos el valor de "K" en (I):

$x = 3k \rightarrow x = 3(36) \rightarrow x = 108$

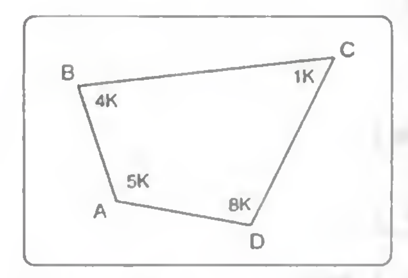
$y = 5k \rightarrow y = 5(36) \rightarrow y = 180$ ***Rpta.***

Problema 2 : ¿Cuál es la medida de cada ángulo de un cuadrilátero, si sus ángulos son directamente proporcionales a: 1, 4, 5 y 8 respectivamente:

Resolución:

Sabemos que; en todo cuadrilátero la suma de sus 4 ángulos internos es igual a 360° veamos:

$$1k + 4k + 5k + 8k = 360^\circ \quad \rightarrow \quad 18k = 360^\circ \quad \therefore \quad k = 20^\circ$$



Luego, los ángulos pedidos son:

$$A = 5k \rightarrow A = 5(20^\circ) \rightarrow \boxed{\hat{A} = 100^\circ}$$

$$B = 4k \rightarrow B = 4(20^\circ) \rightarrow \boxed{\hat{B} = 80^\circ}$$

$$C = 1k \rightarrow C = 1(20^\circ) \rightarrow \boxed{\hat{C} = 20^\circ}$$

$$D = 8k \rightarrow D = 8(20^\circ) \rightarrow \boxed{\hat{D} = 160^\circ}$$ ***Rpta.***

Problema 3: Vanessa repartió cierta cantidad de dinero entre 3 niños en partes proporcionales a los números 4, 5 y 7 si el tercero recibió 42 dólares más que el primero. ¿Qué cantidad de dinero repartió?

Resolución:

Sea: C = Cantidad de dinero a repartirse

$$C \begin{cases} x = 4k \\ y = 5k \\ z = 7k \end{cases} \quad C = 4k + 5k + 7k$$

$$\therefore \quad C = 16k \quad \ldots(I)$$

Del enunciado; el tercero recibió 42 dólares mas que el primero, obtenemos

$$z - x = 42 \text{ dólares}$$

$$7k - 4k = 42 \quad \rightarrow \quad 3k = 42 \quad \therefore \quad k = 14$$

Reemplazamos el valor de "k" en (I)

$$C = 16(14) \quad \therefore \quad C = 224 \text{ dólares}$$ ***Rpta***

Problema 4 : Repartir 225 en partes inversamente proporcionales a: 2 4 y 7

Resolución:

Sean las partes pedidas x, y, z

$$225 \begin{cases} x = k/2 \\ y = k/4 \\ z = k/7 \end{cases} \quad \ldots(I)$$

Luego: $x + y + z = 225$

$$\frac{k}{2} + \frac{k}{4} + \frac{k}{7} = 225;$$ Damos común denominador

$$\frac{14k + 7k + 4k}{28} = 225 \rightarrow \frac{25k}{28} = 225$$

$$k = \frac{225 \times 28}{25} \quad \therefore \quad \boxed{k = 252}$$

Reemplazamos el valor de "k" en (I):

$$x = k/2 \rightarrow x = \frac{252}{2} \rightarrow \boxed{x = 126}$$

$$y = k/4 \rightarrow y = \frac{252}{4} \rightarrow \boxed{y = 63}$$

$$z = k/7 \rightarrow z = \frac{252}{7} \rightarrow \boxed{z = 36}$$ *Rpta.*

Problema 5 : Un padre repartio una suma de dinero entre sus tres hijos; uno de 10 años, el otro de 12 años y el otro de 14 años. Si el reparto fue inversamente proporcional a sus edades recibiendo el de mayor edad 420 soles. ¿Cuál es la suma repartida?

Resolución:

Sea: "N" = suma repartida

$$N \left\{ \begin{array}{l} x = k/10 \\ y = k/12 \\ z = k/14 \end{array} \right\} \quad \text{... (I)}$$

Del enunciado: $\frac{k}{14} = 420 \rightarrow \boxed{k = 420 \times 14}$

Reemplazamos valores de "k" en (I):

$$x = \frac{k}{10} \rightarrow x = \frac{420 \times 14}{10} \rightarrow \boxed{x = 588 \text{ soles}}$$

$$y = \frac{k}{12} \rightarrow y = \frac{420 \times 14}{12} \rightarrow \boxed{y = 490 \text{ soles}}$$

$$z = \frac{k}{14} \rightarrow z = \frac{420 \times 14}{14} \rightarrow \boxed{z = 420 \text{ soles}}$$

Luego; La suma repartida es: $\boxed{x + y + z = 1\,498}$ ***Rpta.***

TALLER DE PROBLEMAS Nº 58

Problema 1 : Dividir el número 490 en 4 partes que sea directamente proporcionales a los números 2;3;4 y 5. Dar como respuesta la mayor de las partes.

Resolución:

Rpta: 175

Problema 2 : Repartir 570 en partes directamente proporcionales a los números 3/4;2/3 y 1/6. Dar como respuesta la menor de las partes.

Resolución:

Rpta: 60

Problema 3 : Repartir 650 en 3 partes directamente proporcionales a 3;4 y 6 e inversamente proporcionales a 6;12 y 24. Dar como respuesta la mayor de las partes.

Resolución:

Rpta: 300

Problema 4 : Repartir el número 615 en tres partes de modo que la primera sea a la tercera como 9 es a 4 y que la primera sea a la segunda como 6 es a 5. Dar como respuesta la suma de los dos menores.

Resolución:

Rpta: 345

PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE REPARTO PROPORCIONAL

Problema : Repartir 420 en partes directamente proporcionales a 5 y 7. Dar como respuesta la diferencia de dichas partes.

A) 120 B) 90 C) 70 D) 35 E) 175

Problema : Repartir 143 en partes directamente proporcionales a 2;3 y 6. Dar como respuesta la suma de los las dos mayores.

A) 65 B) 117 C) 104 D) 127 E) N.A.

Problema : Repartir 740 en partes directamente proporcionales a 2;3/4 y 1/3. Dar como respuesta la menor de las partes.

A) 480 B) 180 C) 80 D) 60 E) N.A.

Problema : Repartir 135 en partes directamente proporcionales a 0,3 ; 1/5 y 4. Dar como respuesta la mayor de las partes.

A) 100 B) 60 C) 140 D) 120 E) N.A.

Problema : Nataly repartió cierta cantidad de caramelos entre 3 niños, en partes proporcionales a los números 3; 5 y 8, si el tercero recibió 78 más que el segundo. ¿Cuál es la cantidad de caramelos que repartió?

A) 461 B) 416 C) 641 D) 248 E) 426

Problema : Las medidas de los ángulos de un pentágono son directamente proporcionales a 1;2;4;6 y 7. Hallar la medida del mayor de los ángulos.

A) 198° B) 108° C) 162° D) 189° E) 164°

Problema : Una madre reparte un cierto número de manzanas entre sus dos hijas, en partes proporcionales a los números 3 y 5, si la segunda ha recibido 42 manzanas más que la primera. ¿Cuál es el número total de manzanas que distribuye ?

A) 146 B) 172 C) 186 D) 168 E) 184

Problema : Repartir 110 en partes inversamente proporcionales a 3 y 7. Dar como respuesta la diferencia de dichas partes.

A) 33 B) 44 C) 66 D) 77 E) 22

Problema : Repartir 288 en partes inversamente proporcionales a: 3/2;3/4 y 1/6. Dar como respuesta una de las partes.

A) 26 B) 49 C) 216 D) 84 E) 62

Problema : Repartir 455 entre "A";"B" y "C" de modo que lo de "A" sea a lo de "B" como 2 es a 3; y lo de "B" sea a lo de "C" como 4 es a 5. ¿Cuánto le tocó a "C" ?

A) 104 B) 195 C) 156 D) 185 E) N.A.

Problema : Las medidas de los ángulos de un triángulo son directamente proporcionales a 2;5 y 8. Hallar la medida del mayor de dichos ángulos.

A) 60° B) 84° C) 96° D) 104° E) 98°

Problema : Repartir 252 entre A; B y C de modo que lo de "A" sea a lo de "B" como 4 es a 7; y lo de "A" sea a lo de "C" como 2 es a 5. ¿Cuánto le tocó a "A" ?

A) 84 B) 48 C) 120 D) 68 E) 46

Problema : Un padre repartió 66 soles entre tres hijos uno de 8 años; otro de 12 años y el otro de 15 años. Si el reparto fue inversamente proporcional a las edades, ¿Cuánto recibió el de 8 años ?

A) S/.30 **B)** S/.20 **C)** S/.6 **D)** S/.40 **E)** N.A.

Problema : Repartir 480 en tres partes directamente proporcionales a 3;4 y 5 e inversamente proporcionales a 6;12 y 18. Dar como respuesta una de las partes.

A) 261 **B)** 144 **C)** 130 **D)** 140 **E)** 117

Problema : Repartir 1134 en tres partes cuyos cuadrados sean directamente proporcionales a 8; 50 y 98. Dar la menor parte.

A) 81 **B)** 162 **C)** 324 **D)** 405 **E)** 567

Problema : Si al repartir 6138 en partes directamente proporcionales a 1;2;4;8;.......;2^n; la mayor de las partes es 3072. ¿Cuál es el valor de "n" ?

A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

Problema : Se reparte el número 60 directamente proporcional a 5 números consecutivos. Hallar la suma de lo que reciben el 1ro ; 3ro y 5to.

A) 24 **B)** 36 **C)** 32 **D)** 34 **E)** N.A.

Problema : Un tio reparte 75 950 entre sus 4 sobrinos de la forma siguiente: lo que le toca al segundo es a lo que le toca al primero como 5 es a 3; lo del segundo es a lo del es a lo del tercero es a lo del cuarto como 2 es a 5. ¿Cuánto recibe el que le tocó más ?

A) 25 250 **B)** 26 750 **C)** 27 350
D) 26 250 **E)** 25 750

Clave de Respuestas

1. C	2. B	3. C	4. D	5. B
6. D	7. D	8. B	9. C	10. B
11. C	12. B	13. A	14. B	15. B
16. B	17. B	18. D		

16.5 REGLA DE SOCIEDAD O COMPAÑÍA

16.5.1 OBJETIVO:

La regla de sociedad o compañia tiene por objeto repartir las ganancias o pérdidas entre los diversos socios.

16.5.2 CLASES:

La regla de sociedad o compañía puede ser; simple o compuesta.

16.5.3 REGLA DE SOCIEDAD SIMPLE:

Se llama simple en los tres siguientes casos:

1° Capitales iguales y tiempos iguales

2° Capitales iguales y tiempos desiguales; y

3° Tiempos iguales y capitales desiguales

Primer Caso: Si los capitales y tiempos son iguales se divide la ganancia o pérdida entre el número de socios.

Ejemplo: Tres socios han formado una compañía aportando cada uno de ellos 500 soles; al cabo de seis meses hay ganancias de 3 000 soles. ¿Cuánto le corresponde de ganancia a cada uno?

Resolución

A cada socio le corresponde: $\dfrac{3\,000 \text{ soles}}{3} = 1\,000$ soles de ganancia para cada socio

Segundo Caso: Si los capitales son iguales y los tiempos desiguales se divide la ganancia o pérdida en partes directamente proporcionales a los tiempos.

Ejemplo: Tres socios forman una compañía. Cada uno de ellos aporta un mismo capital. El primero durante 2 años el segundo durante 3 años y el tercero durante 5 años. Habiendo una ganancia de 7 000 dólares, se desea saber cuánto le corresponde a cada uno.

Resolución

Sean: x, y, z la ganancia que le corresponde a cada uno, del enunciado, obtenemos:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \text{Constante}$$

Por propiedad: $\dfrac{x+y+z}{2+3+5} = \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{5}$; pero : $\boxed{x + y + z = 7\,000}$

$$\frac{7\,000}{10} = \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$$

Donde: I) $700 = \dfrac{x}{2} \rightarrow x = 1\,400$ dólares

II) $700 = \dfrac{y}{3} \rightarrow y = 2\,100$ dólares

III) $700 = \dfrac{z}{5} \rightarrow z = 3\,500$ dólares *Rpta.*

Tercer Caso: Si los tiempos son iguales y capitales disiguales, se divide la ganancia o pérdida en partes directamente proporcionales a los capitales.

Ejemplo: Tres socios forman una compañía, el primero aporta 2 000 dólares, el segundo aporta 3 000 dólares y el tercero aporta 5 000 dólares. ¿Cuánto corresponde a cada socio, si la ganancia es de 20 000 dólares?

Resolución:

Sea: x, y, z, lo que le corresponde a cada socio

Del enunciado, obtenemos: $\dfrac{x}{2\,000} = \dfrac{y}{3\,000} = \dfrac{z}{5\,000}$

Por propiedad: $\dfrac{x+y+z}{2\,000 + 3\,000 + 5\,000} = \dfrac{x}{2\,000} = \dfrac{y}{3\,000} = \dfrac{z}{5\,000}$

$$\frac{20\,000}{10\,000} = \frac{x}{2\,000} = \frac{y}{3\,000} = \frac{z}{5\,000}$$

Donde: I) $2 = \dfrac{x}{2\,000}$ → x = 4 000 dólares

II) $2 = \dfrac{y}{3\,000}$ → y = 6 000 dólares

III) $2 = \dfrac{z}{5\,000}$ → z = 10 000 dólares **Rpta.**

Ejemplo: Sara inicia un negocio con 5 000 dólares. A los 4 meses se asocia con Manuel quien aporta 8 000 dólares, 3 meses después Nataly ingresa al negocio con 6 000 dólares. Al año de iniciado el negocio se efectúa el balance y la ganancia es de 462 000 dólares ¿Qué parte de esta ganancia le corresponde a cada uno?

Resolución:

Este problema se razona de la siguiente manera:

- Los 5 000 dólares de Sara fueron trabajados 12 meses, correspondiendo: 5 000 x 12 = 60 000 dólares.
- Los 8 000 dólares de Manuel fueron trabajos(12 - 4) = 8 meses, correspondiendo: 8 000 x 8 = 64 000 dólares.
- Los 6 000 dólares de Nataly fueron trabajados (8 - 3) = 5 meses, correspondiendo: 6 000 x 5 = 30 000 dólares.

Ahora llamamos: x, y, z a las ganancias que le corresponde a cada uno.

Donde: $\dfrac{x}{60\,000} = \dfrac{y}{64\,000} = \dfrac{z}{30\,000}$

Por propiedad: $\dfrac{x+y+z}{60\,000 + 64\,000 + 30\,000} = \dfrac{x}{60\,000} = \dfrac{y}{64\,000} = \dfrac{z}{30\,000}$

$$\frac{462\,000}{154\,000} = \frac{x}{60\,000} = \frac{y}{64\,000} = \frac{z}{30\,000}$$

$$3 = \frac{x}{60\,000} = \frac{y}{64\,000} = \frac{z}{30\,000}$$

Donde: I) $3 = \dfrac{x}{60\ 000}$ → x = 180 000 dólares

II) $3 = \dfrac{y}{64\ 000}$ → y = 192 000 dólares

III) $3 = \dfrac{z}{30\ 000}$ → z = 90 000 dólares ***Rpta.***

PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE REGLA DE SOCIEDAD O COMPAÑÍA

Problema : Cinco amigos aportan cada uno 4 550 dólares para efectuar un negocio. Al final de este negocio obtienen una ganancia de 3 550 dólares. ¿Cuánto de esta ganancia le corresponde a cada uno?

A) 630 dólares **B)** 710 dólares
C) 810 dólares **D)** 750 dólares
E) N.A.

Problema : Tres amigos aportan cada uno 6 500 dólares para efectuar un negocio. Al final de éste obtienen una pérdida de 3 510 dólares. ¿Cuánto de esta pérdida le corresponde a cada uno?

A) 1 360 dólares **B)** 1 270 dólares
C) 1 170 dólares **D)** 1 400 dólares
E) N.A.

Problema : Tres socios han obtenido una ganancia de 4 300 soles. ¿Cuánto le corresponde a uno de ellos, si el primero invirtió en el negocio 4 000 soles, el segundo 6 000 soles, y el tercero 7 200 soles?

A) S/. 1 200 **B)** S/. 1 400 **C)** S/. 1 600
D) S/.1 500 **E)** N.A.

Problema : Tres socios han tenido una pérdida de 8 800 soles. El primero invirtió en la sociedad 4 000 soles durante 3 años; el segundo 7 000 soles durante 2 años; y el tercero 4 500 soles durante 4 años. ¿Cuál es la pérdida que le corresponde a uno de ellos?

A) S/. 4 200 **B)** S/. 3 200 **C)** S/. 2 800
D) S/. 2 600 **E)** N.A

Problema : Dos socios A y B ganarán 21 000 dólares al final de los 8 meses que duró un negocio. Cada uno aportó 6 000 dólares pero el socio B ingresó al negocio 2 meses después de la iniciación del mismo. ¿Cuánto le corresponde a uno de ellos de la ganancia obtenida?

A) 11 000 dólares **B)** 9 000 dólares
C) 8 000 dólares **D)** 6 000 dólares
E) N.A.

Problema : A y B reúnen 850 dólares para un negocio. A aporta 350 dólares y el resto es cubierto por B. Al finalizar el negocio tienen una ganancia de 595 dólares. ¿Qué parte de la ganancia le corresponde a uno de ellos?

A) 245dólares **B)** 265 dólares
C) 360 dólares **D)** 380 dólares
E) N.A

Problema : Manuel emprende un negocio con un capital de 2 500 dólares. A los 2 meses entra como socio, Miguel aportando 2 500 dólares y al cabo de otros dos meses admiten a

Walter, aportando también 2 500 dólares. Si después de un año de emprendido el negocio tienen una ganancia de 4 500 dólares ¿Cuánto le toca a uno de ellos?

A) 1 300 dólares B) 1 400 dólares
C) 1 500 dólares D) 1 700 dólares
E) N.A

Problema : Cuatro amigos forman una pequeña empresa. La primera aporta 2/5 del capital la segunda 1/3 del capital, la tercera 400 dólares y la cuarta 300 dólares, obteniendo un beneficio de 2 100 dólares ¿Cuánto le toca a uno de ellos?

A) 840 dólares B) 600 dólares
C) 360 dólares D) 280 dólares
E) N.A

Clave de Respuestas

1. B	2. C	3. D	4. C
5. B	6. A	7. C	8. A

16.6 PROMEDIOS

16.6.1 PROMEDIO:

Se denomina promedio o cantidad media de varias cantidades diferentes a una cantidad inferior a la mayor y superior a la menor.

Sean las cantidades: $a_1; a_2; a_3; \ldots\ldots ; a_n$

Donde: $a_1 \leq p \leq a_n$ → Es un promedio

Existen varios tipos de promedios siendo los más importantes.

16.6.2 PROMEDIO ARITMÉTICO ($\overline{P.A}$)

Se llama asi a la suma de "n" cantidades dividida entre "n".

Sean las cantidades que intervienen: $a_1; a_2; a_3; \ldots\ldots ;a_n$

Luego:

$$\overline{P.A} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$$

Ejemplo: Calcular el promedio de: 20, 30 y 40

Resolución:

Por definición de promedio aritmético, obtenemos:

$$\overline{P.A} = \frac{20 + 30 + 40}{3} = \frac{90}{3} = 30 \quad \therefore \quad \boxed{\overline{P.A} = 30}$$

16.6.3 PROMEDIO GEOMÉTRICO ($\overline{P.G.}$)

Se llama asi a la raíz enésima del producto de "n" factores.

Sean las cantidades que intervienen: $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n$

Luego: $$\boxed{\overline{P.G} = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times a_3 \times \ldots\ldots \times a_n}}$$

Ejemplo: Calcular el promedio geométrico de los números: 2, 4 y 8

Resolución:

Por definición de $\overline{P.G}$, obtenemos:

$$\overline{P.G} = \sqrt[3]{2.4.8} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4 \quad \therefore \quad \boxed{\overline{P.G} = 4}$$

16.6.4 PROMEDIO ARMÓNICO: (P.H):

Se denomina promedio armónico de varias cantidades a la inversa del promedio aritmético de los recíprocos de dichas cantidades.

Sean las cantidades que intervienen: $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ sus inversas de dichas cantidades serán:

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots\ldots, \frac{1}{a_n}$$

Luego: $$\overline{PH} = \frac{1}{\left(\dfrac{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}}{n}\right)}$$

Ejemplo : Calcular el promedio armónico de: 3, 4 y 5

Resolución:

Por definición de P.H, obtenemos:

$$\overline{PH} = \frac{1}{\left(\dfrac{\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5}}{3}\right)} = \frac{3}{\left(\underbrace{\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5}}\right)}$$

Damos común de nominador

$$\overline{PH} = \frac{3}{\left(\dfrac{20 + 15 + 12}{60}\right)} = \frac{3(60)}{47} \quad \therefore \quad \boxed{\overline{PH} = \frac{180}{47}}$$

PROPIEDAD:

Para un conjunto de números desiguales, su promedio aritmético es siempre mayor que su promedio geométrico y éste a su vez mayor que su promedio armónico.

$$\boxed{\overline{P.A} > \overline{P.G} > \overline{P.H}}$$

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE PROMEDIOS

Problema 1: El promedio aritmético de 6 números es 5, si dos de dichos números es 3 y 7. Calcular el promedio de los 4 números restantes.

Resolución:

Sean los números: $\underbrace{a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4}_{\text{No se conocen}}, \quad \underbrace{3, \quad 7}_{\text{Se conocen}}$

Por definición de P.A:

$$P.A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 3 + 7}{6} \Rightarrow 5 = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 10}{6}$$

$$30 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 10 \; ; \rightarrow \boxed{20 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4} \qquad ......(I)$$

Luego; el promedio de 4 números restantes sería:

$$\text{Promedio } 4_{\#s} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \qquad ......(II)$$

Reemplazamos (I) en (II): $\boxed{\text{Promedio } 4_{\#s} = \frac{20}{4} = 5}$ ***Rpta.***

Problema 2 : Hallar el promedio aritmético de: $\underbrace{4, 4, 4, ...,4}_{8 \text{ veces}}$ y $\underbrace{-3, -3, ...,-3}_{6 \text{ veces}}$

Resolución:

En primer lugar, calculamos las siguientes sumas:

$$\underbrace{4, 4, 4, ...,4}_{8 \text{ veces}} = \underbrace{4 + 4 + 4 + ...+ 4}_{8 \text{ veces}} = 8(4) = 32$$

$$\underbrace{-3, -3, ...-3}_{6 \text{ veces}} = \underbrace{(-3) + (-3) + (-3)}_{6 \text{ veces}} = 6(-3) = -18$$

Luego: $\text{Promedio} = \dfrac{\text{Suma de Cantidades}}{\text{\# de cantidades}} = \dfrac{(32)+(-18)}{8+6}$

$\therefore$ $\boxed{\text{Promedio} = \dfrac{14}{14} = 1}$ **Rpta.**

Problema 3: El promedio aritmético de 5 números es 25, si el promedio aritmético de 2 de ellos es 20. ¿Cuál es la suma de los 3 números restantes?

Resolución:

Sean los 5 números a_1, a_2, a_3, a_4, a_5

$$\text{Promedio}_{(5 \# s)} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5}$$

$$25 = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5}$$

$$\boxed{125 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5} \quad \text{...(I)}$$

Promedio aritmético de 2 de los números es 20. Veamos:

$$\text{Promedio } (2 \# s) = \frac{a_4 + a_5}{2}$$

$$20 = \frac{a_4 + a_5}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{40 = a_4 + a_5} \quad \text{....(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I): $125 = a_1 + a_2 + a_3 + \underbrace{a_4 + a_5}$

$$125 = a_1 + a_2 + a_3 + 40$$

$\therefore$ $\boxed{a_1 + a_2 + a_3 = 85}$ ***Rpta.***

Problema 4: El promedio de 7 números es 20. Si se agrega un nuevo número el promedio no varía (O sea sigue siendo 20). ¿Cuál es ese nuevo número?

Resolución:

Sean los 7 números: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7

$$\text{Promedio } (7 \# s) = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7}{7}$$

$$20 = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7}{7}$$

$$\boxed{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 140} \quad \text{......(I)}$$

Sea: x = nuevo números que debe agregarse

Luego: Promedio $(8 \# s) = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + x}{8}$

$$20 = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + x}{8}$$

Reemplazamos (I) en (II):

$$20 = \frac{140 + x}{8} \rightarrow 160 = 140 + x \quad \therefore \quad \boxed{x = 20} \quad \textit{Rpta.}$$

Problema 5 : El producto entre el promedio aritmético y el promedio armónico de dos números es 4. Calcular el promedio geométrico de dichos números.

Resolución:

Sean los 2 números: a y b

Del enunciado: $\overline{P.A} \times \overline{P.H} = 4$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right) \times \left[\frac{1}{\left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}\right)}\right] = 4$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right) \times \left[\frac{2}{\left(\frac{a+b}{ab}\right)}\right] = 4 \rightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)\left[\frac{2ab}{a+b}\right] = 4 \quad \therefore \quad \boxed{ab = 4} \quad \text{......(I)}$$

Luego: $\boxed{P.G = \sqrt{ab}}$ ...... (II)

Reemplazamos (I) en (II): $\therefore$ $\boxed{P.G = \sqrt{4} = 2}$ ***Rpta.***

Problema 6 : El promedio armónico de 2 números es 0,4 y el promedio aritmético de los mismos es 10. Calcular el producto de dichos números.

Resolución:

Sean los 2 números pedidos: a y b

Del enunciado: $P.H.(2 \# s) = \dfrac{1}{\left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}\right)} = \dfrac{2ab}{a+b}$

$$0,4 = \frac{2ab}{a+b} \rightarrow \frac{4}{10} = \frac{2ab}{a+b} \rightarrow \boxed{\frac{2}{5} = \frac{2ab}{a+b}} \quad \text{......(I)}$$

Además $\underbrace{P.A\,(2\#\,s)}$ $= \frac{a+b}{2} \rightarrow \underbrace{10} = \frac{a+b}{2} \rightarrow$ $\boxed{a + b = 20}$ ......(II)

Remplazamos (II) en (I): $\frac{2}{5} = \frac{2(ab)}{20} \rightarrow \frac{40}{10} = ab \quad \therefore \quad \boxed{ab = 4}$ ***Rpta***

PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE PROMEDIOS

Problema: Hallar el promedio aritmético de los siguientes números:

$\underbrace{10, 10, 10, ...10}_{8\text{ veces}}; \underbrace{20, 20, 20, ...20}_{7\text{ veces}}; \underbrace{5, 5, 5,......,5}_{10\text{ veces}}$

A) 10,4 **B)** 11,8 **C)** 18,6 **D)** 10,8 **E)** N.A.

Problema: El promedio de 8 números es 6 si 3 de dichos números son: 4, 5 y 6. Calcular el promedio de los 5 números restantes.

A) 5,8 **B)** 6,6 **C)** 7,2 **D)** 7,6 **E)** 8,4

Problema: El promedio aritmético de 10 números es 15, si el promedio aritmético de 4 de ellos es 12. ¿Cuál es la suma de los 6 números restantes?

A) 108 **B)** 106 **C)** 102 **D)** 94 **E)** 86

Problema: Hallar el promedio de los siguientes números:

$\underbrace{a, a, a, a, ...a}_{\text{"2n" veces}}; \underbrace{2a, 2a, ...2a}_{\text{"3n" veces}}; \underbrace{-3a, -3a, -3a, ...,-3a}_{\text{"n" veces}}$

A) $\frac{6}{5}$ a **B)** $\frac{5a}{6}$ **C)** $\frac{4}{3}$ a **D)** $\frac{5}{2}$ a **E)** N.A.

Problema: El promedio de 15 números es 8. Si se agrega un nuevo número el promedio no varia (o sea sigue siendo 8). ¿Cuál es ese nuevo número?

A) 6 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 5 **E)** 4

Problema: El promedio aritmético de 8 números consecutivos es 13,5. Hallar dos números consecutivos que se debe quitar para que el promedio aritmético de los números restantes sea 13,5.

A) 12 y 13 **B)** 13 y 14 **C)** 15 y 16
D) 16 y 17 **E)** 18 y 19

Problema: El promedio geométrico de 2 números es 4 y el promedio armónico de los mismos es 3. Hallar el promedio aritmético de dichos números.

A) 19/3 **B)** 15/4 **C)** 16/3 **D)** 8/3 **E)** N.A.

Problema: El promedio aritmético de 2 números es m y el promedio geométrico de los mismos es n. Hallar el promedio armónico de dichos números.

A) n^2m^2 **B)** nm **C)** n/m^2 **D)** n^2/m **E)** m^2n

Problema: Hallar un número entero, sabiendo que el promedio armónico de su mitad y su quinta parte es 16. Dar como respuesta la suma de las cifras de dicho número.

A) 12 B) 11 C) 13 D) 15 E) N.A.

Problema 10 : Sean: a y b dos números enteros, si el producto del promedio aritmético con su promedio armónico es igual doble de su promedio geométrico, entonces el menor valor de: "a + b" es:

A) 6 B) 5 C) 4 D) 8 E) 9

Clave de Respuestas

1. D	2. B	3. C	4. B	5. B
6. B	7. C	8. D	9. B	10. B

16.7 REGLA DE MEZCLA

Se llama mezcla o aligación a la unión de varias sustancias conservando cada una de ellas su propia naturaleza.

En el comercio se acostumbra mezclar diversas clases de una mercadería con el objeto de poder venderlas a un precio promedio. Se llama precio de una mercadería al costo de la unidad y valor al costo total de la mercadería.

Si 10 kilos de arroz cuesta 32 soles, el precio de esta mercancía es 3,20 soles y su valor es 32 soles.

EN GENERAL

Si llamamos (V) al valor de una mercadería, (p) a su precio y (μ) al número de unidades se tiene.

$$V = \mu p$$

16.7.1 REGLA DE MEZCLA DIRECTA.

Tiene por objeto determinar el precio promedio de una mezcla. Bastará para esto, dividir el valor total de la mezcla entre el número total de unidades de la mezcla.

Ejemplo: Se ha mezclado 200 litros de aguardiente de precio S/. 5 con 300 litros de precio S/. 7 y con 500 litros de precio S/. 9. ¿Cuál es el promedio de la mezcla?

Resolución:

	Nº litros	Costo	
(+)	200 litros	200 × S/. 5. = S/. 1 000	(+)
	300 litros	300 × S/. 7. = S/. 2 100	
	500 litros	500 × S/. 9. = S/. 4 500	
	1 000 litros	S/. 7 600	

Luego: $\text{Precio promedio} = \dfrac{S/.\ 7\ 600}{1\ 000} = S/.\ 7{,}60$

Demostración: El precio obtenido S/. 7,60 se llama precio promedio de la mezcla porque es una cantidad promedio entre precios dados S/. 5., S/. 7 , S/. 9.

En efecto: $\boxed{P = \dfrac{V}{\mu}}$

Luego: $S/.\ 5 = \dfrac{S/.\ 1\,000}{200}$ = primer precio $\qquad S/.\ 7 = \dfrac{S/.\ 2100}{300}$ = segundo precio

$$S/.\ 9 = \frac{S/.\ 4\,500}{500} = \text{tercer precio}$$

Ya hemos visto que la suma de los numeradores dividida entre la suma de los denominadores, constituye una cantidad promedio.

$$\frac{1\,000 + 2\,100 + 4\,500}{200 + 300 + 500} = \frac{7\,600}{1\,000} = 7{,}60 \text{ (precio promedio)}$$

Nótese: Que S/. 7.60 es un precio promedio que es muy diferente al promedio aritmético de los tres precios dados cuyo valor es:

$$\frac{S/.\ 5 + S/.\ 7 + S/.\ 9}{3} = \frac{S/.\ 21}{3} = S/.\ 7$$

Problema 1 : Se mezclan 100 litros de aceite de 12 soles con 400 litros de aceite de 15 soles el litro ¿Cuál es el precio promedio de la mezcla?

Resolución.

- Disponemos los datos de la siguiente manera:

Nº de litros		Costo
100		100 x S/. 12 = S/. 1 200
400		400 x S/. 15 = S/. 6 000
500	⟶	S/. 7 200
1	⟶	x

Por regla de tres: $x = \dfrac{S/.\ 7\,200}{500} = S/.\ 14{,}40$

El precio promedio de un litro de la mezcla es de 14,40 soles

Problema 2 : ¿A qué precio se debe vender el kg de una mezcla para ganar el 20% del costo sabiendo que en ella se han empleado 50 kg de un producto P de S/. 32 el kg, 30 kg de un producto Q de S/. 45 el kg; y 20 kg de un producto R de S/. 26 el kg.

Resolución:

- Primero hallamos el precio promedio de la mezcla.

Nº de kg		Costo
50		50 × S/. 32 = S/. 1 600
30		30 × S/. 45 = S/. 1 350
20		20 × S/. 26 = S/. 520
100	————	S/. 3 470
1	————	x

Por regla de tres: $x = \frac{S/.\ 3\ 470}{100} = S/.\ 34{,}70$

El precio promedio es de 34,70 soles. El 20% de 34,70 soles es:

$$\frac{20}{100} \times S/.\ 34{,}70 = S/.\ 6{,}94$$

∴ El kg de la mezcla se debe vender en: S/. 34,70 + S/. 6,94 = S/. 41,64 para ganar el 20% del costo.

16.7.2 REGLA DE MEZCLA INVERSA.

Tiene por objeto determinar el número que se debe tomar de diversas clases de una mercadería para obtener una mezcla de precio promedio dado.

CASOS DE UNA MEZCLA DE DOS CLASES.

PROBLEMA GENERAL.

Se tiene una clase de precio superior (s) y otra clase de precio inferior (i). ¿Cuántas unidades hay que tomar de cada clase para obtener una mezcla de precio promedio (m)

Resolución:

Designamos con la letra (x) el número que hay que tomar de la clase (s) y con la letra (y) el número de unidades de la clase(i).

Como la mezcla tendrá (x + y) unidades y su precio es (m), su valor será: (x + y)m

Es evidente que este valor de la mezcla debe ser igual a la suma de los valores parciales de las dos clases, que son (s.x) é (i.y) podemos pues escribir:

$$s.x + i.y = (x + y)m$$

$$s.x + i.y = x.m + y.m$$

$$s.x - x.m = y.m - i.y$$

$$x(s-m) = y(m-i) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{x}{y} = \frac{m-i}{s-m}} \quad \text{(Fórmula)}$$

Esta es una fórmula general por aplicar como se observa la fórmula dá simplemente la relación de las incógnitas (x) é (y). Para determinar los valores de (x) é (y) será necesario saber el número total de unidades "(x + y)" que ha de tener la mezcla, o alguna otra relación entre dichas incógnitas.

APLICACIÓN:

Un comerciante tiene dos clases de arroz. El precio de la primera clase es S/. 3,40 y el precio de la segunda clase es S/. 2,80 ¿Cuántos kilos debe tomar de cada clase para obtener una mezcla de 1 200 kilos de precio promedio S/. 3,00

Resolución:

Aplicando la fórmula tenemos: $\frac{x}{y}=\frac{m-i}{s-m} \rightarrow \frac{x}{y}=\frac{3{,}00-2{,}80}{3{,}40-3{,}00}=\frac{0{,}20}{0{,}40}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Luego: $\boxed{\frac{x}{y}=\frac{1}{2}}$

Esto nos indica que la mezcla debe ser hecho en la proporción de 1 parte de la primera clase y 2 partes de la segunda clase. Como la mezcla debe tener 1 200 kilos, bastará repartir 1 200 kilos en dos partes directamente proporcionales a los números 1 y 2 tenemos así:

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}$$

Por propiedad: $\frac{x+y}{1+2}=\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=$; pero $x+y=1\,200$ kilos

$$\frac{1\,200}{3}=\frac{x}{1}=\frac{y}{2}$$

Donde: $\frac{x}{1}=\frac{1\,200}{3}=400$ kilos

$\frac{y}{2}=\frac{1\,200}{3} \rightarrow \boxed{y=800 \text{ kilos}}$

De cada clase deben tomarse 400 y 800 kilos

COMPROBACIÓN:

Si mezclamos 400 kilos de precio S/. 3,40 con 800 kilos de precio S/. 2,80 tenemos como precio promedio S/. 3,00

(+) 400 kilos × S/. 3,40 = S/. 1 360 (+)
800 kilos × S/. 2,80 = S/. 2 240

1 200 kilos S/. 3 600

Precio promedio = $\dfrac{S/.\ 3\,600}{1\,200}$ = S/. 3,00

Otro Método:

Aplicando la fórmula: $\text{Precio promedio} = \dfrac{C_1 \times P_1 + C_2 \times P_2}{C_1 + C_2}$ (Fórmula)

Donde: C_1, C_2 = Cantidad de arroz de cada clase

P_1, P_2 = Precios de cada clase de arroz

Reemplazamos valores, obtenemos: $S/.\ 3{,}00 = \dfrac{x(S/.\ 3{,}40) + y(S/.\ 2{,}80)}{x + y}$

$$3(x + y) = 3{,}4x + 2{,}8y$$

$$0{,}2y = 0{,}4x \rightarrow \boxed{y = 2x} \quad ...(I)$$

Por dato: $x + y = 1\,200$ ... **(II)**

Reemplazamos (I) en (II): $x + 2x = 1\,200 \rightarrow \boxed{x = 400 \text{ kilos}}$

De (I): $y = 2(400 \text{ kilos}) \rightarrow \boxed{y = 800 \text{ kilos}}$

Problema 1 : ¿Cuántos kg de harina de S/. 10 el kg y cuántos kg de S/. 20 el kg serán necesarios para obtener una mezcla cuyo precio promedio sea de S/. 18?

Resolución:

Sea: x = # de kg que hay que tomar del de mayor precio (S/. 20)

y = # de kg que hay que tomar del de menor precio (S/. 10)

Por fórmula: $\boxed{\dfrac{x}{y} = \dfrac{m - i}{s - m}}$

Donde: m = Precio promedio (S/. 18)

s = Precio superior (S/. 20)

i = Precio inferior(S/. 10)

Luego: $\dfrac{x}{y} = \dfrac{18 - 10}{20 - 18} \rightarrow \boxed{\dfrac{x}{y} = \dfrac{8}{2}}$

Esta última relación significa que por 2 kg de S/. 10 se toman 8 kg de S/. 20

Observación: No vaya a pensar que es la única solución para que sepas existen otras soluciones como el que le mostraré.

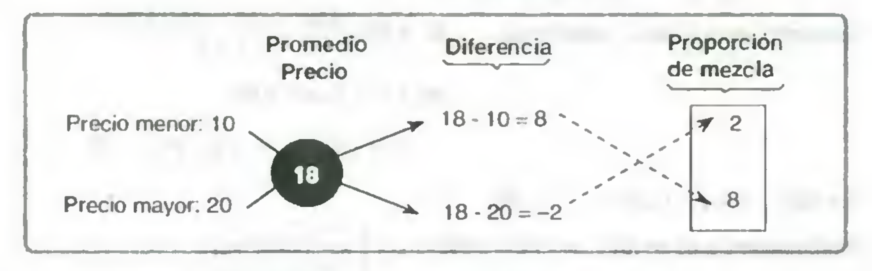
De la relación: $\frac{x}{y} = \frac{8}{2}$, sacamos mitad a cada término, obteniendo: ⇒ $\boxed{\frac{x}{y} = \frac{4}{1}}$

Esta última relación significa que por 1 kg de S/. 10 se toman 4 kg de S/. 20

- De la relación: $\frac{x}{y} = \frac{8}{2}$; multiplicamos por 2 ó por 3, etc a cada término, obteniendo: ⇒ $\boxed{\frac{x}{y} = \frac{16}{4}}$

Esta última relación relación significa que por 4 kg de S/. 10 se toman 16 kg de S/. 20

Otro Método: Distribuimos datos de la siguiente manera:



La proposición de mezcla significa que: Por 2 kg de S/. 10, se toman 8 kg de S/. 20

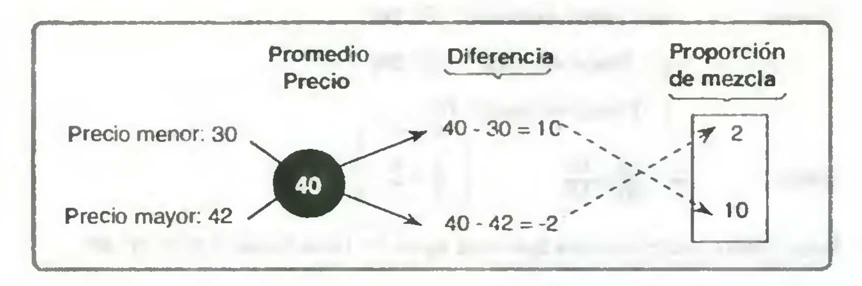
Nota: También se puede aplicar la fórmula del problema anterior.

Problema 2 : ¿Cuántos kg de semilla de S/. 30 el kg deben mezclarse con otra semilla de S/. 42 y de S/. 45 el kg para obtener semillas de S/. 40 el kilogramo?

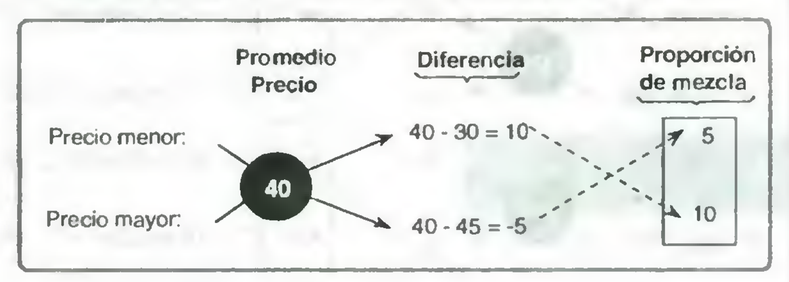
Resolución

Distribuimos los datos de la siguiente manera:

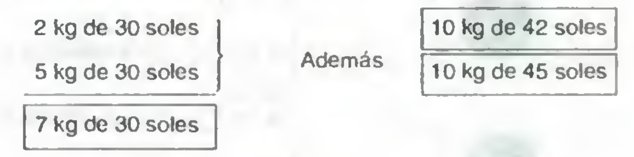
a) Comparando los precios S/. 42 , y S/. 30 con el promedio S/. 40



b) Comparando los precios S/. 45; S/. 30 con el precio promedio S/. 40



De las proporciones, obtenemos que:



∴ Para obtener semillas de 40 soles el kg debemos mezclar 7 kg de 30 soles con 10 kg de 42 soles y con 10 kg de 45 soles el kilogramo.

Comprobación:

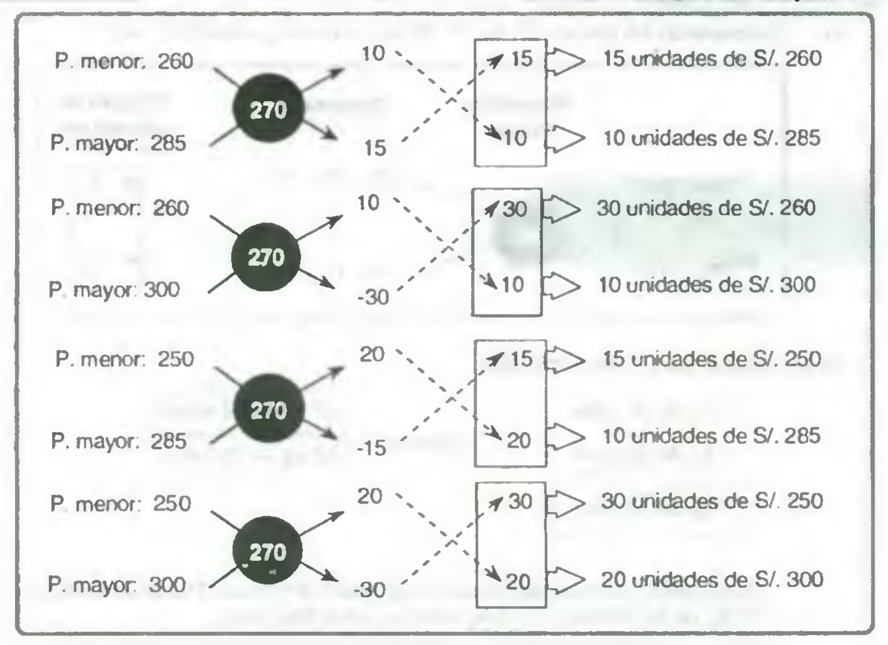
$$+\left\{\begin{array}{l} 7\times \text{ S/. } 30 = \text{S/. } 210 \\ 10\times \text{ S/. } 42 = \text{S/. } 420 \\ 10\times \text{ S/. } 45 = \text{S/. } 450 \end{array}\right\} + \text{Precio promedio} = \frac{\text{S/. } 1\,080}{27} = \text{S/. } 40$$

$$27 \text{ kg} \qquad \text{S/. } 1\,080$$

Problema 3 : Se tiene cuatro clases de una mercaderia cuyos precios son: S/. 260 ; S/. 285; S/. 300 y S/. 250. ¿Cuántas unidades hay que tomar de cada clase para obtener una mezcla de 3 000 unidades de precio promedio S/. 270

Resolución:

a) Hallamos las proporciones de mezcla de las mercaderias



Sumamos los litros de las proporciones (1), (2), (3) y (4): obteniendo:

(15 + 30) = 45 unidades de S/. 260

(10 + 20) = 30 unidades de S/. 285

(15 + 30) = 45 unidades de S/. 250

(10 + 20) = 30 unidades de S/. 300

Total: 150 unidades

b) Como necesitamos 3 000 unidades de mezcla, repartimos proporcionalmente las 3 000 unidades entre números 45, 30, 45, 30; luego:

$$\frac{x}{45}=\frac{y}{30}=\frac{n}{45}=\frac{m}{30}$$

Por propiedad:

$$\frac{\overbrace{x+y+n+m}}{45+30+45+30}=\frac{x}{45}=\frac{y}{30}=\frac{n}{45}=\frac{m}{30}$$; Pero : $x+y+m+n=3\,000$

$$\frac{3\,000}{150}=\frac{x}{45}=\frac{y}{30}=\frac{n}{45}=\frac{m}{30}$$

$$20=\frac{x}{45}=\frac{y}{30}=\frac{n}{45}=\frac{m}{30}$$

Donde: $x = 900;\ y = 600;\ n = 900;\ m = 600$

∴ Para obtener 3 000 unidades de mezcla de 270 soles. necesitamos mezclar 900 unidades de 260 soles; 600 unidades de 285 soles, 900 unidades de 250 soles y 600 unidades de 300 soles.

Nota: Los problemas de este tipo no tienen una sola solución.

Problema 4 : ¿Cuántos galones de aceite de S/. 80 el galón se debe añadir a una mezcla. en la que se han utilizado 14 galones de S/. 60 y 28 galones de S/. 70, para que el precio promedio de un galón sea de S/. 70

Resolución:

Por fórmula:

$$\text{Precio promedio} = \frac{C_1 \times P_1 + C_2 \times P_2 + C_3 \times P_3 + \ldots}{C_1 + C_2 + C_3 + \ldots}$$

Donde:
- $C_1, C_2, C_3,$ = Cantidad de galones
- $P_1, P_2, P_3,$ = Precios por galón

Reemplazando valores, obtenemos:

$$S/.\ 70 = \frac{x\,(S/.\ 80) + 14(S/.\ 60) + 28(S/.\ 70)}{x + 14 + 28}$$

$$70 = \frac{80x + 840 + 1\,960}{(42 + x)}$$

$$7\,(42 + x) = 8x + 280 \quad \rightarrow \quad 294 + 7x = 8x + 280 \quad \therefore \quad \boxed{x = 14}$$

Se necesitan 14 galones de aceite de S/. 80

PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE REGLA DE MEZCLA

Problema : ¿Cuál es el precio promedio de un kilogramo de una mezcla en la que se ha utilizado 8 kg de arroz de S/. 0,60 el kg y 12 kg de arroz de S/. 0,80 el kg?

Problema : ¿A qué precio se debe vender el litro de una mezcla para ganar el 30% de coslo, sabiendo que en ella se ha empleado 13 litros de un líquido "P" de S/. 32 el litro; 21 litros de un líquido "Q" a S/. 28 el litro, y 25 litros de un líquido "R" a S/. 18 el litro?

Problema : ¿Cuántos kg de una sustancia "M" de S/. 38 el kg y cuántos kg de una sustancia "N" de S/. 42 el kg serán necesarios para obtener una mezcla cuyo precio promedio, por kg sea de 39?

Problema : ¿Cuántos litros de aceite de 8 soles se debe añadir a una mezcla, en la que se ha utilizado 14 litros de 6 soles y 28 litros de 7 soles, para que el precio promedio, de un litro sea de 7 soles.

Problema : Un comerciante tiene detergente de S/. 6 el kg y de S/. 9 el kg. ¿Cuántos kilogramos de cada clase debe mezclar para obtener 630 kilogramos que resulten a S/. 7 el kg?

Problema : Se mezclan 5 kg de té de S/. 12 el kg con 8 kg de té de S/. 14 el kg. ¿Cuánto vale el kg de mezcla?

Problema : Un comerciante de vino mezcla 12 litros de vino de S/. 5 el litro, con 10 litros de S/. 8 el litro y con 4 litros de S/. 10 el litro. ¿A cuánto resultan los 5 litros de esa mezcla?

Problema : Un comerciante prepara una mezcla en la que utiliza materias de una misma especie pero de calidades diferentes, cuyos precios por kilogramos son S/. 30 ; S/. 32 ; S/. 37 y S/. 40; respectivamente. ¿Qué cantidad de cada clase debe utilizar para obtener 580 kg de una mezcla cuyo precio promedio sea de S/. 34 el kilogramo?

Clave de Respuestas

1.	S/. 0,72	**2.**	S/. 32,03
3.	3 kg de S/. 38 1 kg de S/. 42	**4.**	14 litros
5.	210 kg de S/. 6 420 kg de S/. 9	**6.**	S/. 13,23
7.	S/. 34,61		
8.	18 kg de S/. 30 ; 16 kg de S/. 32 12 kg de S/. 37 ; 12 Kg de S/. 40		

16.8 INTERÉS COMPUESTO

DEFINICIÓN: Es el interés ganado por el capital original (c) que no se hace efectivo al propietario, si no que es agregado a su capital, formando un nuevo capital, es decir los intereses se capitalizan o convierten en capital y consecuentemente ganarán intereses en adelante.

DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA DE CAPITALIZACIÓN SIMPLE.

AÑOS	MONTO EN EFECTIVO DE CAPITALIZACIÓN SIMPLE			
Año 1	Capital original	+	(Interés del Capital inicial) = (C + Ci) = C(1 + i)	
Año 2	(Capital al final del año 1)	+	(Interés del capital al final del año 1)	$= C(1+i) + C(1+i)\,i = C(1+i)^2$
Año 3	(Capital al final del año 2)	+	(Interés del capital al final del año 2)	$= C(1+i)^2 + C(1+i)\,i = C(1+i)^3$
⋮		⋮		⋮ ⋮
Año n	(Capital al final del año (n-1)	+	(Interés del capital al final del año (n-1))	$= C(1+i)^{n-1} + C(1+i)\,i = C(1+i)^n$

En general los elementos que intervienen en el cálculo del capital final (C) ó monto de efectivo:

$$C = c.(1+i)^n \quad \text{(Fórmula 1)}$$

Donde; C = capital final ; c = capital inicial o principal
i = tasa de interés por periodo (año, semestre, trimestre o mes)
n = tiempo (años, semestres, trimestres o meses)

La fórmula (1) es la fundamental del interés compuesto y permite resolver los siguientes problemas.

16.8.1 PROBLEMAS SOBRE INTERÉS COMPUESTO

1º **Cálculo del Capital Final**. Se obtiene con la fórmula (1), que cuando "n" es un poco grande se puede calcular por logaritmos.

Existen unas tablas (Tablas Financieras) en las que viene calculado $(1+i)^n$ para distintos valores de i y de "n" con diez cifras decimales; con el uso de estas tablas, el cálculo del capital final se reduce a la multiplicación del capital inicial por el término $(1+i)^n$ correspondiente al problema, que lo dá la tabla.

Problema 1 : Un industrial tomó en préstamo la suma de 100 000 dólares para adquirir una máquina y concertó que al final de 3 años pagaría el capital inicial más los intereses capitalizados a fin del tercer año a la taza del 45% anual. Calcular el monto a pagar.

Resolución:

Datos: Préstamo: c = $ 100 000 : tasa interés anual: i = 45% = 0,45
Tiempo: n = 3 años

Reemplazando valores en la fórmula: $C = c.(1+i)^n$; se tiene:

$C = \$.\ 100\ 000\ (1 + 0{,}45)^3$

$C = \$.\ 100\ 000\ (1{,}45)^3 = \$.\ 100\ 000\ (3{,}048\ 625)$

$\therefore \quad C = \$.\ 304\ 862{,}50$

Respuesta: *El monto a pagar es de 304 862,50 dólares*

Problema 2 : Encontrar cuál sería el monto a pagar en el anterior si los intereses se capitalizan trimestralmente.

Resolución:

Datos:
- Préstamo: c = \$. 100 000
- Tasa de interés anual = 0,45 ⇒ tasa de interés trimestalmente = 0,45 : 4 = 0,1125
- Tiempo: 3 años; pero el año tiene 4 trimestres, entonces: n = 3 x 4 = 12

Reemplazando valores en la fórmula: $C = c.(1 + i)^n$; se tiene:

$C = \$.\ 100\ 000\ (1 + 0{,}112\ 5)^{12}$

$C = \$.\ 100\ 000\ (1{,}112\ 5)^{12}$; tomamos "log" a ambos miembros:

$\log C = \log\ .[\ \$\ 100\ 000\ (1{,}112\ 5)^{12}]$

$\log C = \log 100\ 000 + \log (1{,}112\ 5)^{12}$

$\log C = 5 + 12 \log (1{,}112\ 5)$

Recuerda que:

$\log A \times B = \log A + \log B$
$\log B^n = n \log B$

$\log C = 5 + 12\ (0{,}046\ 3) = 5 + 0{,}555\ 6 = 5{,}555\ 6$

$\log C = 5{,}555\ 6 \Rightarrow C = \text{antilog}_{10}\ 5{,}555\ 6 = 10^{5{,}555\ 6} \quad \therefore \quad C = \$.\ 359\ 418{,}15$

***Observación**: Comparando este problema con el anterior vemos la diferencia en el resultado producto únicamente del hecho que el problema (2) los intereses se capitalizan trimestralmente y en el problema (1) anualmente.*

2º Cálculo del Capital Inicial:

De la fórmula (1): $C = c.(1 + i)^n$; despejamos "c", obteniendo:

$$c = \frac{C}{(1+i)^n} \quad \text{(Fórmula 2)}$$

Problema: Un niño tiene 8 años. Su padre quiere colocar una cantidad "c" en un banco; a nombre del niño; para que cuando cumpla 20 años disponga de \$. 20 000. El interés que paga el banco es del 8% anual. ¿Qué cantidad deberá colocar el padre?

Resolución:

Datos —

Capital final: C = \$. 20 000
Tasa de interéz anual: i = 8% = 0,08
tiempo: n = 20 - 8 = 12
Capital inicial: c = ?

Reemplazamos valores en la fórmula: $c=\dfrac{C}{(1+i)^n}$; Se tiene

$$c=\frac{20\,000}{(1+0{,}08)^{12}}=\frac{20\,000}{(1{,}08)^{12}}\;\rightarrow\; c=\frac{20\,000}{2{,}518\,170\,1}=7\,942{,}257\,2$$

Respuesta: *La cantidad de dinero que debe colocar el padre es de 7 942,257 2 dólares.*

3º Cálculo del Tanto Por Ciento.

De la fórmula (1): $C=c.(1+i)^n$; despejamos "i", obteniendo:

$$i=\sqrt[n]{\frac{C}{c}}-1 \qquad \text{(Fórmula 3)}$$

Problema: A qué tanto por ciento fue colocado un capital de \$. 1 000 que en 10 años se convirtió en \$. 2 500?

Resolución:

Datos —

Capital inicial:	c = \$. 1 000
Capital final:	C = \$. 2 500
Tiempo:	n = 10 años
Interés:	i = ?

Reemplazando valores en la fórmula: $i=\sqrt[n]{\dfrac{C}{c}}-1$; se tiene:

$$i=\sqrt[10]{\frac{2\,500}{1000}}-1=\sqrt[10]{2,5}-1 \;\Rightarrow\; i+1=\sqrt[10]{2,5}$$

$i+1=\sqrt[10]{2,5}$; tomamos "log" a ambos miembros:

$$\log(i+1)=\log\sqrt[10]{2,5}$$

$$\log(i+1)=\frac{1}{10}\log 2{,}5$$

$$\log(i+1)=\frac{1}{10}(0{,}397\,94)=0{,}039\,794$$

Recuerda que:

$$\log\sqrt[n]{A}=\frac{1}{n}\log A$$

$i + 1 = 10^{0,039\,794} = 1,095\,582$

$i = 1,095\,958\,2 - 1 = 0,095\,958\,2$

i = 0,1 aproximadamente ; pero: $0,1 = \frac{10}{100} = 10\%$

$\therefore \quad i = 10\%$

Respuesta: *El tanto por ciento al que fue colocado el capital de 1 000 dólares es del 10%.*

4º Cálculo del Número de Años (n):

El cálculo de "n" exige emplear logaritmos; pues la ecuación (1) es una ecuación exponencial en "n".

De la fórmula (1): $C = c.(1+i)^n$; tomamos "log" a ambos miembros.

$$\log C = \log\ [c.(1+i)^n]$$

$$\log C = \log c + \log (1+i)^n$$

$\log C = \log c + n \log (1+i)$; despejando "n" se tiene:

$$n = \frac{\log C - \log c}{\log (1+i)} \qquad \text{(Fórmula 4)}$$

Problema: ¿Cuánto tiempo se necesitará para que un capital c ; quede duplicado al 8%?

Resolución:

Datos:
- Capital inicial = c
- Capital final = C = 2c
- Interés = 8% = 0,08
- Tiempo : n = ?

Reemplazando valores en la fórmula: $n = \frac{\log C - \log c}{\log (1+i)}$; se tiene:

$$n = \frac{\log 2c - \log c}{\log (1+0,08)}$$

$$n = \frac{(\log 2 + \log c) - \log c}{\log (1,08)} = \frac{\log 2}{\log 1,08} = \frac{0,301\,03}{0,033\,423\,7}$$

$$\therefore \quad n = 9 \text{ años}$$

Respuesta: *El tiempo que se necesita para que su capital c ; quede duplicado al 8% es de 9 años.*

PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE INTERÉS COMPUESTO

Problema : Hallar el capital final correspondiente a \$. 2 000 colocados al 10% durante 15 años.

Problema : Una persona dejó una herencia de \$. 3 000 colocados en un banco al 9% con la condición de que el beneficiario no los retire hasta cumplirse 30 años. ¿Qué capital se obtendrá después de los 30 años?

Problema : Hallar el capital inicial que colocado al 6% durante 20 años se convierte en \$. 12 500.

Problema : ¿A qué tanto por ciento se colocó un capital de \$. 3 500 que en 12 años se convirtió en\$ 8 200?

Problema : Un capital de \$. 30 000 se convirtió en 5 años en \$. 42 000. ¿Cuál fue el tanto por ciento de interés?

Problema : ¿En cuánto se convierten \$. 300 al 10% después de 10 años?

Problema : Suponiendo que el aumento de población de una ciudad es del 10% anual. ¿En cuántos años se duplicará la población?

Problema : Hallar el capital necesario para que a la vuelta de 10 años, colocado al 10% se nos convierta en \$. 40 000.

Problema : Si se colocó mis ahorros de \$. 5 000 al 12% de interés compuesto durante 20 años, ¿Qué capital recogeré al final?

Problema : ¿En cuántos años, \$. 12 000 colocados al 8% de interés compuesto se transforman en \$ 25 000?

Clave de Respuestas

1.	\$ 8 354,496 4	2.	\$ 39 803,037
3.	\$ 3 897,559	4.	7%
5.	6%	6.	\$ 778,122 75
7.	7 años	8.	\$ 15 421,731
9.	\$ 48 231,46	10.	9 años

16.9 ANUALIDADES

DEFINICIÓN: Se llama anualidad a la cantidad fija que se impone todos los años para formar un capital (anualidad de capitalización) o para amortizar una deuda (anualidad de amortización).

16.9.1 ANUALIDAD DE CAPITALIZACIÓN

(I) Si los pagos se hacen al final de cada periodo, se tendría lo siguiente:

Supongamos periodos de 1 año durante "n" años.

La última anualidad no ganaria intereses	→	a
La penúltima ganaria intereses de 1 año	→	$a(1 + i)$
La antepenúltima ganaria intereses de 2 años	→	$a(1 + i)^2$

....

....

La tercera ganarla intereses de (n - 3) años → $a(1+i)^{n-3}$
La segunda ganaría intereses de (n - 2) años → $a(1+i)^{n-2}$
La primera ganaría intereses de (n - 1) años → $a(1+i)^{n-1}$

Sumando todas las anualidades con sus intereses, es decir todos los valores finales obtenidos para las anualidades, la suma debe ser igual al capital C que se desea formar, o sea:

$$C = a + a(1+i) + a(1+i)^2 + \ldots + a(1+i)^{n-3} + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1}$$

Esta última suma es una progresión geométrica de razón: (1 + i) y primer término "a" ; aplicando la fórmula de una progresión geométrica:

$$\boxed{S_n = \frac{a_n . r - a_1}{r-1}}$$

Donde:
- a_n = último término
- r = razón
- a_1 = primer término

Reemplazando valores en esta fórmula, se tiene:

$$S_n = C = \frac{a(1+i)^{n-1} \cdot (1+i) - a}{(1+i)-1} = \frac{a(1+i)^{n-1+1} - a}{i}$$

$$C = \frac{a\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} \qquad \boxed{C = a\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]} \quad \textbf{(Fórmula)}$$

De donde:
- a = sería la anualidad a pagar
- c = el monto a capitalizar
- i = interés
- n = número de años

II) Si los pagos se hacen al comienzo de cada periodo, entonces:

La última anualidad ganaría intereses de 1 año → $a(1+i)$
La penúltima anualidad ganaría intereses de 2 años → $a(1+i)^2$
La antepenúltima anualidad ganaría intereses de 3 años → $a(1+i)^3$
⋮ ⋮
La tercera anualidad ganaría intereses de (n - 2) años → $a(1+i)^{n-2}$
La segunda anualidad ganaria intereses de (n - 1) años → $a(1+i)^{n-1}$
La primera anualidad ganaría intereses de n años → $a(1+i)^n$

Sumando todas las anualidades con sus intereses, es decir todos los valores finales obtenidos para las anualidades, la suma debe ser igual al capital C que se desea formar, o sea:

$$C = a(1+i) + a(1+i)^2 + a(1+i)^3 + \ldots + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^n$$

Esta última suma es una progresión geométrica de razón: (1 + i) y primer término "a (1 + i)"; aplicando la fórmula de una progresión geométrica:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

Donde: a_n = último término
r = razón
a_1 = primer término

Reemplazando valores en esta fórmula, se tiene:

$$S_n = C = \frac{a(1+i)^n \cdot (1+i) - a(1+i)}{(1+i) - 1} = \frac{a(1+i)^{n+1} - a(1+i)}{i}$$

$$C = a(1+i)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \qquad \textbf{(Fórmula)}$$

Problema 1: Manuel decide el 1º de enero de 1 981 que para fines de 1 983 debe reunir el capital de \$. 150 000. ¿Qué anualidad debe imponer a partir de ese año al final de cada año al 10% de interés.

Resolución:

Como los pagos se hacen al final de cada periodo, se aplicará la siguiente fórmula:

$$C = a \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

En donde:
C = \$. 150 000 ; i = 10% anual = 0,10
n = (1 983 - 1 981) + 1 = 3 años ; a = ?

Reemplazando valores en la fórmula, se tiene:

$$150\,000 = a \cdot \left[\frac{(1+0,1)^3 - 1}{0,1}\right] = a\left[\frac{(1,1)^3 - 1}{0,1}\right]$$

$$150\,000 = a\left[\frac{0,331}{0,1}\right] = a\,[3,31]$$

$$\frac{150\,000}{3,31} = a \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad a = \$\ 45\,317,22$$

Respuesta: *La anualidad que debe inponerse a partir del 1º de enero de 1 981 al final de 1 983 al 10% de interés anual es de \$. 45 317,22*

Problema 2: Cuál debería ser el valor de la anualidad del problema (1), si los pagos se hubiesen efectuado a comienzos de cada año; comenzando por el 1º de enero de 1 981.

Resolución:

Como los pagos se hacen al comienzo de cada periodo, se aplicará la fórmula:

$C = a(1+i)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$ De donde: $\begin{cases} C = \$.\ 150\ 000\ ;\ i = 10\%\ \text{anual} = 0{,}1 \\ n = 3\ \text{años}\ ;\ \ a = ? \end{cases}$

Reemplazando valores en la fórmula, se tiene:

$$150\ 000 = a\ (1 + 0{,}1)\left[\frac{(1 + 0{,}1)^3 - 1}{0{,}1}\right]$$

$$150\ 000 = a\ (1{,}1)\cdot\left[\frac{0{,}\ 331}{0{,}\ 1}\right] = a\ (3{,}\ 641)$$

$$\frac{150\ 000}{3{,}\ 641} = a \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad a = \$\ 41\ 197{,}473$$

Respuesta: *Si los pagos se hubiesen efectuado a comienzos de cada año la anualidad seria de $ 41 197,473.*

16.9.2 ANUALIDAD DE AMORTIZACIÓN

A. Si los pagos se hacen al final de cada periodo se tendria (supongamos: tiempo = "n" años)

La última anualidad no pagaría intereses → a
La penúltima, pagaría un año de intereses → $a(1 + i)$
La antepenúltima; pagaría dos años de intereses. → $a(1 + i)^2$
⋮ ⋮
La tercera pagaría (n - 3) años de intereses → $a(1 + i)^{n-3}$
La segunda pagaría (n - 2) años de intereses → $a(1 + i)^{n-2}$
La primera pagaría (n - 1) años de intereses → $a(1 + i)^{n-1}$

Luego, al final del año "n". El valor de la deuda incluyendo los intereses:

$D(1 + i)^n$ debe ser igual a la suma de las anualidades, osea:

$$D(1 + i)^n = a + a(1 + i) + a(1 + i)^2 + a(1 + i)^3 + \ldots + a(1 + i)^{n-1}$$

$$D.(1 + i)^n = a\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}\right] = a\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$D = a\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n}\right] = a\left[\frac{\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n} - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}\right]$$

$$D = a \cdot \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

En donde: "D" es la deuda a amortizar y "a" la anualidad a pagar.

B. Si los pagos se hacen al comienzo de cada periodo, se puede hacer un análisis similar y se llegará a:

$$D = a(1+i)\cdot\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \quad \text{(Fórmula)}$$

Problema 1: Nataly, pidió prestado \$. 2 000 000. Al 10% anual amortizable en 5 años. Calcular la cantidad fija que debe poner al final de cada año para cancelar el préstamo más sus intereses.

Resolución:

Como los pagos se hacen al final del periodo, se tiene:

$$D = a\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \qquad \text{Donde: } \begin{cases} D = \$.\ 2\,000\,000 \\ i = 10\% = 0{,}1 \\ n = 5 \text{ años} \end{cases}$$

Reemplazando valores, se tiene:

$$\$\ 2000\,000 = a\cdot\left[\frac{1-(1+0{,}1)^{-5}}{0{,}1}\right] = a\cdot\left[\frac{1-(1{,}1)^{-5}}{0{,}1}\right]$$

$$\$\ 2000\,000 = a\cdot\left[\frac{1-0{,}620\,921\,3}{0{,}1}\right] = a\ [3{,}790\,787]$$

$$\frac{\$\ 2\,000\,000}{3{,}790\,787} = a \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad a = \$\ 527\,594{,}92$$

Problema 2: Calcular la cantidad fija que debe cancelar a comienzo de cada año para cancelar la deuda más los intereses del problema (1).

Resolución

Reemplazando valores en la fórmula: $D = a(1+i)\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$

Se obtiene: $\$\ 2000\,000 = a(1+0{,}1)\left[\frac{1-(1+0{,}1)^{-5}}{i}\right]$

$\$\ 2000\,000 = a(1{,}1)\ [3{,}790\,787]$

$\$\ \frac{2000\,000}{4{,}169\,865\,7} = a \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad a = \$\ 479\,631{,}75$

PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE ANUALIDAD DE AMORTIZACIÓN

Problema 1 : ¿Cuál será el capital que se formará con 12 anualidades de \$. 500 cada una al 10% de interés anual? (los pagos se hacen al final de cada año)

Problema 2 : ¿Qué anualidad habrá que imponer al principio de cada año para que, cumplidos 30 años, se haya formado un capital de \$. 40 000, si el interés es del 8% anual?

Problema 3 : Hallar el capital que se forma con 10 anualidades de \$. 800 cada una, al 12% anual. (los pagos se hacen al final de cada año).

Problema 4 : ¿Qué anualidad debe depositar un padre al principio de cada año, en un banco que paga el 10% de interés compuesto, para que al cabo de 20 años su hijo, que acaba de nacer, tenga formado un capital de \$. 50 000?

Problema 5 : ¿Durante cuántos años debe imponerse una anualidad de \$. 50, para formar un capital de \$. 1 176; siendo el interés del 10% anual? (los pagos se hacen al final de cada año).

Problema 6 : ¿Durante cuántos años debe imponerse una anualidad de \$. 60 para formar un capital de \$. 1 500, siendo el interés del 8% anual? (los pagos se hacen al final de cada año).

Problema 7 : ¿Qué anualidad debemos pagar al final de cada año para que pagados 15 años vayamos amortizando una deuda de \$. 30 000, siendo el interés del 6% anual?

Problema 8 : ¿Qué deuda se puede amortizar en diez años con una anualidad a = \$. 80, siendo el interés del 6% anual? (los pagos se hacen al comienzo de cada año).

Problema 9 : ¿Qué anualidad habrá que pagar para extinguir en 8 años una deuda de \$. 25 000, al 6 %? (los pagos se hacen al final de cada año).

Problema 10 : ¿Qué deuda podremos amortizar abonando cada año una anualidad de \$. 500, durante 12 años, si el interés es del 8%? (los pagos se hacen al comienzo de cada año?

Clave de Respuestas

1) C = \$. 10 692,142	2) a = \$. 326,941
3) C = \$. 14 038,988	4) a = \$. 793,619 3
5) n ≅ 13 años	6) n ≅ 14 años
7) a = \$. 3 088,882 5	8) D = \$. 624,135
9) a = \$ 4 025,897	10) D = \$. 4 069,482

TABLA I

Valores de las funciones trigonométricas con cuatro cifras decimales
El ángulo θ en grados y en radianes

Angulo θ									
Grados	Radianes	sen θ	csc θ	tan θ	cot θ	sec θ	cos θ		
0° 00'	,0000	,0000	No existe	,0000	No existe	1,000	1,0000	1,5708	90° 00'
10	029	029	343,8	029	343,8	000	000	679	50
20	058	058	171,9	058	171,9	000	000	650	40
30	,0087	,0087	114,6	,0087	114,6	1,000	1,0000	1,5621	30
40	116	116	85,95	116	85,94	000	,9999	592	20
50	145	145	68,76	145	68,75	000	999	563	10
1° 00'	,0175	,0175	57,30	,0175	57,29	1,0000	,9998	1,5533	89° 00'
10	204	204	49,11	204	49,10	000	998	504	50
20	233	233	42,98	233	42,96	000	997	475	40
30	,0262	,0262	38,20	,0262	38,19	1,000	,9997	1,5446	30
40	291	291	34,38	291	34,37	000	996	417	20
50	320	320	31,26	320	31,24	001	995	388	10
2° 00'	,0349	,0349	28,65	,0349	28,64	1,001	,09994	1,5359	88° 00'
10	378	378	26,45	378	26,43	001	993	330	50
20	407	407	24,56	407	24,54	001	992	301	40
30	,0436	,0436	22,93	,0437	22,90	1,001	,9990	1,5272	30
40	465	465	21,49	466	21,47	001	989	243	20
50	495	494	20,23	495	20,21	001	988	213	10
3° 00'	,0524	,0523	19,11	,0524	19,08	1,001	,9986	1,5184	87° 00'
10	553	552	18,10	553	18,07	002	985	155	50
20	582	581	17,20	582	17,17	002	983	126	40
30	,0611	,0610	16,38	,0612	16,35	1,002	,9981	1,5097	30
40	640	640	15,64	641	15,60	002	980	068	20
50	669	669	14,96	670	14,92	002	978	039	10
4° 00'	,0698	,0698	14,34	,0699	14,30	1,002	,9976	1,5010	86° 00'
10	727	727	13,76	729	13,73	003	974	981	50
20	756	756	13,23	758	13,20	003	971	952	40
30	,0785	,0785	12,75	,0787	12,71	1,003	,9969	1,4923	30
40	814	814	12,29	816	12,25	003	967	893	20
50	844	843	11,87	846	11,83	004	864	864	10
5° 00'	,0873	,0872	11,47	,0875	11,43	1,004	,9962	1,4835	85° 00'
10	902	901	11,10	904	11,06	004	959	806	50
20	931	929	10,76	934	10,71	004	957	777	40
30	,0960	,0958	10,43	,0963	10,39	1,005	,9954	1,4748	30
40	989	987	10,13	992	10,08	005	951	719	20
50	,1018	,1016	9,839	,1022	9,788	005	948	690	10
6° 00'	,1047	,1045	9,567	,1051	9,514	1,006	,9945	1,4661	84° 00'
		cos θ	sec θ	cot θ	tan θ	csc θ	sen θ	Radianes	Grados
								Angulo θ	

Tablas

TABLA I (Continuación)

Angulo θ									
Grados	Radianes	sen θ	csc θ	tan θ	cot θ	sec θ	cos θ		
6° 00'	,1047	,1045	9,567	,1051	9,514	1,006	,9945	1,4661	84° 00'
10	076	074	9,309	080	9,255	006	942	632	50
20	105	103	9,065	110	9 010	006	939	603	40
30	,1134	,1132	8,834	,1139	8,777	1.006	,9936	1,4573	30
40	164	161	8,614	169	8,556	007	932	544	20
50	193	190	8,405	198	8,345	007	929	515	10
7° 00'	,1222	,1219	8,206	,1228	8,144	1,008	,9925	1,4486	83° 00'
10	251	248	8,016	257	7,953	008	922	457	50
20	280	276	7,834	287	7,770	008	918	428	40
30	,1309	,1305	7,661	,1317	7,596	1,009	,9914	1,4399	30
40	338	334	7,496	346	7,429	009	911	370	20
50	367	363	7,337	376	7,269	009	907	341	10
8° 00'	,1396	,1392	7,185	,1405	7,115	1,010	,9903	1,4312	82° 00'
10	425	421	7,040	435	6,968	010	899	283	50
20	454	449	6,900	465	6,827	011	894	254	40
30	,1484	,1478	6,765	,1495	6,691	1,011	,9890	1,4224	30
40	513	507	6,636	524	6,561	012	886	195	20
50	542	538	6,512	554	6,435	012	881	166	10
9° 00'	,1571	,1564	6,392	,1584	6,314	1,012	,9877	1,4137	81° 00'
10	600	593	277	614	197	013	872	108	50
20	629	622	166	644	084	013	868	079	40
30	,1658	,1650	6,059	,1673	5,976	1,014	,9863	1,4050	30
40	687	679	5,955	703	871	014	858	1,4021	20
50	716	708	855	733	769	015	853	992	10
10° 00'	,1745	,1736	5,759	,1763	5,671	1,015	,9848	1,3963	80° 00'
10	774	765	665	793	576	016	843	934	50
20	804	794	575	823	485	016	838	904	40
30	,1833	,1822	5,487	,1853	5,396	1,017	,9833	1,3875	30
40	862	851	403	883	309	018	827	846	20
50	891	880	320	914	226	018	822	817	10
11° 00'	,1920	,1908	5,241	,1944	5,145	1,019	,9816	1,3788	79° 00'
10	949	937	164	974	066	019	811	759	50
20	978	965	089	,2004	4,989	020	805	730	40
30	,2007	,1994	5,016	,2035	4,915	1,020	,9799	1,3701	30
40	036	,2022	4,945	065	843	021	793	672	20
50	065	051	876	095	773	022	787	643	10
12° 00'	,2094	,2079	4,810	,2126	4,705	1,022	,9781	1,3614	78° 00'
10	123	108	745	156	638	023	775	584	50
20	153	136	682	186	574	024	769	555	40
30	,2182	,2164	4,620	,2217	4,511	1,024	,9763	1,3526	30
40	211	193	560	247	449	025	757	497	20
50	240	221	502	278	390	026	750	468	10
13° 00'	,2269	,2250	4,445	,2309	4,331	1,026	,9744	1,3439	77° 00'
		cos θ	sec θ	cot θ	tan θ	csc θ	sen θ	Radianes	Grados
								Angulo θ	

Tablas

TABLA I (Continuación)

Angulo θ									
Grados	Radianes	sen θ	csc θ	tan θ	cot θ	sec θ	cos θ		
13° 00'	,2269	,2250	4,445	,2309	4,331	1,026	,9744	1,3439	77° 00'
10	298	278	390	339	275	027	737	410	50
20	327	306	336	370	219	028	730	381	40
30	,2356	,2334	4,284	,2401	4,165	1,028	,9724	1,3352	30
40	385	363	232	432	113	029	717	323	20
50	414	391	182	462	061	030	710	294	10
14° 00'	,2443	,2419	4,134	,2493	4,011	1,031	,9703	1,3265	76° 00'
10	473	447	086	524	3,962	031	696	235	50
20	502	476	039	555	914	032	689	206	40
30	,2531	,2504	3,994	,2586	3,867	1,033	,9681	1,3177	30
40	560	532	950	617	821	034	674	148	20
50	589	560	906	648	776	034	667	119	10
15° 00'	,2618	,2588	3,864	,2679	3,732	1,035	,9659	1,3090	75° 00'
10	647	616	822	711	689	036	652	061	50
20	676	644	782	742	647	037	644	032	40
30	,2705	,2672	3,742	2,773	3,606	1,038	,9636	1,3003	30
40	734	700	703	805	566	039	628	974	20
50	763	728	665	836	526	039	621	945	10
16° 00'	,2793	,2756	3,628	,2867	3,487	1,040	,9613	1,2915	74° 00'
10	822	784	592	899	450	041	605	886	50
20	851	812	556	931	412	042	596	857	40
30	,2880	,2840	3,521	,2962	3,376	1,043	,9588	1,2828	30
40	909	868	487	994	340	044	580	799	20
50	938	896	453	,3026	305	045	572	770	10
17° 00'	,2967	,2924	3,420	,3057	3,271	1,046	,9563	1,2741	73° 00'
10	996	952	388	089	237	047	555	712	50
20	,3025	979	357	121	204	048	546	683	40
30	,3054	,3007	3,326	,3153	3.172	1,048	,9537	1,2654	30
40	083	035	295	185	140	049	528	625	20
50	113	062	265	217	108	050	520	595	10
18° 00'	,3142	,3090	3,236	,3249	3,078	1,051	,9511	1,2566	72° 00'
10	171	118	207	281	047	052	502	537	50
20	200	145	179	314	018	053	492	508	40
30	,3229	,3173	3,152	,3346	2,989	1,054	,9483	1,2479	30
40	258	201	124	378	960	056	474	450	20
50	287	228	098	411	932	057	465	421	10
19° 00'	,3316	,3256	3,072	,3443	2,094	1,058	,9455	1,2392	71° 00'
10	345	283	046	476	877	059	446	363	50
20	374	311	021	508	850	060	436	334	40
30	,3403	,3338	2,996	,3541	2,824	1,061	,9426	1,2305	30
40	432	365	971	574	798	062	417	275	20
50	462	393	947	607	773	063	407	246	10
20° 00'	,3491	,3420	2,924	,3640	2,747	1,064	,9397	1,2217	70° 00'
		cos θ	sec θ	cot θ	tan θ	csc θ	sen θ	Radianes	Grados
								Angulo θ	

Tablas

TABLA I (Continuación)

Angulo θ									
Grados	Radianes	sen θ	csc θ	tan θ	cot θ	sec θ	cos θ		
20° 00'	,3491	,3420	2,924	,3640	2,747	1,064	,9397	1,2217	70° 00'
10	520	448	901	673	723	065	387	188	50
20	549	475	878	706	699	066	377	159	40
30	,3578	,3502	2,855	,3739	2,675	1,068	,9367	1,2130	30
40	607	529	833	772	651	069	356	101	20
50	636	557	812	805	628	070	346	072	10
21° 00'	,3665	,3584	2,790	,3839	2,605	1,071	,9336	1,2043	69° 00'
10	694	611	769	872	583	072	325	1,2014	50
20	723	638	749	906	560	074	315	985	40
30	,3752	,3665	2,729	,3939	2,539	1,075	,9304	1,1956	30
40	782	692	709	973	517	076	293	926	20
50	811	719	689	,4006	496	077	283	897	10
22° 00'	,3840	,3746	2,669	,4040	2,475	1,079	,9272	1,1868	68° 00'
10	869	773	650	074	455	080	261	839	50
20	898	800	632	108	434	081	250	810	40
30	,3927	,3827	2,613	,4142	2,414	1,082	,9239	1,1781	30
40	956	854	595	176	394	084	228	752	20
50	985	881	577	210	375	085	216	723	10
23° 00'	,4014	,3907	2,559	,4245	2,356	1,086	,9205	1,1694	67° 00'
10	043	934	542	279	337	088	194	665	50
20	072	961	525	314	318	089	182	636	40
30	,4102	,3987	2,508	,4348	2,300	1,090	,9171	1,1606	30
40	131	,4014	491	383	282	092	159	577	20
50	160	041	475	417	264	093	147	548	10
24° 00'	,4189	,4067	2,459	,4452	2,246	1,095	,9135	1,1519	66° 00'
10	218	094	443	487	229	096	124	490	50
20	247	120	427	522	211	097	112	461	40
30	,4276	,4147	2,411	,4557	2,194	1,099	,9100	1,1432	30
40	305	173	396	592	177	100	088	403	20
50	334	200	381	628	161	102	075	374	10
25° 00'	,4363	,4226	2,366	,4663	2,145	1,103	,9063	1,1345	65° 00'
10	392	253	352	699	128	105	051	316	50
20	422	279	337	734	112	106	038	286	40
30	,4451	,4305	2,323	,4770	2,097	1,108	,9026	1,1257	30
40	480	331	309	806	081	109	013	228	20
50	509	358	295	841	066	111	001	199	10
26° 00'	,4538	,4384	2,281	,4877	2,050	1,113	,8988	1,1170	64° 00'
10	567	410	268	913	035	114	975	141	50
20	596	436	254	950	020	116	962	112	40
30	,4625	,4462	2,241	,4986	2,006	1,117	,8949	1,1083	30
40	654	488	228	,5022	1,991	119	936	054	20
50	683	514	215	059	977	121	923	1,1025	10
27° 00'	,4712	,4540	2,203	,5095	1,963	1,122	,8910	1,0996	63° 00'
		cos θ	sec θ	cot θ	tan θ	csc θ	sen θ	Radianes	Grados
								Angulo θ	

Tablas

TABLA I (Continuación)

Angulo θ									
Grados	Radianes	sen θ	csc θ	tan θ	cot θ	sec θ	cos θ		
27° 00'	,4712	,4540	2,203	,5095	1,963	1,122	,8910	1,0996	63° 00'
10	741	566	190	132	949	124	897	966	50
20	771	592	178	169	935	126	884	937	40
30	,4800	,4617	2,166	,5206	1,921	1,127	,8870	1,0908	30
40	829	643	154	243	907	129	857	879	20
50	858	669	142	280	894	131	843	850	10
28° 00'	,4887	,4695	2,130	,5317	1,881	1,133	,8829	1,0821	62° 00'
10	916	720	118	354	868	134	816	792	50
20	945	746	107	392	855	136	802	763	40
30	,4974	,4772	2,096	,5430	1,842	1,138	,8788	1,0734	30
40	,5003	797	085	467	829	140	774	705	20
50	032	823	074	505	816	142	760	676	10
29° 00'	,5061	,4848	2,063	,5543	1,804	1,143	,8746	1,0647	61° 00'
10	091	874	052	581	792	145	732	617	50
20	120	899	041	619	780	147	718	588	40
30	,5149	,4924	2,031	,5658	1,767	1,149	,8704	1,0559	30
40	178	950	020	696	756	151	689	530	20
50	207	975	010	735	744	153	675	501	10
30° 00'	,5236	,5000	2,000	,5774	1,732	1,155	,8660	1,0472	60° 00'
10	265	025	1,990	812	720	157	646	443	50
20	294	050	980	851	709	159	631	414	40
30	,5323	,5075	1,970	.5890	1,698	1,161	,8616	1,0385	30
40	352	100	961	930	686	163	601	356	20
50	381	125	951	969	675	165	587	327	10
31° 00'	,5411	,5150	1,942	,6009	1,664	1,167	,8572	1,0297	59° 00'
10	440	175	932	048	653	169	557	268	50
20	469	200	923	088	643	171	542	239	40
30	,5498	,5225	1,914	,6128	1,632	1,173	,8526	1,0210	30
40	527	250	905	168	621	175	511	181	20
50	556	275	896	208	611	177	496	152	10
32° 00'	,5585	,5299	1,887	,6249	1,600	1,179	,8480	1,0123	58° 00'
10	614	324	878	289	590	181	465	094	50
20	643	348	870	330	580	184	450	065	40
30	,5672	,5373	1,861	,6371	1,570	1,186	,8434	1,0036	30
40	701	398	853	412	560	188	418	1,0007	20
50	730	422	844	453	550	190	403	977	10
33° 00'	,5760	,5446	1,836	,6494	1,540	,192	,8387	,9948	57° 00'
10	789	471	828	536	530	195	371	919	50
20	818	495	820	577	520	197	355	890	40
30	,5847	,5519	1,812	,6619	1,511	1,199	,8339	,9861	30
40	876	544	804	661	501	202	323	832	20
50	905	568	796	703	1,492	204	307	803	10
34° 00'	,5934	,5592	1,788	,6745	1,483	1,206	,8290	,9774	56° 00'
		cos θ	sec θ	cot θ	tan θ	csc θ	sen θ	Radianes	Grados
								Angulo θ	

Tablas

TABLA I (Continuación)

Angulo θ									
Grados	Radianes	sen θ	csc θ	tan θ	cot θ	sec θ	cos θ		
34° 00'	,5934	,5592	1,788	,6745	1,483	1,206	,8290	,9774	56° 00'
10	963	616	781	787	473	209	274	745	50
20	992	640	773	830	464	211	258	716	40
30	,6021	,5664	1,766	,6873	1,455	1,213	,8241	,9687	30
40	050	688	758	916	446	216	225	657	20
50	080	712	751	959	437	218	208	628	10
35° 00'	,6109	,5736	1,743	,7002	1,428	1,221	,8192	,9599	55° 00'
10	138	760	736	046	419	223	175	570	50
20	167	783	729	089	411	226	158	541	40
30	,6196	,5807	1,722	,7133	1,402	1,228	,8141	,9512	30
40	225	831	715	177	393	231	124	483	20
50	254	854	708	221	385	233	107	454	10
36° 00'	,6283	,5878	1,701	,7265	1,376	1,236	,8090	,9425	54° 00'
10	312	901	695	310	368	239	073	396	50
20	341	925	688	355	360	241	056	367	40
30	,6370	,5948	1,681	,7400	1,351	1,244	,8039	,9338	30
40	400	972	675	445	343	247	021	308	20
50	429	995	668	490	335	249	004	279	10
37° 00'	,6458	,6018	1,662	,7536	1,37	1,252	,7986	,9250	53° 00'
10	487	041	655	581	319	255	969	221	50
20	516	065	649	627	311	258	951	192	40
30	,6545	,6088	1,643	,7673	1,303	1,260	,7934	9163	30
40	574	111	636	720	295	263	916	134	20
50	603	134	630	766	288	266	898	105	10
38° 00'	,6632	,6157	1,624	,7813	1,280	1,269	,7880	,9076	52° 00'
10	661	180	618	860	272	272	862	047	50
20	690	202	612	907	265	275	844	,9018	40
30	,6720	,6225	1,606	,7954	1,257	1,278	,7826	,8988	30
40	749	248	601	,8002	250	281	808	959	20
50	778	271	595	050	242	284	790	930	10
39° 00'	,6807	,6293	1,589	,8098	1,235	1,287	,7771	,8901	51° 00'
10	836	316	583	146	228	290	753	872	50
20	865	338	578	195	220	293	735	843	40
30	,6894	,6361	1,572	,8243	1,213	1,296	,7716	,8814	30
40	923	383	567	292	206	299	698	785	20
50	952	406	561	342	199	302	679	756	10
40° 00'	,6981	,6428	1,556	,8391	1,192	1,305	,7660	,8727	50° 00'
10	,7010	450	550	441	185	309	642	698	50
20	039	472	545	491	178	312	623	668	40
30	,7069	,6494	1,540	,8541	1,171	1,315	,7604	,8639	30
40	098	571	535	591	164	318	585	610	20
50	127	539	529	642	157	322	566	581	10
41° 00'	,7156	,6561	1,524	,8693	1,150	1,325	,7547	,8552	49° 00'
		cos θ	sec θ	cot θ	tan θ	csc θ	sen θ	Radianes	Grados
								Angulo θ	

Tablas

TABLA I (Continuación)

Angulo θ									
Grados	Radianes	sen θ	csc θ	tan θ	cot θ	sec θ	cos θ		
41° 00'	,7156	,6561	1,524	,8693	1,150	1,325	,7547	,8552	49° 00'
10	185	583	519	744	144	328	528	523	50
20	214	604	514	796	137	332	509	494	40
30	,7243	,6626	1,509	,8847	1,130	1,335	,7490	,8465	30
40	272	648	504	899	124	339	470	436	20
50	301	670	499	952	117	342	451	407	10
42° 00'	,7330	,6691	1,494	,9004	1,111	1,346	,7431	,8378	48° 00'
10	359	713	490	057	104	349	412	348	50
20	389	734	485	110	098	353	392	319	40
30	,7418	,6756	1,480	,9163	1,091	1,356	,7373	,8290	30
40	447	777	476	217	085	360	353	261	20
50	476	799	471	271	079	364	333	232	10
43° 00'	,7505	,6820	1,466	,9325	1,072	1,367	,7314	,8203	47° 00'
10	534	841	462	380	066	371	294	174	50
20	563	862	457	435	060	375	274	145	40
30	,7592	,6884	1,453	,9490	1,054	1,379	,7254	,8116	30
40	621	905	448	545	048	382	234	087	20
50	650	926	444	601	042	386	214	058	10
44° 00'	,7679	,6947	1,440	,9657	1,036	1,390	,7193	,8029	46° 00'
10	709	967	435	713	030	394	173	,7999	50
20	738	988	431	770	024	398	153	970	40
30	,7767	,7009	1,427	,9827	1,018	1,402	,7133	,7941	30
40	796	030	423	884	012	406	112	912	20
50	825	050	418	942	006	410	092	883	10
45° 00'	,7854	,7071	1,414	1,000	1,000	1,414	,7071	,7854	45° 00'
		cos θ	sec θ	cot θ	tan θ	csc θ	sen θ	Radianes	Grados
								Angulo θ	

TABLA II

Logaritmos de los números del 1 al 10 con cuatro cifras decimales para valores mayores escriba el número N en la forma N = n x 10^c, 1 ≤ n < 10, c un número entero y úsese log N = log n x c

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	+0.0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
1.1	,0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
1.2	,0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
1.3	,1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
1.4	,1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
1.5	,1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
1.6	,2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
1.7	,2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
1.8	,2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
1.9	,2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
2.0	,3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
2.1	,3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
2.2	,3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
2.3	,3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
2.4	,3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
2.5	,3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
2.6	,4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
2.7	,4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
2.8	,4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
2.9	,4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
3.0	,4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
3.1	,4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
3.2	,5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
3.3	,5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
3.4	,5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
3.5	,5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
3.6	,5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
3.7	,5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
3.8	,5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
3.9	,5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
4.0	,6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
4.1	,6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
4.2	,6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
4.3	,6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
4.4	,6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
4.5	,6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
4.6	,6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
4.7	,6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
4.8	,6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
4.9	,6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981

Tablas

TABLA II (Conclusión)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.0	+,6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
5.1	,7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
5.2	,7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
5.3	,7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
5.4	,7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
5.5	,7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
5.6	,7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
5.7	,7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
5.8	,7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
5.9	,7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
6.0	,7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
6.1	,7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
6.2	,7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
6.3	,7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
6.4	,8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
6.5	,8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
6.6	,8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
6.7	,8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
6.8	,8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
6.9	,8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
7.0	,8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
7.1	,8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
7.2	,8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
7.3	,8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
7.4	,8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
7.5	,8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
7.6	,8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
7.7	,8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
7.8	,8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
7.9	,8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
8.0	,9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
8.1	,9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
8.2	,9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
8.3	,9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
8.4	,9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
8.5	,9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
8.6	,9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
8.7	,9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
8.8	,9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
8.9	,9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
9.0	,9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
9.1	,9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
9.2	,9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
9.3	,9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
9.4	,9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
9.5	,9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
9.6	,9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
9.7	,9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
9.8	,9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
9.9	,9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

Se terminó de Imprimir en Febrero de 1997
en los Talleres Gráficos de
EDITORIAL COVEÑAS E.I.R.Ltda.
RUC N° 29534659
Jr. Las Verdolagas N° 199 - Urb. Micaela Bastidas
Los Olivos - Lima/Perú
Telfs. 486-7957 • 521-0949